2.1. Un semnal discret $x[n]$ este definit:

$$x[n] = \begin{cases} 1 + n/3 & -3 \le n \le -1 \\ 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

a) determinați valorile lui $x[n]$ și reprezentați semnalul;

b) reprezentați semnalul rezultat dacă:

1 întâi se reflectă $x[n]$ iar apoi se întârzie rezultatul cu 4 eșantioane

2 se întârzie semnalul cu 4 eșantioane și apoi se reflectă.

c) să se reprezinte semnalul $x[-n+4]$

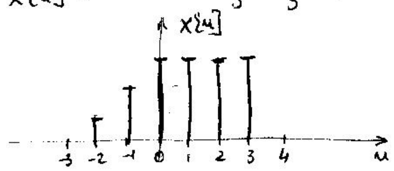
d) comparați b cu c. Cum se obține $x[-n+k]$ din $x[n]$

e) Exprimați $x[n]$ cu ajutorul semnalelor $\delta[n]$ și $u[n]$.

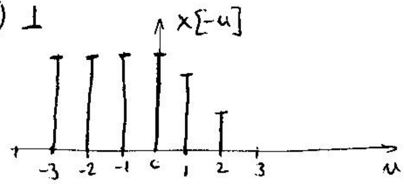
a)

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[n]$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	1	1	0

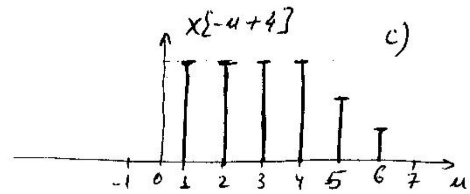
$x[n] = \{\ldots 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 0 \ldots\}$



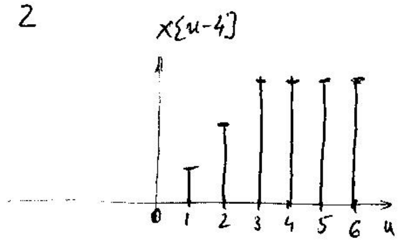
b) 1

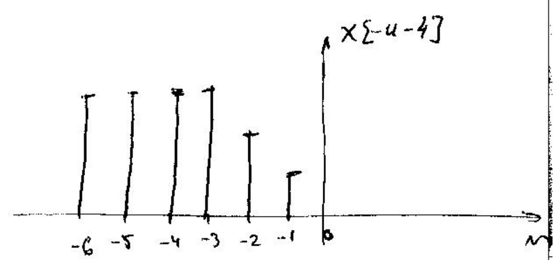


c)



2





Obs.: reflectarea și întârzierea nu sunt comutative

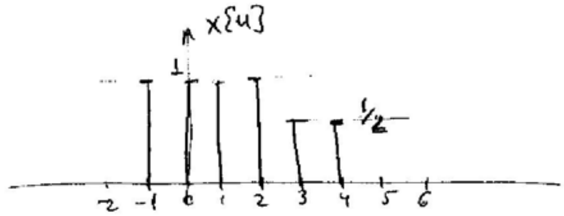
d) $x[-n+k]$ se obține prin reflectarea lui $x[n]$ și apoi întârzierea cu k unități

e) $x[n] = \frac{1}{3}\delta[n+2] + \frac{2}{3}\delta[n+1] + u[n] - u[n-4]$

sau $x[n] = \frac{1}{3}\delta[n+2] + \frac{2}{3}\delta[n+1] + \sum_{k=0}^{3}\delta[n-k]$

sau $x[n] = \frac{1}{3}(n+3)\left[u[n+2] - u[n]\right] + u[n-1] - u[n-4]$

2.2. Un semnal discret $x[n]$ este reprezentat în figura de mai jos. Să se calculeze și să se reprezinte fiecare din următoarele semnale:



a) $x[n-2]$

b) $x[4-n]$

c) $x[n+2]$

d) $x[n]u[2-n]$

e) $x[n-1]\delta[n-3]$

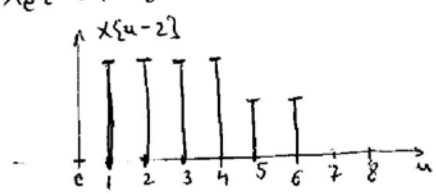
f) $x[n^2]$

g) partea pară a lui $x[n]$

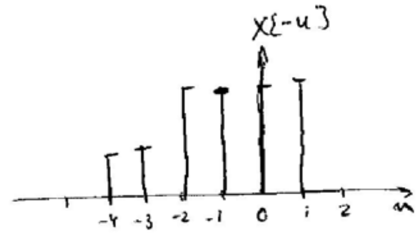
h) partea impară a lui $x[n]$

i) $x_e[n] + x_o[n]$

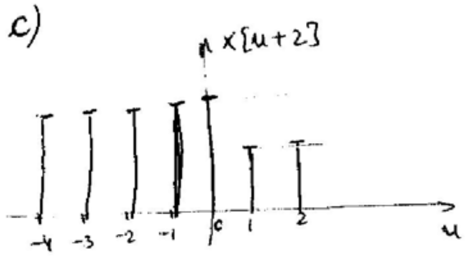
a)



b)

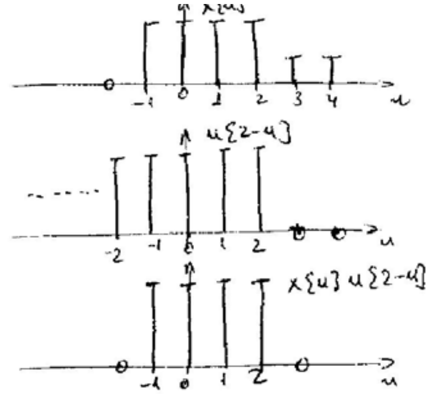


c)



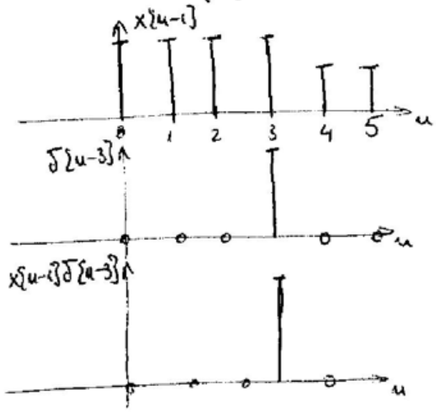
d)

$$u[2-n]=\begin{cases}1 & \text{dacă } 2-n\geq 0 \quad n\leq 2\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$



e)

$$\delta[n-3]=\begin{cases}1 & n=3\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$



f)

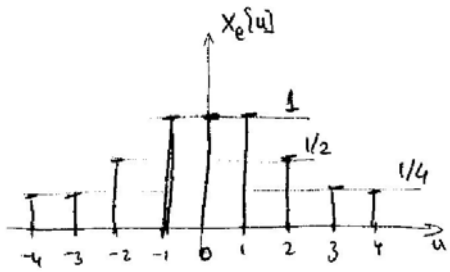
n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x[n^2]$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0

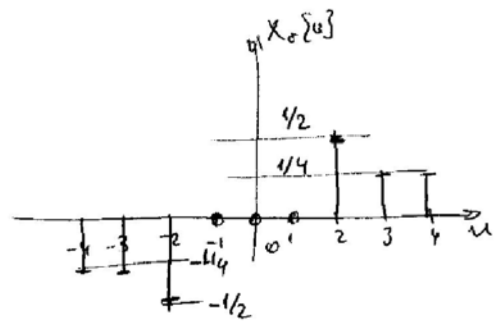
g) $x_e[n]=\frac{1}{2}\left(x[n]+x[-n]\right)$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[n]$	0	0	0	1	1	1	1	1/2	1/2
$x[-n]$	1/2	1/2	1	1	1	1	0	0	0
$x_e[n]$	1/4	1/4	1/2	1	1	1	1/2	1/4	1/4
$x_o[n]$	-1/4	-1/4	-1/2	0	0	0	1/2	1/4	1/4

h) $x_o[n]=\frac{1}{2}\left(x[n]-x[-n]\right)$

i) $x_e[n]+x_o[n]=\{\ldots 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \overset{\downarrow}{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 0 \ldots\}=x[n]$





2.3. Fie sistemul $y\{n\} = H\left[x\{n\}\right] = x\{n^2\}$

a) să se determine dacă este invariant în timp

b) se aplică sistemului semnalul:

$$x\{n\} = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

1) să se reprezinte $x\{n\}$
2) să se determine și să se reprezinte $y\{n\} = H\{x\{n\}\}$
3) să se reprezinte $y_2'\{n\} = y\{n-2\}$
4) să se determine și să se reprezinte $x_2\{n\} = x\{n-2\}$
5) să se determine și să se reprezinte semnalul $y_2\{n\} = H[x_2\{n\}]$

6) să se compare semnalele $y_2\{n\}$ cu $y\{n-2\}$. Ce concluzie rezultă

a) $H\{\ \}$ invariant în timp dacă $y\{n-k\} = H\{x\{n-k\}\}\ \forall k \in \mathbb{Z}$

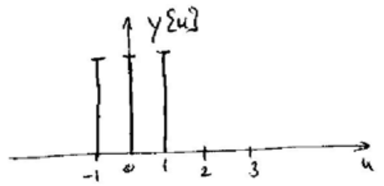
$y\{n,k\} = H\{x\{n-k\}\} = x\{n^2-k\}$ Sistemul este variant în timp

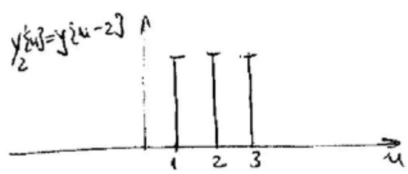
$y\{n-k\} = x\{(n-k)^2\}$

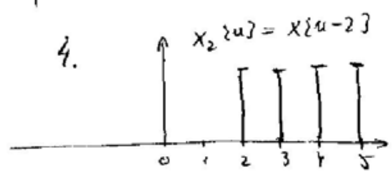
b)

1. 

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x\{n\}$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
$y\{n\}$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
$y_2'\{n\}$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$x_2\{n\}=x\{n-2\}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$H\{x_2\{n\}\}$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

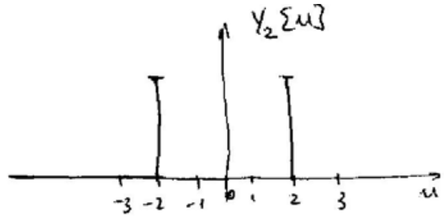
2. 

3. 

4. 

5. $y_2\{n\} = H\{x_2\{n\}\}$ $y_2\{-3\} = x_2\{9\} = 0$ $y_2\{-2\} = x_2\{4\} = 1$ $y_2\{-1\} = x_2\{1\} = 0$

$y_2\{0\} = x_2\{0\} = 0$ $y_2\{1\} = x_2\{1\} = 0$ $y_2\{2\} = x_2\{4\} = 1$ $y_2\{3\} = x_2\{9\} = 0$



b) Cele două semnale $y_2'[n]$ şi $y_2[n]$ nu sunt identice.
Concluzia este sistemul este variant în timp

2.4. Pentru sistemul descris de: $y[n] = n\,x^2[n^2]$

stabiliţi:

a) varianţa în timp

b) liniaritatea

c) cauzalitatea

a) pentru intrarea $x[n-k]$, ieşirea va fi:

$y[n,k] = n\,x^2[n^2-k]$

Dar $y[n-k] = (n-k)\,x^2[(n-k)^2]$

Deoarece $y[n,k] \neq y[n-k]$ ⇒ sistemul este variant în timp

b) $y_1[n] = n\,x_1^2[n^2]$ $\quad y_2[n] = n\,x_2^2[n^2]$

$y_3[n] = H\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = n\{a_1 x_1[n^2] + a_2 x_2[n^2]\}^2 \neq$

$\neq a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$ ⇒ sistemul este neliniar

c) $y[2] = 2\cdot x^2[4]$ ⇒ sistemul este necauzal

2.5. Un semnal discret este definit de secvenţa:

$x[n] = \{ .0, \overset{\downarrow}{4}, 3, -1, 2, 3, -3, -7, -5, -2, 8, 7, 4, 5, 8, 4, 0 \ldots \}$

a) Calculaţi valoarea medie a acestui semnal;

b) Calculaţi valoarea pătratică medie pentru semnal.

a) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{15}[4+3-1+2+3-3-7-5-2+8+7+4+5+8+4] = \mathbf{2}$

b) $\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{15}[3\cdot 4^2 + 3\cdot 3^2 + 1 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 7^2 + 2\cdot 5^2 + 2\cdot 8^2] = \frac{360}{15}$

$= 24$

2.6. Fie sistemul discret descris de $y\{n\} = a\,y\{n-1\} + x\{n\}$. Să se exprime ieşirea $y\{n\}$ pt. n de la $-\infty$ la ∞ la semnalul de intrare $x\{n\} = k\,\delta\{n\}$ şi $y\{-1\} = c$ şi să se studieze stabilitatea sa.

pentru $n \geq 0$ $\quad y\{0\} = a\,y\{-1\} + x\{0\} = a \cdot c + k$

$$y\{1\} = a\,y\{0\} + x\{1\} = a(ac+k) + 0 = a^2 c + ak$$

prin inducție

$$y\{n\} = a^{n+1} \cdot c + a^n k$$

pentru $n < 0$

$$y\{n-1\} = a^{-1}\left(y\{n\} - x\{n\}\right)$$

$$y\{-2\} = a^{-1}\left(y\{-1\} - x\{-1\}\right) = a^{-1} \cdot c$$

$$y\{-3\} = a^{-2} \cdot c$$

$$\vdots$$

$$y\{n\} = a^{n+1} \cdot c \quad \Rightarrow \quad y[n] = a^{n+1} \cdot c \text{ pt. } n < -1$$

Pt. $n \in (-\infty, \infty)$ $\quad y\{n\} = a^{n+1} \cdot c + a^n k \cdot u\{n\}$

stabilitate: - pentru sistem cauzal ($y\{n\} \leq M_y$ pt. $n \geq 0$) sistemul este stabil pentru $|a| < 1$.

- pentru sistem necauzal ($y\{n\} \leq M_y$ pt. $n < 0$) sistemul este stabil pentru $|a| > 1$

2.7. Să se determine şi să se reprezinte convoluţia $y[n]$ a semnalelor.

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}n & 0 \le n \le 6 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} 1 & -2 \le n \le 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

~~[illegible]~~.

$$x[n] = \{\overset{\downarrow}{0}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 2\} \qquad h[n] = \{1, 1, \overset{\downarrow}{1}, 1, 1\}$$

		$\overset{\downarrow}{0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2				
$h[-k]$												
1	1	1	1	1								
	1	1	1	1	1							
		1	1	1	1	1						
			1	1	1	1	1					
				1	1	1	1	1				
					1	1	1	1	1			
						1	1	1	1	1		
							1	1	1	1	1	
								1	1	1	1	1
1	1	1	1	0								
1	1	1	0									
1	1	0										

$y[0] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$y[1] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2$

$y[2] = \frac{10}{3}$

$y[3] = \frac{15}{3} = 5$

$y[4] = \frac{20}{3}$

$y[5] = 6$

$y[6] = 5$

$y[7] = \frac{11}{3}$

$y[8] = 2$

$y[9] = 0$

$y[-1] = \frac{1}{3}$

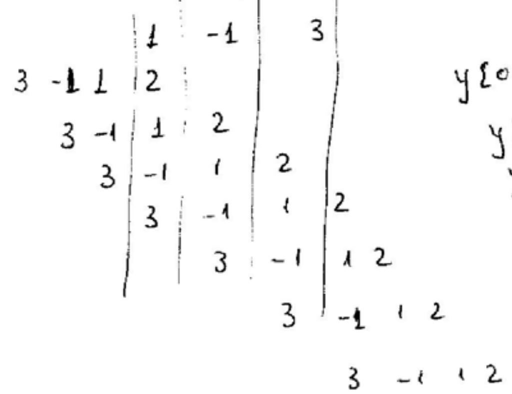
$y[-2] = 0$

$y[-3] = 0$

$$y[n] = \{\ldots 0, \tfrac{1}{3}, \overset{\downarrow}{1}, 2, \tfrac{10}{3}, 5, \tfrac{20}{3}, 6, 5, \tfrac{11}{3}, 2, 0\}$$

2.8. Să se calculeze convoluția liniară și circulară ($N = 4$ și $N = 6$) pentru secvențele:

$x[n] = \{ \overset{\downarrow}{1}, -1, 3 \}$ $\quad h[n] = \{ \overset{\downarrow}{2}, 1, -1, 3 \}$



$y[0] = 2$

$y[1] = -1$

$y[2] = 6$

$y[3] = 7$

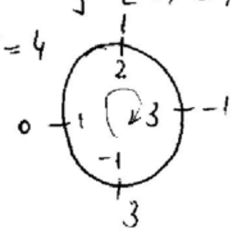
$y[4] = -6$

$y[5] = 9$

$y[6] = 0 \qquad y[-1] = 0$

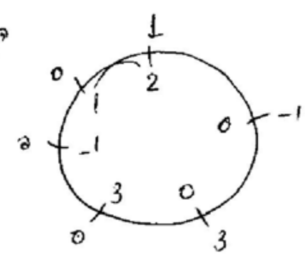
$y = \{ 0, \overset{\downarrow}{2}, -1, 6, 7, -6, 9, 0 \}$

$N = 4$



$y_c^4[0] = -4 \quad y_c^4[1] = 8 \quad y_c^4[2] = 4 \quad y_c^4[3] = 7$

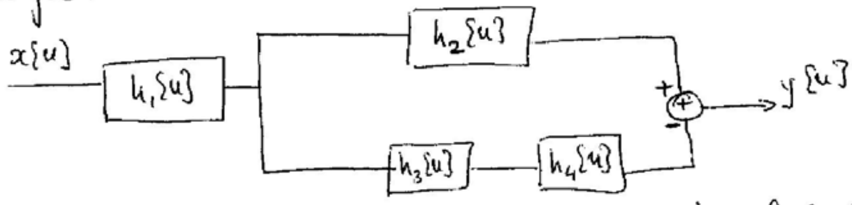
$N = 6$



$y_c^6[0] = 2 \quad y_c^6[1] = -1 \quad y_c^6[2] = 6$

$y_c^6[3] = 7 \quad y_c^6[4] = -6 \quad y_c^6[5] = 9$

2.9. Se consideră SDLIT interconectate ca în figura de mai jos:



a) Să se exprime răspunsul la impuls a întregului sistem în funcție de $h_1[n], h_2[n], h_3[n], h_4[n]$

b) Să se determine $h[n]$, dacă $h_1[n] = \{\underset{\uparrow}{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\}$, $h_2[n] = h_3[n] =$
$= (n+1)u[n]$ $\quad h_4[n] = \delta[n-2]$

c) Să se determine răspunsul sistemului de la punctul b) dacă $x[n] = \delta[n+2] + 3\delta[n-1] - 4\delta[n-3]$

a) $$h[n] = h_1[n] * \left(h_2[n] + h_3[n] * h_4[n]\right)$$

b) $$h_3[n] * h_4[n] = [(n+1)u[n]] * \delta[n-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-2]\, u[n-k](n-k+1)$$

$$\delta[k-2] = \begin{cases} 1 & k=2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \qquad = u[n-k](n-k+1)\Big|_{k=2} = (n-1)u[n-2]$$

$$h_T[n] = h_2[n] + h_3[n]*h_4[n] = (n+1)u[n] - (n-1)u[n-2] =$$
$$= \delta[n] + 2\delta[n-1] + (n+1)u[n-2] - (n-1)u[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2u[n-2]$$

$$h_1[n] = \tfrac{1}{2}\delta[n] + \tfrac{1}{4}\delta[n-1] + \tfrac{1}{2}\delta[n-2]$$

$$h_1[n] * h_T[n] = \tfrac{1}{2} h_T[n] + \tfrac{1}{4} h_T[n-1] + \tfrac{1}{2} h_T[n-2] =$$
$$= \{\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2u[n-2]\}\cdot\tfrac{1}{2} + \{\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2u[n-3]\}\cdot\tfrac{1}{4}$$
$$+ \{\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2u[n-4]\}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + u[n-2]$$
$$+ \tfrac{1}{4}\delta[n-1] + \tfrac{1}{2}\delta[n-2] + \tfrac{1}{2}u[n-3] + \tfrac{1}{2}\delta[n-2] + \delta[n-3] + u[n-4] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\delta[n] + \tfrac{5}{4}\delta[n-1] + \delta[n-2] + u[n-2] + \tfrac{1}{2}u[n-3] + u[n-4] + \delta[n-3]$$
$$= \tfrac{1}{2}\delta[n] + \tfrac{5}{4}\delta[n-1] + \tfrac{1}{2}\delta[n-2] + u[n-2] + \tfrac{4}{2}u[n-2] + u[n-3] =$$
$$= \tfrac{5}{2}u[n] - 2\delta[n] - \tfrac{5}{4}\delta[n-1] - \tfrac{1}{2}\delta[n-2]$$