1. Un filtru digital cauzal de ordinul I are funcția de transfer

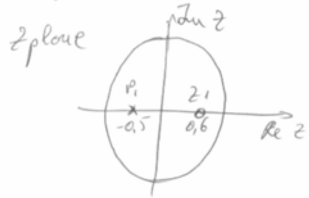
$$H(z) = G\,\frac{1+b\,z^{-1}}{1+a\,z^{-1}}$$

a) Pentru $a = 0,5$, $b = -0,6$ să se reprezinte diagrama poli, zerouri. Este sistemul stabil? De ce?

b) Să se determine G astfel încât valoarea lui $|H(\pi)| = 1$

c) Să se determine răspunsul în amplitudine și de fază a filtrului de la punctul b). Să se schițeze răspunsul în amplitudine. Ce tip de filtru este?

a) $a = 0,5$ $\quad b = -0,6$ $\quad z_1 = 0,5$ $\quad p_1 = -0,5$



Sistem stabil $|p_1| = 0,5 < 1$

Polul p_1 în interiorul cercului unitate

b) $$H(z) = G\,\frac{1-0,6\,z^{-1}}{1+0,5\,z^{-1}} \qquad H(\omega) = G\,\frac{1-0,6\,e^{-j\omega}}{1+0,5\,e^{-j\omega}}$$

$$H(\pi) = H(\omega)\Big|_{\omega=\pi} = G\,\frac{1-0,6\,e^{-j\pi}}{1+0,5\,e^{-j\pi}} = G\,\frac{1,6}{0,5} \qquad H(\pi) = 1 \Rightarrow G = \frac{5}{16}$$

c) $$H(\omega) = \frac{5}{16}\,\frac{1-0,6\,e^{-j\omega}}{1+0,5\,e^{-j\omega}} = \frac{5}{16}\,\frac{e^{j\omega}-0,6}{e^{j\omega}+0,5} = \frac{5}{16}\,\frac{\cos\omega + j\sin\omega - 0,6}{\cos\omega + j\sin\omega + 0,5}$$

$$|H(\omega)| = \frac{5}{16}\,\frac{\sqrt{(\cos\omega - 0,6)^2 + \sin^2\omega}}{\sqrt{(\cos\omega+0,5)^2+\sin^2\omega}} = \frac{\sqrt{1,36-1,2\cos\omega}}{\sqrt{1,25+\cos\omega}}$$

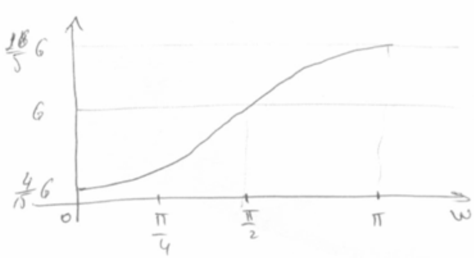
$$\angle H(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\sin\omega}{\cos\omega - 0,6} - \operatorname{arctg}\frac{\sin\omega}{\cos\omega+0,5}$$

$\omega = 0$ $\quad |H(0)| = \frac{4}{15}G$

$\omega = \frac{\pi}{4}$ $\quad \left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt2}{2}-0,6\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac12\right)^2}}\cdot G$

$\omega = \frac{\pi}{2}$ $\quad \left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{1+(0,6)^2}}{\sqrt{1+(0,5)^2}} = \dfrac{\sqrt{1,36}}{\sqrt{1,25}}\,G$

$\omega = \pi$ $\quad |H(\pi)| = \frac{16}{5}G$



Filtru Trece Sus

2. Fie răspunsul la impuls a unui sistem discret de forma

$$h[n] = \{\alpha^n (\sin \omega_0 n)\}\, u[n]$$

a) calculaţi funcţia de transfer a sistemului $H(z)$

b) pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ reprezentaţi diagrama poli-zerouri şi schiţaţi răspunsul în amplitudine a filtrului cu ajutorul metodei geometrice;

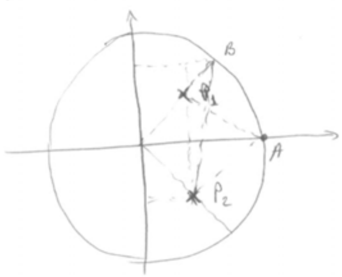
c) calculaţi răspunsul sistemului de la punctul b) la intrarea: $x[n] = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4}\right)$

a) $$h[n] = \alpha^n \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} = \frac{1}{2j}\left[(\alpha e^{j\omega_0})^n - (\alpha e^{-j\omega_0})^n\right] u[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2j}\left[(\alpha e^{j\omega_0})^n - (\alpha e^{-j\omega_0})^n\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\alpha e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega_0} z^{-1}}\right] =$$

$$= \frac{\alpha \frac{e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0}}{2j} z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos\omega_0 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} = \frac{\alpha \sin\omega_0 z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos\omega_0 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$$

b) $\alpha = \frac{1}{2}$ $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ $$H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} z^{-1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$ $p_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ $z_{1,2} = 0$



$$|H(0)| = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{|P_1A||P_2A|} = \frac{\sqrt{2}/4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}}$$

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{|P_1B||P_2B|} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}/4}{|P_1C||P_2C|}$$

Seminar 4 PDS

1. Să se determine răspunsul la impuls a sistemului ce are funcția de transfer: Sistemul este cauzal.

$$H(z) = \frac{4 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-3}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$

$M=3$ $N=2$ $M>N$ $H(z)$ este o funcție rațională improprie

Trebuie scrisă sub forma unei sume dintre o funcție polinomială și una rațională proprie

$$H(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$

Trebuie să determinăm c_0, c_1, b_0, b_1. Se împarte polinomul de la numărător la cel de la numitor (polinomul este în z^{-1}):

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{4} z^{-3} - 0 z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-1} + 4 & \frac{1}{4} z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2}
-\frac{1}{4} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-2} - z^{-1} & z^{-1} + 2 \\ \cline{1-1}
= \quad \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{3}{2} z^{-1} + 4 & \\
\quad -\frac{1}{2} z^{-2} + z^{-1} - 2 & \\ \cline{1-1}
\quad = \quad -\frac{1}{2} z^{-1} + 2 &
\end{array}$$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$H(z) = 2 + z^{-1} + 2\,\frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} = 2 + z^{-1} + 2\,\frac{1 - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} z^{-1}}{1 - 2\,\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2}}$$

$$\frac{1 - a z^{-1} \cos w_0}{1 - 2 a z^{-1} \cos w_0 + a^2 z^{-2}} \longrightarrow (a^n \cos w_0 n)\, u[n]$$

$|z| > |a|$

$2 \longrightarrow 2\delta[n]$; $z^{-1} \longrightarrow \delta[n-1]$

$$\Rightarrow \quad h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right)\right] u[n]$$

$h[n]$ – cauzal

2. Să se realizeze conversia filtrului analogic ce are funcția de sistem:

$$H_a(s) = \frac{s+0,1}{(s+0,1)^2+9}$$

într-un filtru digital IIR prin metoda:

a) invarianței răspunsului la impuls; $T=0,1$

b) biliniara. , Se dă ~~$T=0,1$~~. dacă $\omega_r = \pi/2$

a) Dacă $H_a(s)$ are forma: $\qquad p_k \to e^{p_k T}$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s-p_k} \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1-e^{p_k T} z^{-1}}$$

$$H_a(s) = \frac{s+0,1}{(s+0,1+3j)(s+0,1-3j)} = \frac{C_1}{s+0,1+3j} + \frac{C_2}{s+0,1-3j}$$

$$C_1 = H_a(s)(s+0,1+3j)\Big|_{s=-0,1-3j} = \frac{1}{2} \; ; \; C_2 = H_a(s)(s+0,1-3j)\Big|_{s=-0,1+3j} = \frac{1}{2}$$

$$H_a(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s+0,1+3j} + \frac{\frac{1}{2}}{s+0,1-3j} \qquad p_1 = -0,1-3j \quad p_2 = -0,1+3j$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{(-0,1-3j)T} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{(-0,1+3j)T} z^{-1}} = \frac{1 - e^{-0,1T}\cos 3T\, z^{-1}}{1-2e^{-0,1T}\cos 3T\, z^{-1} + e^{-0,2T} z^{-2}}$$

b) $$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \qquad S = 4\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad T = \frac{1}{F_s} \qquad \Omega_r = 4, \; \omega_r = \frac{\pi}{2}$$

$$\Omega_r = \frac{2}{T}\, tg\, \frac{\omega_r}{2} \Rightarrow T = \frac{2}{\Omega_r}\, tg\, \frac{\omega_r}{2} \qquad T = \frac{2}{4}\, tg\, \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{4\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,1}{\left(4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,1\right)^2 + 9} = \frac{\left[4(1-z^{-1}) + 0,1(1+z^{-1})\right](1+z^{-1})}{\left[4(1-z^{-1}) + 0,1(1+z^{-1})\right]^2 + 9(1+z^{-1})^2} =$$

$$= \frac{(4,1-3,9z^{-1})(1+z^{-1})}{(4,1-3,9z^{-1})^2 + 9 + 18z^{-1} + z^{-2}} = \cancel{\frac{0,128 + 0,006z^{-1} - 0,122z^{-2}}{1 + 0,0006z^{-1} + 0,925z^{-2}}}$$

-3-

$$= \frac{4,1 + 0,2 z^{-1} - 3,9 z^{-2}}{(4,1)^2 - 2\cdot 4,1\cdot 3,9 z^{-1} + (3,9)^2 z^{-2} + 9 + 18 z^{-1} + z^{-2}} =$$

$$= \frac{4,1 + 0,2 z^{-1} - 3,9 z^{-2} \quad /25,81}{25,81 - 13,98 z^{-1} + 16,21 z^{-2} \quad /25,81} = \frac{0,15 + 0,0077 z^{-1} - 0,15 z^{-2}}{1 - 0,5 z^{-1} + 0,64 z^{-2}}$$

bs = [1 0,1]   as = [1 0,2 9,01]

[bz, az] = bilinear(bs, as, 2);

3. Implementați filtrul discret cu funcția de sistem:

$$H(z) = \frac{10\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3} z^{-1}\right)\left(1 + 2 z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{8} z^{-1}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right) z^{-1}\right]\left[1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right) z^{-1}\right]}$$

în realizările:

a) directă I și II;

b) transpusă;

c) cascadă;

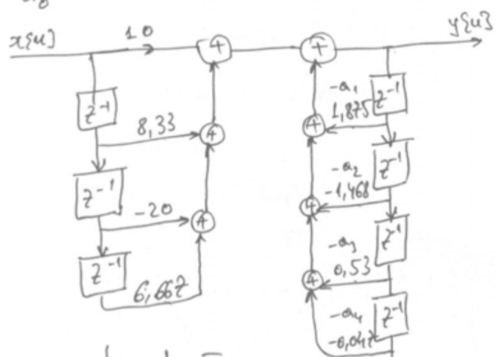
d) paralelă.

a) Se desfac parantezele și rezultă:

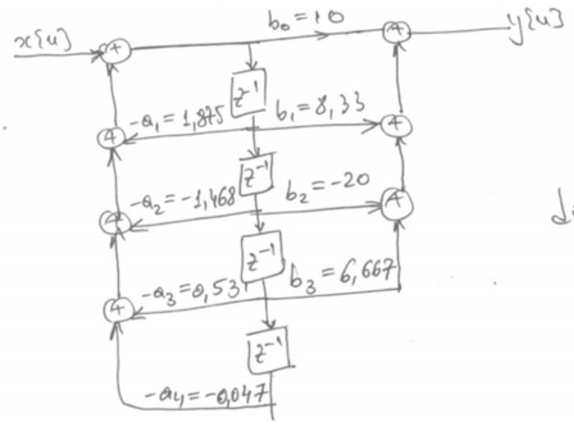
$$H(z) = \frac{10 + 8,33 z^{-1} - 20 z^{-2} + 6,667 z^{-3}}{1 - 1,875 z^{-1} + 1,468 z^{-2} - 0,53 z^{-3} + 0,047 z^{-4}}$$

$b_0 = 10$ $b_1 = 8,33$ $b_2 = -20$ $b_3 = 6,667$

$a_0 = 1$ $a_1 = -1,875$ $a_2 = 1,468$ $a_3 = -0,53$ $a_4 = 0,047$

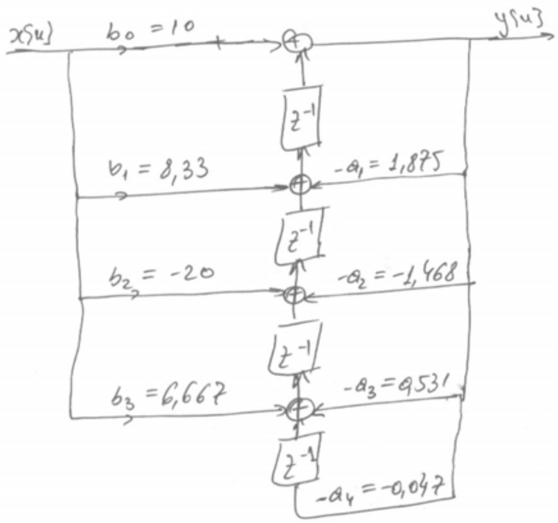


Directă I



Directă II

b) transpusă



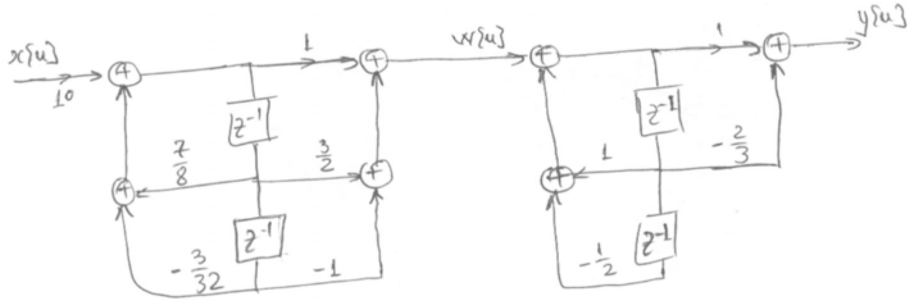
c) În cascadă. Vom scrie $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$ unde $H_1(z)$ și $H_2(z)$ sunt funcții de transfer de ordinul doi. La numitor vom grupa împreună polii reali și polii complex conjugați. La numărător se aleg arbitrar.

$$H(z) = 10\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{8}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left[1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)z^{-1}\right]}$$

- 5 -

$$H_1(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-1}} \qquad H_2(z) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$H(z) = 10\, H_1(z)\, H_2(z)$$



d) Paralel

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}}$$

$A_1 = H(z)\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{3}{4}} = 2{,}933$; $\cancel{A_2 = 0{,}125}$ $A_2 = -17{,}68$

$A_3 = 12{,}25 - 14{,}57j \qquad A_4 = 12{,}25 + 14{,}57j = A_3^*$

Dacă se aduce la ~~fracție~~ numitor comun primele două fracții și ultimele rezultă

$$H(z) = \frac{-14{,}75 - 12{,}90 z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24{,}50 + 26{,}82 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Avem o sumă de 2 funcții raționale de ordinul 2

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

- 6 -