11. Să se determine care din următoarele semnale sunt periodice şi pentru cele care sunt să se determine perioada fundamentală:

a) $x[n] = \cos\left(\pi \frac{30}{105} n\right)$ b) $x[n] = \sin(3n)$

c) $x[n] = \sin\left(\pi \frac{62}{10} n\right)$ d) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$

e) $x[n] = \cos(0.01\pi n)$ f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

Obs. $x[n]$ este periodic dacă $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x[n+N] = x[n]$

Soluţie

a) $x[n+N] = \cos\left(\pi \frac{30}{105}(n+N)\right) = \cos\left(2\pi \frac{15}{105} n + 2\pi \frac{15}{105} N\right)$

Pentru ca $x[n+N] = x[n]$ trebuie ca $2\pi \frac{15}{105} N = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}^*$

$N = k \frac{105}{15} = 7k$ Perioada fundamentală este $N = 7$

b) $x[n+N] = \sin(3n + 3N) \qquad 3N = 2k\pi \quad N = k\frac{2\pi}{3} \quad N \notin \mathbb{N}^*$

Nu este periodic

c) $x[n] = \sin\left[\pi\left(\frac{60}{10} + \frac{2}{10}\right) n\right] = \sin\left[6\pi n + 2\pi \frac{1}{10} n\right] = \sin\left(2\pi \frac{1}{10} n\right)$

$N = 10$ Perioada fundamentală

d) $x[n] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n}{18} + \frac{\pi n}{8}\right) + \cos\left(\frac{n}{18} - \frac{\pi n}{8}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{18} + \frac{\pi}{8}\right)n + \cos\left(\frac{1}{18} - \frac{\pi}{8}\right)n\right]$ Nu este periodic; vezi b)

e) $x[n] = \cos(0.01\pi n) = \cos\left(2\pi \frac{1}{200} n\right) \qquad N = 200$ Per. fund.

f) $x[n] = \cos\left(2\pi \frac{1}{4} n\right) - \sin\left(2\pi \frac{1}{16} n\right) + 3\cos\left(2\pi \frac{1}{8} n + \frac{\pi}{3}\right)$

$N_1 = 4 \quad N_2 = 16 \quad N_3 = 8$

$N = \text{c.m.m.m.c}(N_1, N_2, N_3) = 16$ Perioada fundamentală

1.2. Fie semnalul: $x_a(t) = 3\sin(100\pi t)$

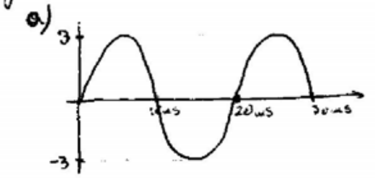
a) reprezentați $x_a(t)$ pentru $0 \le t \le 30\,ms$. $F_{S,min} = ?$

b) $x_a(t)$ se eșantionează cu $F_S = 300\,eș/s$. Determinați semnalul $x[n] = x_a(nT)$, $T = \frac{1}{F_S}$, și arătați că este periodic. Care este perioada semnalului discret? [redacted]

c) Să se calculeze valorile lui $x[n]$ dintr-o perioadă și să se reprezinte $x[n]$ pe același grafic cu $x_a(t)$.

d) Se poate găsi o frecvență de eșantionare astfel încât semnalul $x[n]$ să atingă valoarea maximă 3? Care este frecvența minimă pentru acest lucru?

a)



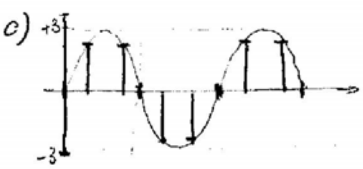
$x_a(t) = 3\sin(2\pi \cdot 50\, t)$

$T_S = \frac{1}{50} = 20\,ms$

$F_{Nyquist} = 2 \cdot 50\,Hz = 100\,Hz$

b) $x[n] = 3\sin\left(2\pi \frac{50}{300} n\right) = 3\sin\left(2\pi \frac{1}{6} n\right)$ $\quad N_p = 6$

c)



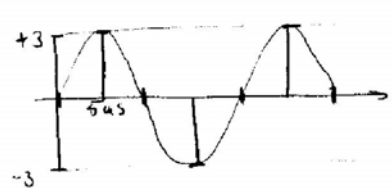
$x[0] = 0 \quad x[1] = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2{,}59$

$x[2] = 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2{,}59 \quad x[3] = 0$

$x[4] = 3\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2{,}59 \quad x[5] = -2{,}59$

d) $x_N[n] = 3\sin\left(2\pi \frac{50}{F_S} n\right)$ Pentru ca $x_N[n]$ să atingă valoarea 1 trebuie ca $2\pi \frac{50}{F_S} n = (2k+1)\frac{\pi}{2} n \Rightarrow F_S = 4(2k+1)50 \quad k \in \mathbb{Z}$

Ptr. $k = 0 \quad F_{S_{min}} = 200\,Hz$



1.3. Fie semnalul cauzal, modulat în amplitudine,

$x(t) = (1 + 0{,}5 \cos 1000\pi t) \cos 4000\pi t\, u(t)$

a) Să se determine frecvența de eșantionare minimă, necesară evitării erorii alias;

b) dacă semnalul se eșantionează la $F_s = 4000\,Hz$, să se determine semnalul discret în timp obținut după eșantionare;

d) ce semnal analogic se poate reface din semnalul discret $x[n]$, prin interpolare ideală?

S. a) $x(t) = [\cos 4000\pi t + 0{,}5 \cos(1000\pi t) \cos(4000\pi t)]\, u(t) =$

$= [\cos 4000\pi t + 0{,}25 \cos 3000\pi t + 0{,}25 \cos 5000\pi t]\, u(t) =$

$= [\cos 2\pi\, 2000 t + 0{,}25 \cos 2 \cdot 1500\pi t + 0{,}25 \cos 2\pi\, 2500 t]\, u(t)$

$F_{S_1} = 4000\,Hz \quad F_{S_2} = 3000\,Hz \quad F_{S_3} = 5000\,Hz \quad \Rightarrow \quad F_N = 5000\,Hz$

b) $x[n] = [\cos 2\pi \frac{2000}{4000} n + 0{,}25 \cos 2\pi \frac{1500}{4000} n + 0{,}25 \cos 2\pi \frac{2500}{4000} n]\, u[n] =$

$= [\cos 2\pi \frac{1}{2} n + 0{,}25 \cos 2\pi \frac{3}{8} n + 0{,}25 \cos 2\pi \frac{5}{8} n]\, u[n] =$

$= [\cos 2\pi \frac{1}{2} n + 0{,}25 \cos 2\pi \frac{3}{8} n + 0{,}25 \cos 2\pi \left(1 - \frac{3}{8}\right) n]\, u[n] =$

$= [\cos 2\pi \frac{1}{2} n + 0{,}5 \cos 2\pi \frac{3}{8} n]\, u[n] \qquad f_1 = \frac{1}{2};\ f_2 = \frac{3}{8} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

c) $X_r(t) = [\cos 2\pi \frac{1}{2} \cdot 4000 t + 0{,}5 \cos 2\pi \frac{3}{8} 4000 t]\, u(t) =$

$= [\cos 4000\pi t + 0{,}5 \cos 3000\pi t]\, u(t) \neq x(t)$

Deoarece $F_s < F_N = 5000\,Hz$

1.4. Semnalul discret $x[n] = 6.35 \cos \frac{\pi}{10} n$ este cuantizat cu o rezoluție:

a) $\Delta = 0.1$

b) $\Delta = 0.02$

Câți biți sunt necesari convertorului A/D în fiecare caz?

obs. $\Delta = \frac{X_{max} - X_{min}}{L - 1}$ L - nr. nivelelor de cuantizare

Soluție

$$L = \frac{X_{max} - X_{min}}{\Delta} + 1 \qquad L \leq 2^b \quad b\text{-nr. biți}$$

$X_{max} = +6.35$

$X_{min} = -6.35$

$$L = \frac{12,7}{\Delta} + 1$$

a) $L = \frac{12,7}{0,1} + 1 = 128$ $\qquad b = 7$ biți

b) $L = \frac{12,7}{0.02} = 640$ nivele $\qquad 640 < 2^{10} \qquad b = 10$ biți