Să se determine convoluția circulară a secvențelor

$x_1[n] = \{1, 2, 3, 1\}$ $\quad x_2[n] = \{4, 3, 2, 2\}$

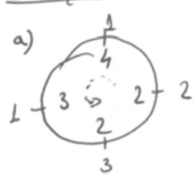
a) în domeniul timp (analitic sau grafic);

b) folosind DFT și IDFT în $N = 4$ puncte pentru $x_1[n]$ și $x_2[n]$.

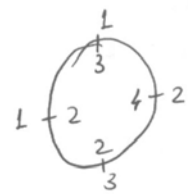
În câte puncte trebuie realizată convoluția circulară pentru a determina secvența $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ (* convoluția liniară)

<u>Soluție:</u>

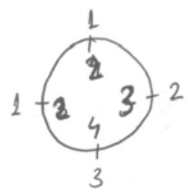
a)



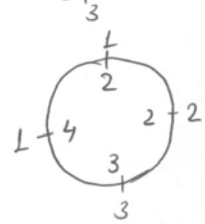
$x_3[0] = 17$



$x_3[1] = 19$



$x_3[2] = 22$



$x_3[3] = 19$

b) $X_1[k] = \sum_{n=0}^{3} x_1[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{4}} = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{4}} + 3e^{-j\frac{2\pi k \cdot 2}{4}} + 4e^{-j\frac{2\pi k \cdot 3}{4}}$

$= 1 + 2e^{-j\frac{k\pi}{2}} + 3e^{-jk\pi} + e^{-j\frac{3k\pi}{2}}$

$X_1[0] = 7$; $X_1[1] = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 - 2j - 3 + j = -2 - j$

$X_1[2] = 1 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi} = 1$

$X_1[3] = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} + e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 1 + 2j - 3 - j = -2 + j$

$X_2[k] = 4 + 3e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}}$

$X_2[0] = 11$; $X_2[1] = 4 + 3e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 2 - j$

$X_2[2] = 4 + 3e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi} = 1$

$X_2[3] = 4 + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 4 + 3j - 2 - 2j = 2 + j$

$X_3[0] = 77$; $X_3[1] = -5$; $X_3[2] = 1$; $X_3[3] = -5$

$$x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]\, e^{j\frac{2\pi k n}{4}} = \frac{1}{4}\left(X_3[0] + X_3[1]\, e^{j\frac{\pi n}{2}} + X_3[2]\, e^{j\pi n} + X_3[3]\, e^{j\frac{3\pi n}{2}}\right)$$

$x_3[0] = \frac{1}{4}\left(77 - 5 + 1 - 5\right) = 17$ $\qquad$ $x_3[2] = \frac{1}{4}\left(77 + 5 + 1 + 5\right) = 22$

$x_3[1] = \frac{1}{4}\left(77 - 5j - 1 + 5j\right) = 19$ $\qquad$ $x_3[3] = \frac{1}{4}\left(77 + 5j - 1 - 5j\right) = 19$

$x_3[n] = \{17, 19, 22, 19\}$

Pentru a obține convoluția liniară trebuie realizată convoluția circulară în $4+4-1$ puncte.

2. Să se determine coeficienții unui filtru Trece Jos de fază liniară ce are funcția de sistem:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2},$$

iar $|H(0)| = 1$ și componentele de frecvență $\omega = \frac{2\pi}{3}$ nu trec prin filtru. Să se schițeze răspunsul în frecvență a filtrului.

Soluție

M - impar, deoarece este filtru TJ $\Rightarrow$ simetrie pară $\Rightarrow$ $b_0 = b_2$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}$$

$$H(\omega) = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_0 e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}\left(b_0 e^{j\omega} + b_1 + b_0 e^{-j\omega}\right) =$$

$$= e^{-j\omega}\left(2b_0 \cos\omega + b_1\right)$$

$$|H(\omega)| = |2b_0 \cos\omega + b_1|$$

$$\left|H\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\right| = \left|2b_0 \cos\tfrac{3\pi}{2} + b_1\right| = \left|2b_0\left(-\tfrac{1}{2}\right) + b_1\right| = |b_1 - b_0|$$

Din $\left|H\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| = 0 \Rightarrow b_0 = b_1$

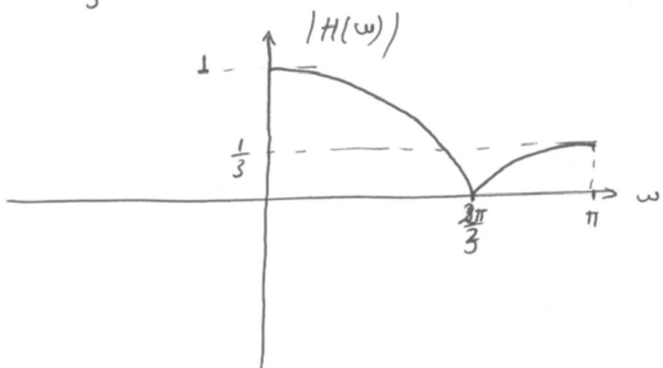
$$H(z) = b_0\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right) \qquad |H(0)| = |b_0|\cdot 3 \Rightarrow |b_0| = \frac{1}{3}$$

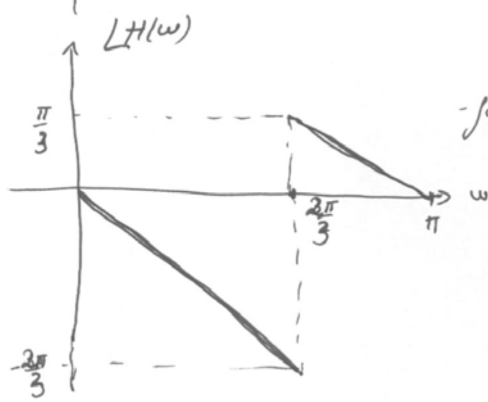
$$\Rightarrow \quad H(z) = \pm\frac{1}{3}\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)$$

$$H(\omega) = \pm\frac{1}{3}e^{-j\omega}\left(2\cos\omega+1\right)$$

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} -\omega & 2\cos\omega+1 \geq 0 \quad \omega\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \\ \pi-\omega & 2\cos\omega+1 < 0 \quad \omega\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right) \end{cases}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3}\left|2\cos\omega+1\right|$$





- fază liniară

2. Fie sistemul cauzal IIR cu funcția de sistem

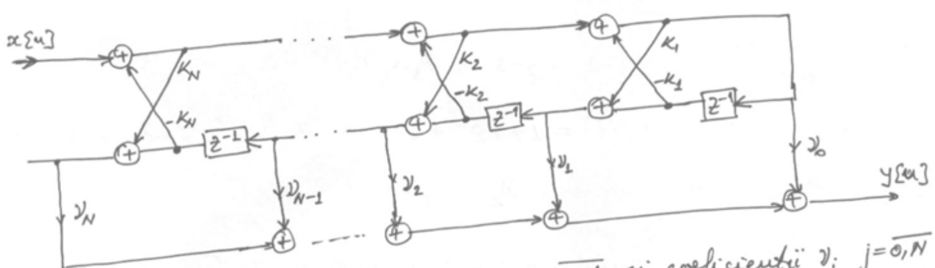
$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}}{1+0,9z^{-1}-0,8z^{-2}+0,5z^{-3}}$$

a) să se determine structura echivalentă lattice cu poli și cu zerouri;

b) să se descrie sistemul $H(z)$ în spațiul stărilor.

Soluție:

a) Structura lattice cu poli și zerouri are forma:



Trebuie determinați coeficienții k_i $i=\overline{1,N}$ și coeficienții ν_j $j=\overline{0,N}$

Se dau relațiile:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - k_m B_m(z)}{1-k_m^2} \qquad k_m = \alpha_m(m)$$

$$A_m(z) = \alpha_m(0)+\alpha_m(1)z^{-1}+\dots+\alpha_m(m)z^{-m}$$

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - \nu_m B_m(z) \qquad \nu_m = c_m(m)$$

$$C_m(z) = c_m(0)+c_m(1)z^{-1}+\dots+c_m(m)z^{-m}$$

unde $A_N(z) = 1+a_1z^{-1}+\dots+a_Nz^{-N}$

$B_N(z) = z^{-N}+a_1z^{-N+1}+\dots+a_N$

$C_M(z) = b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_Mz^{-M}$

$N=3;\ M=3$

$\cancel{A_3(z) = 1+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3} \quad B_3(z)=}$

$A_3(z) = 1+0,9z^{-1}-0,8z^{-2}+0,5z^{-3} \qquad B_3(z) = 0,5-0,8z^{-1}+0,9z^{-2}+z^{-3}$

$\alpha_3(3)=0,5 \Rightarrow k_3=0,5$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z)-k_3B_3(z)}{1-k_3^2} = \frac{1+0,9z^{-1}-0,8z^{-2}+0,5z^{-3}-0,5(0,5-0,8z^{-1}+0,9z^{-2}+z^{-3})}{1-0,25}$$

$$= \frac{0{,}75 + 1{,}3 z^{-1} - 1{,}25 z^{-2}}{0{,}75} = 1 + \frac{26}{5} z^{-1} - \frac{5}{3} z^{-2} \qquad K_2 = \alpha_2(2) = -\frac{5}{3}$$

$$B_2(z) = -\frac{5}{3} + \frac{26}{5} z^{-1} + z^{-2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{1 + \frac{26}{5} z^{-1} - \frac{5}{3} z^{-2} + \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{3} + \frac{26}{15} z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \frac{25}{9}}$$

$$= \frac{-\frac{16}{9} + \frac{26 \cdot 8}{15 \cdot 3} z^{-1}}{-\frac{16}{9}} = 1 - \frac{13}{5} z^{-1} \qquad \Rightarrow \quad K_1 = \alpha_1(1) = -\frac{13}{5}$$

$$B_1(z) = -\frac{13}{5} + z^{-1}$$

$$C_3(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} \qquad \nu_3 = c_3(3) = 2$$

$$C_2(z) = C_3(z) - \nu_3 B_3(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2\left(0{,}5 - 0{,}8 z^{-1} + 0{,}9 z^{-2} + z^{-3}\right)$$

$$= 3{,}6 z^{-1} + 1{,}2 z^{-2} \qquad \nu_2 = c_2(2) = 1{,}2$$

$$C_1(z) = C_2(z) - \nu_2 B_2(z) = 3{,}6 z^{-1} + 1{,}2 z^{-2} - 1{,}2\left(-\frac{5}{3} + \frac{26}{15} z^{-1} + z^{-2}\right) =$$

$$= 2 + \frac{38}{25} z^{-1} \qquad \nu_1 = C_1(1) = \frac{38}{25}$$

$$C_0(z) = C_1(z) - \nu_1 B_1(z) = 2 + \frac{38}{25} z^{-1} - \frac{38}{25}\left(-\frac{13}{5} + z^{-1}\right) = \frac{744}{125}$$

$$\nu_0 = C_0(0) = \frac{744}{125}$$