1. Să se determine prin metoda Pade parametrii filtrului cu funcția de sistem:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

dacă răspunsul la impuls dorit este:

$$h_d\{n\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u\{n\}$$

<u>Soluție</u>:

Ecuația cu diferențe a sistemului este:

$$y\{n\} = -a_1 y\{n-1\} + b_0 x\{n\} + b_1 x\{n-1\}$$

dacă $x\{n\} = \delta\{n\}$ avem: $\forall\ n \geq 0$

$$h\{n\} = -a_1 h\{n-1\} + b_0 \delta\{n\} + b_1 \delta\{n-1\}$$

Pentru $n > 1$ ecuația anterioară se reduce la

$$h\{n\} = -a_1 h\{n-1\} \quad n > 1 \quad \text{sau} \quad h_d\{n\} = -a_1 h_d\{n-1\}$$

Pt. $n = 2$ $\quad h_d\{2\} = -a_1 h_d\{1\} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -a_1 2\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$$

Pentru $0 \leq n \leq 1$ avem:

$$h_d\{n\} = +\frac{1}{2} h_d\{n-1\} + b_0 \delta\{n\} + b_1 \delta\{n-1\}$$

Dacă: $n = 1$ $\quad h_d\{1\} = +\frac{1}{2} h_d\{0\} + b_1 \quad 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}2 + b_1 \Rightarrow b_1 = 0$

$n = 0$ $\quad h_d\{0\} = +\frac{1}{2} h_d\{-1\} + b_0 \quad 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = b_0 \Rightarrow b_0 = 2$

$$h_d\{-1\} = 0$$

$H(z) = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$ și este evident că originalul lui $H(z)$ este $2\left(\frac{1}{2}\right)^n u\{n\}$

2. Fie sistemul cauzal IIR cu funcția de sistem

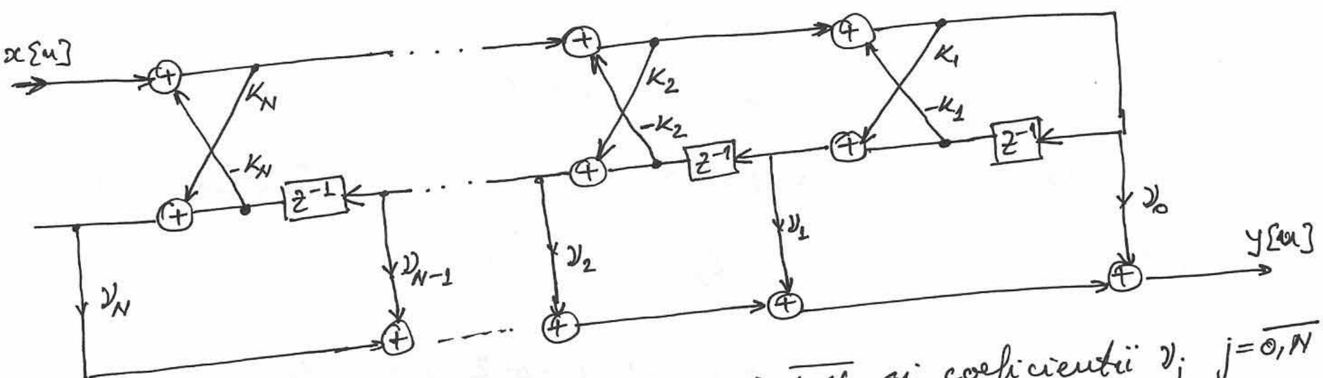
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{1 + 0{,}9 z^{-1} - 0{,}8 z^{-2} + 0{,}5 z^{-3}}$$

a) să se determine structura echivalentă lattice cu poli și cu zerouri;

b) să se descrie sistemul $H(z)$ în spațiul stărilor.

Soluție:

a) Structura lattice cu poli și zerouri are forma:



Trebuie determinați coeficienții k_i $i=\overline{1,N}$ și coeficienții v_j $j=\overline{0,N}$

Se dau relațiile:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \qquad K_m = \alpha_m(m)$$

$$A_m(z) = \alpha_m(0) + \alpha_m(1) z^{-1} + \ldots + \alpha_m(m) z^{-m}$$

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z) \qquad v_m = c_m(m)$$

$$C_m(z) = c_m(0) + c_m(1) z^{-1} + \ldots + c_m(m) z^{-m}$$

unde
$$A_N(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}$$
$$B_N(z) = z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + \ldots + a_N$$
$$C_M(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}$$

$N=3;\ M=3$

$\cancel{A_3(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} \quad B_3(z) =}$

$$A_3(z) = 1 + 0{,}9 z^{-1} - 0{,}8 z^{-2} + 0{,}5 z^{-3} \qquad B_3(z) = 0{,}5 - 0{,}8 z^{-1} + 0{,}9 z^{-2} + z^{-3}$$

$$\alpha_3(3) = 0{,}5 \Rightarrow k_3 = 0{,}5$$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - k_3 B_3(z)}{1 - k_3^2} = \frac{1 + 0{,}9 z^{-1} - 0{,}8 z^{-2} + 0{,}5 z^{-3} - 0{,}5(0{,}5 - 0{,}8 z^{-1} + 0{,}9 z^{-2} + z^{-3})}{1 - 0{,}25}$$

$$= \frac{0,75 + 1,3\, z^{-1} - 1,25\, z^{-2}}{0,75} = 1 + \frac{26}{5} z^{-1} - \frac{5}{3} z^{-2} \qquad k_2 = \alpha_2(2) = -\frac{5}{3}$$

$$B_2(z) = -\frac{5}{3} + \frac{26}{5} z^{-1} + z^{-2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - k_2 B_2(z)}{1 - k_2^2} = \frac{1 + \frac{26}{5} z^{-1} - \frac{5}{3} z^{-2} + \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{3} + \frac{26}{15} z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \frac{25}{9}}$$

$$= \frac{-\frac{16}{9} + \frac{26 \cdot 8}{15 \cdot 3} z^{-1}}{-\frac{16}{9}} = 1 - \frac{13}{5} z^{-1} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \alpha_1(1) = -\frac{13}{5}$$

$$B_1(z) = -\frac{13}{5} + z^{-1}$$

$$C_3(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} \qquad \nu_3 = c_3(3) = 2$$

$$C_2(z) = C_3(z) - \nu_3 B_3(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2\left(0,5 - 0,8 z^{-1} + 0,9 z^{-2} + z^{-3}\right)$$

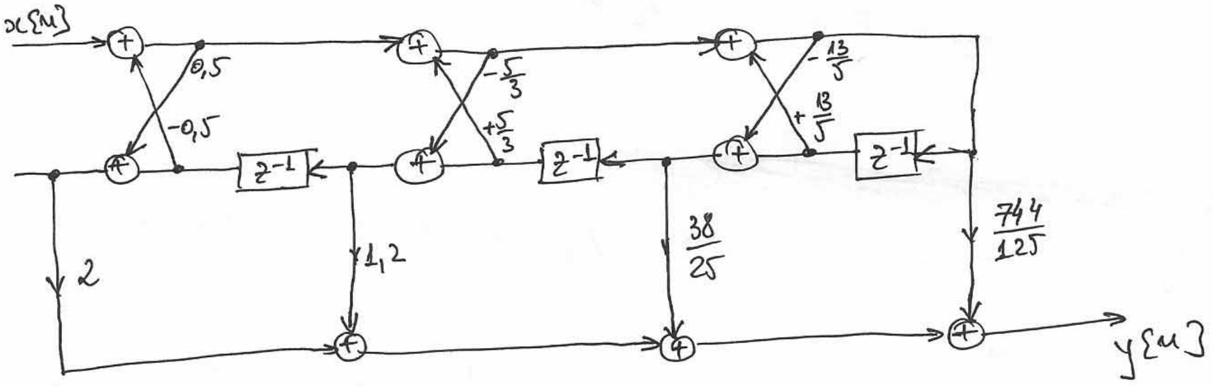
$$= 3,6\, z^{-1} + 1,2\, z^{-2} \qquad \nu_2 = c_2(2) = 1,2$$

$$C_1(z) = C_2(z) - \nu_2 B_2(z) = 3,6 z^{-1} + 1,2 z^{-2} - 1,2\left(-\frac{5}{3} + \frac{26}{15} z^{-1} + z^{-2}\right) =$$

$$= 2 + \frac{38}{25} z^{-1} \qquad \nu_1 = c_1(1) = \frac{38}{25}$$

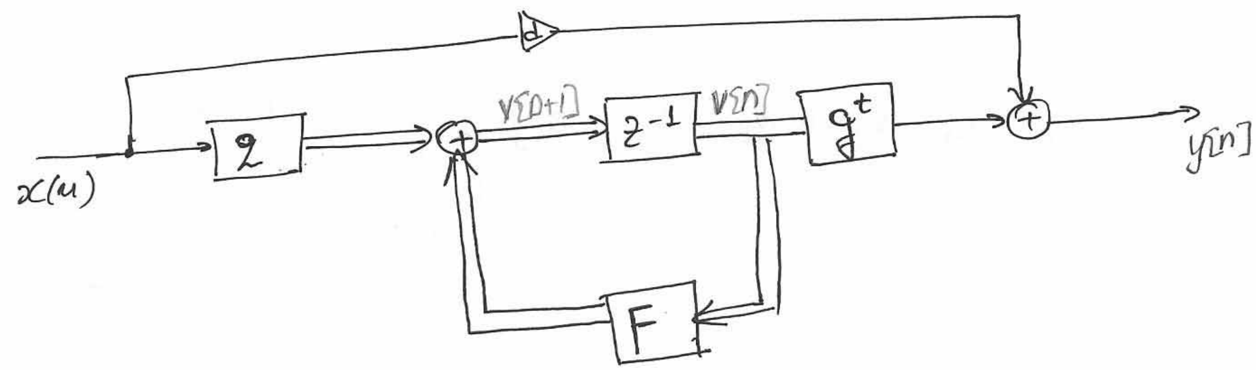
$$C_0(z) = C_1(z) - \nu_1 B_1(z) = 2 + \frac{38}{25} z^{-1} - \frac{38}{25}\left(-\frac{13}{5} + z^{-1}\right) = \frac{744}{125}$$

$$\nu_0 = c_0(0) = \frac{744}{125}$$



b) Ecuațiile de stare sunt de forma:

$$\begin{cases} \mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\,\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}\,x[n] & \to \text{ecuația de stare} \\ y(n) = \mathbf{g}^t\,\mathbf{v}(n) + d\,x(n) & \to \text{ecuația de ieșire} \end{cases}$$



Pentru un sistem descris de ecuația cu diferențe:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-1] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

~~matricile~~ F, q, g și d sunt:

Tipul 1:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & & & \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

Tipul 2:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

$b_0 = 1 \quad b_1 = 2 \quad b_2 = 3 \quad b_3 = 2$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 0{,}9 \quad a_2 = -0{,}8 \quad a_3 = 0{,}5$

astfel că ecuațiile de stare devin:

Tipul 1

$$\begin{bmatrix} V_1(n+1) \\ V_2(n+1) \\ V_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(n) \\ V_2(n) \\ V_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} b_3 - b_0 a_3 & b_2 - b_0 a_2 & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(n) \\ V_2(n) \\ V_3(n) \end{bmatrix} + b_0\, x(n)$$

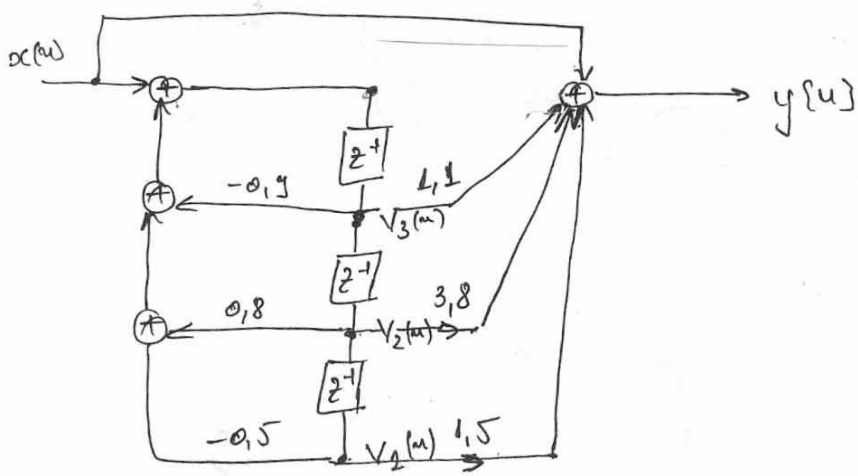
$$V_1(n+1) = V_2(n)$$

$$V_2(n+1) = V_3(n)$$

$$V_3(n+1) = -0{,}5\, V_1(n) + 0{,}8\, V_2(n) - 0{,}9\, V_3(n) + x(n)$$

$$y[n] = 1{,}5\, V_1(n) + 3{,}8\, V_2(n) + 1{,}1\, V_3(n) + x(n)$$

Astfel se poate desena o implementare a ecuațiilor de mai sus:



Tipul 2

– 4 –

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ v_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 - b_0 a_3 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} x[n]$$

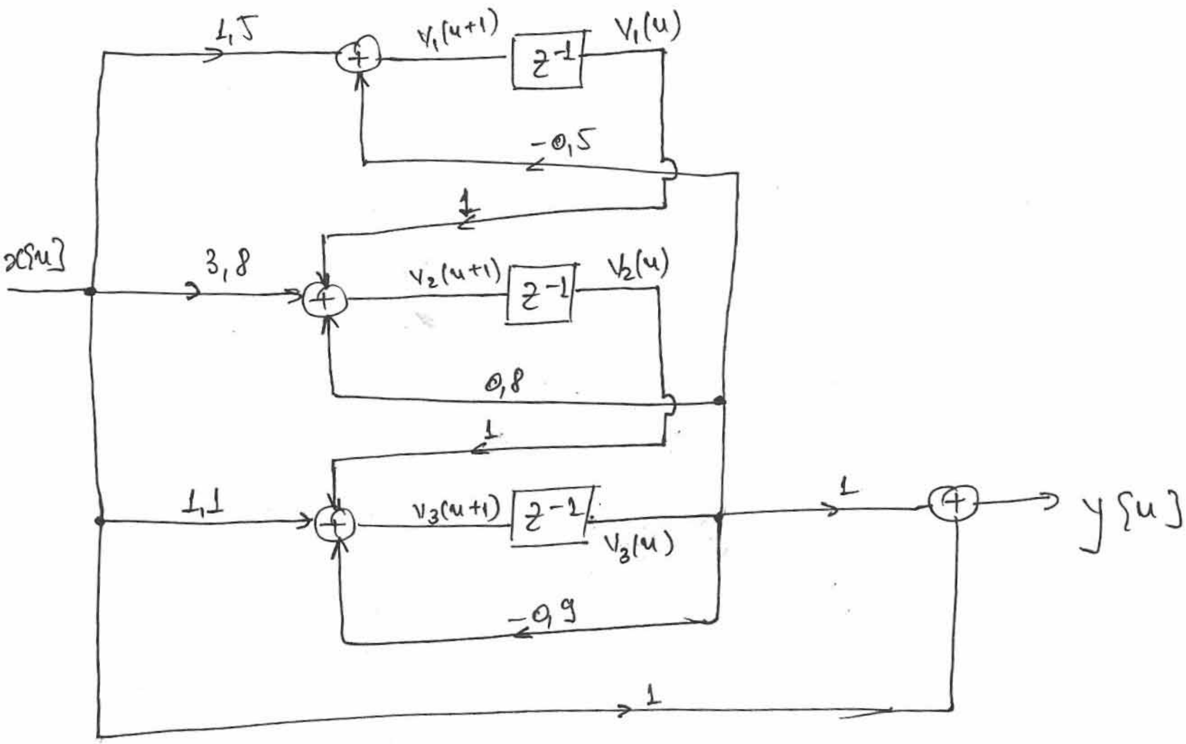
$$y(n) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n)$$

$$v_1(n+1) = -0{,}5\, v_3(n) + 1{,}5\, x(n)$$

$$v_2(n+1) = v_1(n) + 0{,}8\, v_3(n) + 3{,}8\, x(n)$$

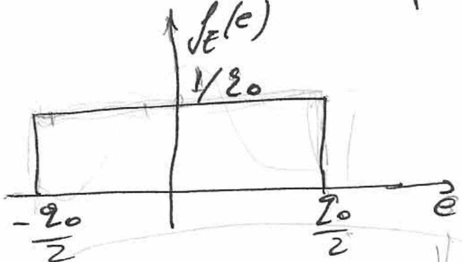
$$v_3(n+1) = v_2(n) - 0{,}9\, v_3(n) + 1{,}1\, x(n)$$

$$y(n) = v_3(n) + x(n)$$



2. Valorile medii ale erorii de cuantizare la:

→ cuantizarea prin rotunjire



$f_E(e)$ → densitatea de probabilitate a erorii

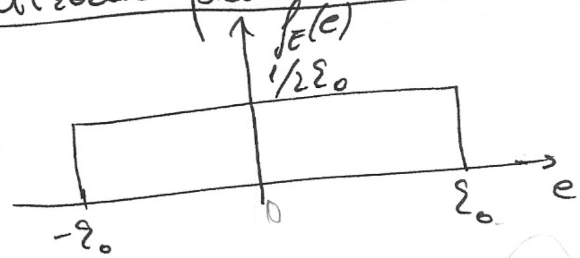
$$m_E = \int_{-\infty}^{\infty} e\, f_E(e)\, de \qquad \sigma_E^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e - m_E)^2 f_E(e)\, de$$

$$m_E = \int_{-\frac{\xi_0}{2}}^{\frac{\xi_0}{2}} e\, f_E(e)\, de = \frac{1}{\xi_0}\, \frac{e^2}{2}\Big|_{-\frac{\xi_0}{2}}^{\frac{\xi_0}{2}} = 0$$

$$\sigma_E^2 = \int_{-\frac{\xi_0}{2}}^{\frac{\xi_0}{2}} e^2 f_E(e) = \frac{1}{\xi_0}\, \frac{e^3}{3}\Big|_{-\frac{\xi_0}{2}}^{\frac{\xi_0}{2}} = \frac{1}{\xi_0}\left(\frac{1}{3}\frac{\xi_0^3}{8} + \frac{1}{3}\frac{\xi_0^3}{8}\right) = \frac{\xi_0^2}{12}$$

→ cuantizarea prin trunchiere

dacă nu se cunoaște semnul

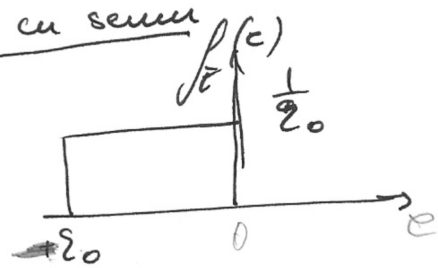


$m_E = 0$

$$\sigma_E^2 = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^2 f_E(e) = \frac{1}{2\xi_0}\, \frac{e^3}{3}\Big|_{-\xi_0}^{\xi_0} = \frac{\xi_0^2}{3}$$

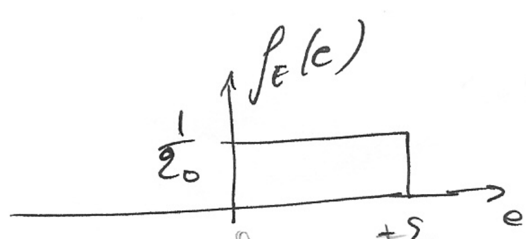
→ trunchierea cu semn

pt. semnul +



$$m_E = -\frac{\xi_0}{2} \qquad \sigma_E^2 = \frac{\xi_0^2}{12}$$

pt. semnul −



$$m_E = +\frac{\xi_0}{2} \qquad \sigma_E^2 = \frac{\xi_0^2}{12}$$

1. Reprezentarea binară a numerelor

- Reprezentarea în virgulă fixă

$$N = \sum_{i=n_1}^{n_2} b_i 2^i = b_{n_2} 2^{n_2} + b_{n_2-1} 2^{n_2-1} + \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0 + b_{-1} 2^{-1} + \dots + b_{n_1} 2^{n_1}$$

$n_1 < 0$

Exemplu: 11,75 ⟶ 1011,11

	Magnitudine cu semn	Offset binar	Complement față de doi	Complement față de unu
7	0111	1111	0111	0111
6	0110	1110	0110	0110
5	0101	1101	0101	0101
4	0100	1100	0100	0100
3	0011	1011	0011	0011
2	0010	1010	0010	0010
1	0001	1001	0001	0001
0	0000	1000	0000	0000
0	1000	1000	0000	1111
-1	1001	0111	1111	1110
-2	1010	0110	1110	1101
-3	1011	0101	1101	1100
-4	1100	0100	1100	1011
-5	1101	0011	1011	1010
-6	1110	0010	1010	1001
-7	1111	0001	1001	1000

Exemple de reprezentări:

→ Magnitudine cu semn

0.4375 → 0.01110   -0,4375 ⟷ 1,01110

→ Complement față de doi:

0.4375 ⟷ 0.01110   -0.4375 ⟷ 1.10001 + 0.00001 = 1.10010

→ Complement față de unu

0.4375 → 0.01110   -0.4375 ⟷ 1.10001

Operații matematice în diverse reprezentări

Mărime cu semn:

- <u>Adunare</u>

$$\begin{array}{r} 0.6875 \\ 0.1250 \\ \hline 0.8125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.1011 \; + \\ 0.0010 \\ \hline 0.1101 \end{array}$$

- Scădere: complicată – nu se utilizează

- Multiplicare

$0.6875 \times 0,1250 = 0,08590750$

```
         0.1011
         0.0010
         ------
           0000
         1011
        0000
     0|0000
     ------------
    0,0 0 0 1 0 1 1 0   <-->  0.0859075
```

Complement față de doi

- Adunare: similar cu mărime cu semn
- Scădere

```
  0.6875        0.1011 +        - 0.1250
 -0.1250        1.1110           0.0010
 -------        ------           1.1101 +
  0.5625        0.1001           0.0001
                                 ------
                0.5625           1.1110

  0.1250        0.0010 +        - 0.6875
 -0.6875        1.0101           0.1011
 -------        ------
 -0.5625        1.0111           1.0100 +
                                 0.0001
               -0.5625           ------
                                 1.0101
```

- Multiplicare: nu se utilizează

Complement față de unu

- Adunare + Scădere

```
  0.3125        0.0101 +
  0.7500        0.1100
  ------        ------
  1.0625        1.0001 +   -> rezultat eronat
 -0.6250        1.0101
  ------        ------
  0.4375       10.0110
```

-> Multiplicare: nu se utilizează

Să se scrie următoarele numere zecimale în formă binară:

a) 514 b) 15,21875

a)

:2	
514	0
257	1
128	0
64	0
32	0
16	0
8	0
4	0
2	0
1	1

$514 \Leftrightarrow 1000000010$

b) $15 \rightarrow 1111$

$0,21875 \times 2 = 0,43750$ → 0

$0,43750 \times 2 = 0,87500$ → 0

$0,87500 \times 2 = 1,75000$ → 1

$0,75 \times 2 = 1,5$ → 1

$0,5 \times 2 = 1,0$ → 1

$1111,00111000$

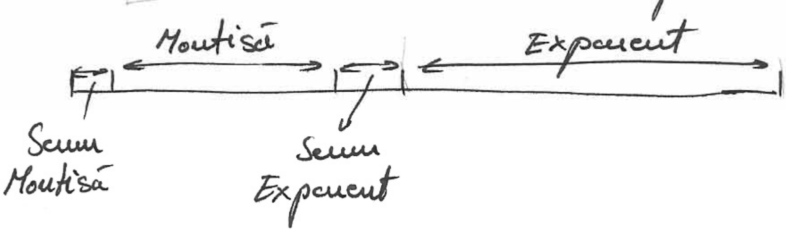
Reprezentarea în virgulă mobilă

$$N = M \times 2^{E}$$

M - mantisă

E - exponent

$\frac{1}{2} \le |M| < 1$



Adunarea:

$$V_1 = M_1 \times 2^{E_1}$$

$$V_2 = M_2 \times 2^{E_2}$$

$$E_1 = E_2$$

$$V_1 + V_2 = (M_1 + M_2) \times 2^{E_1}$$

Scăderea:

$$V_1 - V_2 = (M_1 - M_2) \times 2^{E_2}$$

Multiplicarea

$V_1 V_2 = M_1 M_2 \times 2^{E_1+E_2}$

Împărțirea

$V_1 / V_2 = M_1 / M_2 \times 2^{E_1-E_2}$

Exemple:

$0.006875 \Leftrightarrow 0.1011 \times 2^{1010}$

$0.0125 \Leftrightarrow 0.0010 \times 2^{1000} \Leftrightarrow 0.1000 \times 2^{1010}$

Tipuri de cuantizare:

→ trunchiere: numărul se aproximează cu cel mai apropiat nivel de cuantizare care nu este mai mare decât numărul

→ trunchiere cu semn: pt. semnale pozitive ca la trunchiere iar pentru semnale negative cu cel mai apropiat nivel care nu este mai

→ rotunjire: numărul se aproximează cu cel mai apropiat nivel de cuantizare

P. Să se cuantizeze eșantionul de valoare 0,42625 pe 4 biți prin cele 3 metode:

0,42625 ⇔ 0,010110

→ Trunchiere $\underline{0,0101}|10 \rightarrow 0,0101$

→ Rotunjire 0,010110 → 0,0110 cea mai apropiată valoare

Fie sistemul cu ecuația cu diferențe:

$$y[n] = \frac{1}{2}\, y[n-1] + x[n]$$

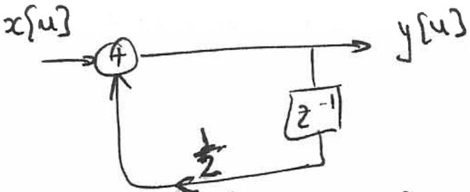
a) Calculați răspunsul la semnalul $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ considerând calculele cu precizie infinită;

b) Calculați răspunsul sistemului pentru primele 6 eșantioane din $y[n]$ $(0 \le n \le 5)$ presupunând precizia de calcul finită (un bit de semn și 4 biți fracționari). Cuantizarea se face prin trunchiere și prin rotunjire.

c) Comparați rezultatele obținute la punctele a) și b).

a) $H(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\quad X(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ $\quad Y(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} =$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow y[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$



- prin trunchiere se elimină restul biților exceptând cei 4 din partea fracționară (Ex: $0,1101\underline{110}$ pe 4 biți $\Rightarrow 0,1101$).
- prin rotunjire se aduce la nivelul de cuantizare reprezentat pe 4 biți fracționari cel mai apropiat de numărul ce trebuie cuantizat $\Rightarrow \boxed{0,1110}$ ~~00~~).

(Ex: $0,1101110$ pe 4 biți $\Rightarrow 0,1100$)

(Ex: $0,1011100$ pe 4 biți $\Rightarrow 0,1011$

Ex: $0,1011010$

Trunchiere:

$n=0$ $\quad y[0] = 0,0000 + 0,1111 = 0,1111$

$n=1$ $\quad y[1] = 0,0111 + 0,0100 = 0,1011$

$$\begin{array}{r} 0,1111 \times \\ 0,1000 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1111 \\ \hline 0,0111\,|\,1000 \end{array} \text{ trunchiere}$$

$$\begin{array}{r} 0,0111 + \\ 0,0100 \\ \hline 0,1011 \end{array}$$

n	x[n] prec. inf.	y[n] prec. inf	x[n] prec. finită T	y[n] prec. finită T	y[n] prec. finită R	
0	1	1	0,1111	0,1111	0,1111	15/16
1	1/4	3/4	0,0100	0,1011 11/16	0,1100	12/16
2	1/16	7/16	0,0001	0,0110 6/16	0,0111	7/16
3	1/64	15/64	0,0000	0,0011 3/16	0,0100	4/16
4	1/256	31/256	0,0000	0,0001 1/16	0,0010	2/16
5	1/1024	63/1024	0,0000	0,0000 0/16	0,0001	1/16
6					0,0001	1/16

$n=2 \quad y[2] = 0,0101\boxed{\cancel{1}} + 0,0001 = 0,0110$

$n=3 \quad y[3] = 0,0011 + 0,0000 = 0,0011$

$n=4 \quad y[4] = 0,0001\boxed{\cancel{1}} + 0,0000 = 0,0001$

$n=5 \quad y[5] = 0,0000\boxed{\cancel{1}} + 0,0000 = 0,0000$

<u>Rotunjire</u>

$n=0 \quad y[0] = 0,1111$

$n=1 \quad y[1] = 0,01111$ (Rotunjire $\Rightarrow$ 0,1000) $+ 0,0100 = 0,1100$

$n=2 \quad y[2] = 0,01100$ (Rotunjire $\Rightarrow$ 0,0110) $+ 0,0001 = 0,0111$

$n=3 \quad y[3] = 0,0011\cancel{1}$ (Rotunjire $\Rightarrow$ 0,0100) $+ 0,0000 = 0,0100$

$n=4 \quad y[4] = 0,0010 + 0,0000 = 0,0010$

$n=5 \quad y[5] = 0,0001 + 0,0000 = 0,0001$

$n=6 \quad y[6] = 0,0000\boxed{1}$ (Rotunjire $\Rightarrow$ 0,0001) $+ 0,0000 = 0,0001$

3. Se consideră sistemul descris de ecuația cu diferențe:

$$y[n] = a\,y[n-1] + x[n] \qquad -0{,}5 \le x[n] \le 0{,}5 \qquad a = 0.999$$

Semnalul de intrare este cuantizat pe 8 biți. Care este puterea produsă de zgomotul de cuantizare la ieșirea filtrului?

$b = 8$

$$\sigma_{out}^2 = \sigma_{in}^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega = \sigma_{in}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(n)$$

$$\sigma_{in}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \qquad \Delta = \frac{0{,}5-(-0{,}5)}{2^b} = 2^{-b} \qquad \sigma_{in}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}$$

la curs

$$\sigma_{out}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(n) \qquad h(n) = a^n u[n]$$

$$\sigma_{out}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}\sum_{k=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{2^{-2b}}{12(1-a^2)}$$

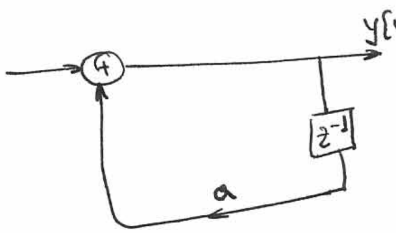
$b = 8 \quad a = 0.999 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{out_1}^2 \approx \dfrac{2^{-9}}{3} = \dfrac{2^{-2b}}{12}\cdot 500 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{out_1}^2 \gg \sigma_{out_2}^2$

Dacă $a = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{out_2}^2 \approx \dfrac{2^{-2b}}{12}\cdot\dfrac{4}{3}$

4. Să se studieze oscilațiile de tip ciclu-limită dintr-un sistem recursiv descris de ecuația cu diferențe:

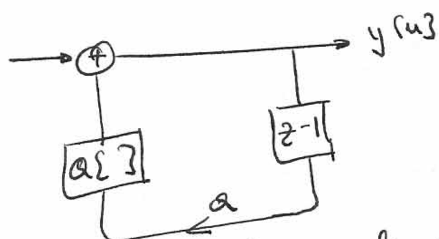
$$y[n] = a\,y[n-1] + x[n]$$

sistemul ideal



Sistem liniar

Sistemul real



sistem neliniar

	$a = \frac{1}{2}$, $a = 0.1000$			$a = -\frac{1}{2}$, $a = 1.1000$			$a = 0,1100$, $a = \frac{3}{4}$			$a = 1,1100$, $a = -3/4$	
	Precizie infinită	Precizie finită		Precizie infinită	Precizie finită		Precizie infinită	Precizie finită		P. inf.	P. finită
0	1	0.1111	$\frac{15}{16}$	1	0.1111	$\frac{15}{16}$	1	0.1111	$\frac{15}{16}$	1	0.1111
1	1/2	0.1000	$\frac{8}{16}$	-1/2	1.1000	$-\frac{8}{16}$	+3/4	0.1011	$\frac{11}{16}$	-3/4	1.1011
2	1/4	0.0100	$\frac{4}{16}$	1/4	0.0100	$\frac{4}{16}$	+9/16	0.1000	$\frac{8}{16}$	9/16	0.1000
3	1/8	0.0010	$\frac{2}{16}$	-1/8	1.0010	$-\frac{2}{16}$	+27/64	0.0110	$\frac{6}{16}$	-27/64	1.0110
4	1/16	0.0001	$\frac{1}{16}$	1/16	0.0001	$\frac{1}{16}$	81/256	0.0101	$\frac{5}{16}$	81/256	0.0101
5	1/32	0.0001	$\frac{1}{16}$	-1/32	1.0001	$-\frac{1}{16}$	+243/1024	0.0100	$\frac{4}{16}$	-243/1024	1.0100
6	1/64	0.0001	$\frac{1}{16}$	1/64	0.0001	$\frac{1}{16}$	729/4096	0.0011	$\frac{3}{16}$	729/4096	0.0011
7	1/128	0.0001	$\frac{1}{16}$	-1/128	1.0001	$-\frac{1}{16}$	+1123/8413	0.0010	$\frac{2}{16}$	-1123/8413	1.0010
8	1/256	0.0001	$\frac{1}{16}$	1/256	0.0001	$\frac{1}{16}$	266/2657	0.0010	$\frac{2}{16}$		0.0010

$a = \frac{1}{4}$

$a = 0,0100$

Precizie infinită	Precizie finită	
1	0.1111	15/16
1/4	0.0100	4/16
1/16	0.0001	1/16
1/64	0.0000	0/16
1/256	0.0000	0/16
1/1024	0.0000	0/16
1/4096	0.0000	0/16
	0.0000	0/16

2. Se dă sistemul descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] = a\,y[n-1] - a\,x[n] + x[n-1] \qquad a = \frac{7}{32}$$

a) Arătați că este trece-tot;

b) Obțineți forma directă II a sistemului;

c) Dacă cuantizați coeficienții sistemului de la punctul (b) mai este trece tot? Trunchierea se face pe 4 biți fracționari

d) Obțineți o realizare prin rescrierea ecuației cu diferențe sub forma: $y[n] = a\left(y[n-1] - x[n]\right) + x(n-1)$

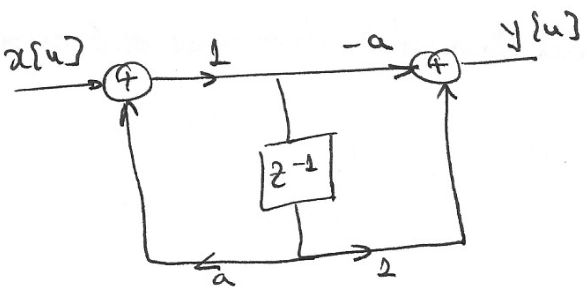
e) Dacă acum cuantizați coeficienții sistemului de la punctul (d), mai este trece-tot?

a) $H(z) = \dfrac{-a + z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$ $\quad H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{-a + e^{-j\omega}}{1 - a e^{-j\omega}} = \dfrac{\cos\omega - a - j\sin\omega}{1 - a\cos\omega + aj\sin\omega}$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\cos\omega - a)^2 + \sin^2\omega}}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} = \frac{\sqrt{\cos^2\omega - 2a\cos\omega + a^2 + \sin^2\omega}}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}} = 1 \Rightarrow \text{Filtru trece tot}$$

b)



c) Cele 3 metode de cuantizare

- rotunjire - valoarea este aproximată prin cel mai apropiat nivel de cuantizare (Ex: $1{,}8 \to 2 \quad -1{,}8 \to -2$).

- trunchiere - semnalul este aproximat printr-un nivel de cuantizare apropiat ce nu este mai mare decât semnalul

Ex: $\left(1{,}8 \to 1 \quad -1{,}8 \to -2\right)$

- trunchiere cu semn – pentru semnale pozitive, la fel ca trunchierea, iar valorile negative sunt aproximate de cel mai apropiat nivel de cuantizare ce nu este mai mic decât semnalul (Ex: $1{,}8 \to 1$ $-1{,}8 \to -1$)

În sistem sunt 2 coeficienți $\underline{a}$ și $\underline{-a}$. Dacă folosim cuantizarea prin trunchiere avem:

$a = \frac{7}{32} \to 0{,}0011\boxed{1}$

$-a = -\frac{7}{32} \to 1{,}1100\boxed{0}$

Trunchiere pe 4 biți

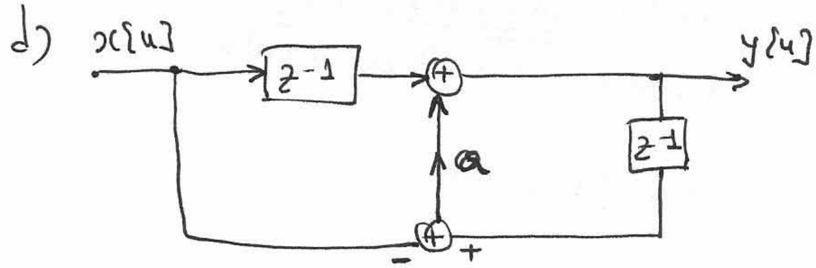
$a = 0{,}0011 \to \frac{6}{32}$

$-a = 1{,}1100 \to -\frac{7}{32}$

În acest caz sistemul nu mai este trece-tot.

În celelalte două cazuri de cuantizare (rotunjire, trunchiere cu semn) sistemul rămâne trece-tot.

d)



e) Sistemul este întotdeauna trece-tot deoarece este cuantizată o singură valoarea $\underline{a}$.

1. Un filtru digital de ordinul doi are doi poli reali la p_1 și p_2 și este implementat în forma directă

a) Din expresia generală determinați o expresie de variație a polilor datorită variației coeficienților corespunzători ecuației cu diferențe, ca urmare a cuantizării acestora.

b) Dacă valorile sunt $p_1 = 0.98$, $p_2 = 0.94$ care este numărul minim de biți necesar pentru ca filtrul să nu devină instabil datorită cuantizării coeficienților? Se consideră cuantizarea prin rotunjire

a) formula generală: $\Delta p_m = \sum_{l=1}^{n} \frac{p_m^{n-l}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{n}(p_m - p_i)} \Delta A_l$; $\frac{\partial p_m}{\partial A_l} = \frac{p_m^{n-l}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}(p_m - p_i)}$

n - nr. de poli $l = 1, 2 \dots n$ $m = 1, 2 \dots n$

$$\Delta p_m = \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial p_m}{\partial A_l} \Delta A_l \quad — \quad \Delta p_1 = \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial p_1}{\partial A_l} \Delta A_l = \frac{\partial p_1}{\partial A_1} \Delta A_1 + \frac{\partial p_1}{\partial A_2} \Delta A_2$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A_1} = \frac{p_1^{2-1}}{p_1 - p_2} \quad ; \quad \frac{\partial p_1}{\partial A_2} = \frac{p_1^{2-2}}{p_1 - p_2} \quad ;$$

* $$\Delta p_1 = \frac{1}{p_1 - p_2}\left(p_1 \Delta A_1 + \Delta A_2\right)$$

* $$\Delta p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial A_1} \Delta A_1 + \frac{\partial p_2}{\partial A_2} \Delta A_2 = \frac{1}{p_2 - p_1}\left[p_2 \Delta A_1 + \Delta A_2\right]$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial A_1} = \frac{p_2^{2-1}}{p_2 - p_1} \quad ; \quad \frac{\partial p_2}{\partial A_2} = \frac{p_2^{2-2}}{p_2 - p_1}$$

b) $D(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) = 1 - A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} \Rightarrow A_1 = p_1 + p_2$
$A_2 = p_1 p_2$

$-2 < A_1 < 2$
$-1 < A_2 < 1$ deoarece $-1 < p_{1,2} < 1$

Pentru a cuantiza pe N biți ambii coeficienți pasul de cuantizare va fi pentru :

$$- \quad A_1 \quad q_0 = \frac{2-(-2)}{2^N} = \frac{4}{2^N} \Rightarrow \Delta A_1 \leq \frac{q_0}{2} \Rightarrow \Delta A_1 \leq \frac{2}{2^N}$$

$$- \quad A_2 \quad q_0 = \frac{1-(-1)}{2^N} = \frac{2}{2^N} \Rightarrow \Delta A_2 \leq \frac{q_0}{2} \Rightarrow \Delta A_2 \leq \frac{1}{2^N}$$

Variațiile maxime ale polilor pot fi :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{0.98-0.94}\left[(0.98)\cdot\frac{2}{2^N} + \frac{1}{2^N}\right] = \frac{74}{2^N}$$

$$\Delta p_2 = \frac{1}{0.94-0.98}\left[(0.94)\frac{2}{2^N} + \frac{1}{2^N}\right] = -\frac{72}{2^N}$$

p_1 este polul cel mai apropiat de cercul unitate, așa încât este posibil să iasă primul în afara cercului

$1-p_1 = 0.02 > \Delta p_1$ condiția ca sistemul să rămână stabil și după cuantizare

$\frac{74}{2^N} < 0.02 \qquad 2^N > 3700 \qquad N \geq 12$ biți

Pentru a ne asigura de stabilitatea sistemului și după cuantizare trebuie să realizăm cuantizarea pe cel puțin 12 biți.

-1-

Se consideră sistemul

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

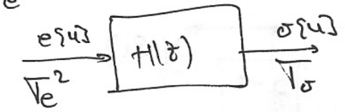
a) Să se desenează implementările

- forma directă II sau canonică
- cele 4 realizări posibile în cascadă în care unul din filtrele implementate să aibă un pol și un zerou
- realizarea paralel

b) Se presupune că filtrul este implementat în virgulă fixă, folosind aritmetica fracționară mărime cu semn pe b+1 biți (din care unul pentru semn). Fiecare produs rezultat este rotunjit la b biți. Să se determine dispersia zgomotului de rotunjire datorat multiplicărilor la ieșirea fiecărei secțiuni de la punctul a.

a,b)

Dacă în intrarea unui sistem avem un semnal de tip zgomot alb cu varianța σ_e^2



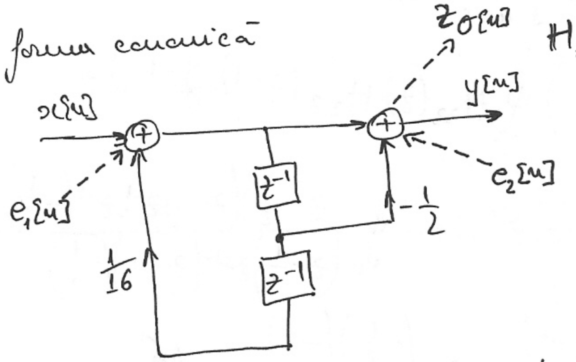
La ieșire, varianța semnalului rezultat va fi:

$$\sigma_o^2=\sigma_e^2\sum_{-\infty}^{\infty}h^2[n]=\sigma_e^2\oint_c H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz=$$

$=\sigma_e^2\sum$ reziduurile lui $H(z)H(z^{-1})z^{-1}$ la polii din interiorul cercului unitate ai expresiei din integrală

1) forma canonică

$$H_1(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{16}z^{-2}}$$



Zgomotul la ieșirea întregii secțiuni datorat erorilor la multiplicare $e_1[n]$ și $e_2[n]$ este:

$$\sigma_{e_1}^2=\sigma_{e_2}^2=\sigma_e^2$$

$$\sigma_{zo_1}^2=\sigma_{e_1}^2\oint_c H_1(z)H_1(z^{-1})z^{-1}dz+\sigma_{e_2}^2$$

$$\oint_c H_1(z)\, H_1(z^{-1})\, z^{-1} dz = \oint_c \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right) z^{-1} \, dz}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{4}z\right)} =$$

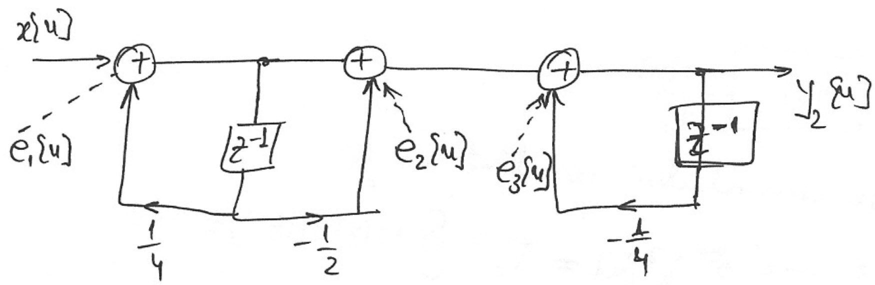
$$= \oint \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cancel{z^{-1}}\left(z-2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cancel{z^{-1}} \, dz}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\cancel{z^{-1}}\left(z+\frac{1}{4}\right)\cancel{z^{-1}}\left(z-4\right)\left(z+4\right)\left(-\frac{1}{16}\right)} = 8 \oint \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right) dz}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-4\right)\left(z+4\right)} =$$

$$8\left[\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)} \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right)}{\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-4\right)\left(z+4\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} + \cancel{\left(z+\frac{1}{4}\right)} \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\cancel{\left(z+\frac{1}{4}\right)}\left(z-4\right)\left(z+4\right)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{4}}\right] =$$

$$= 8\left[\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)\left(\frac{1}{4}+4\right)} + \frac{\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-4\right)\left(-\frac{1}{4}+4\right)}\right] = 8\left[\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)}{\frac{1}{2}\left(-\frac{15}{4}\right)\frac{17}{4}} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{17}{4}\right)\left(\frac{15}{4}\right)}\right] =$$

$$= 8\left[\frac{2\cdot 27}{17\cdot 15} - \frac{2\cdot 7}{17\cdot 15}\right] = \frac{64}{51} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{oz_1}^2 = \sigma_e^2 \frac{64}{51}$$

2)



$$H_2(z) = H_{21}(z)\cdot H_{22}(z) \qquad H_{21}(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad H_{22}(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\sigma_{z_{o_2}}^2 = \left[\sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_{21}^2[k] + \sigma_e^2 + \sigma_e^2\right] \sum_{k=0}^{\infty} h_{22}^2[k] =$$

$$= \sigma_e^2\left(\oint_c H_{21}(z)\, H_{21}(z^{-1})\, z^{-1} dz + 2\right) \oint_c H_{22}(z)\, H_{22}(z^{-1})\, z^{-1} dz$$

$$\oint_c H_{21}(z) H_{21}(z^{-1}) dz = \oint_c \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z\right)} z^{-1} dz = \oint_c \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right) z^{-1}\cancel{z^{-1}}\left(-\frac{1}{2}\right) dz}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\cancel{z^{-1}}\left(z-4\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} =$$

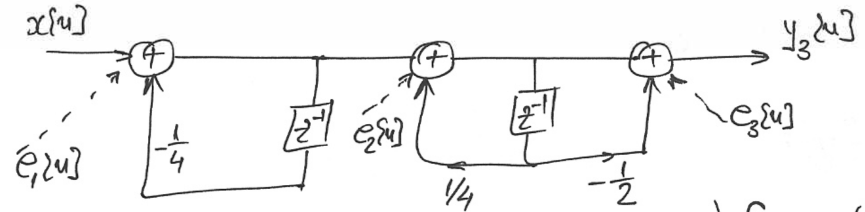
$$= 2\oint_c \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-2\right)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-4\right) z} = 2\,\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{\left(\frac{1}{4}-4\right)\left(\frac{1}{4}\right)} + 2\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2\right)}{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-4\right)} = \frac{16}{15}$$

$z=\frac{1}{4},\ z=0$

$H_{22}(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$ $\quad h_{22}[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$

$$\sigma_{z_{o_2}}^2 = \sigma_e^2\left(\frac{16}{15}+2\right)\frac{16}{15} = \frac{736}{225}\sigma_e^2$$

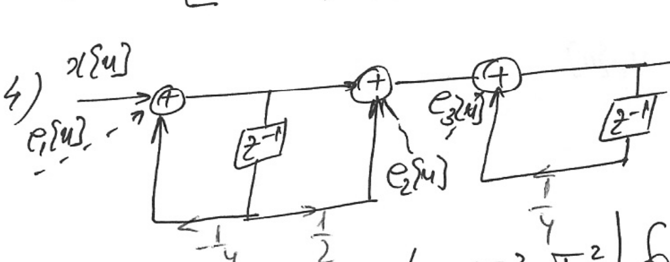
3) $H_3(z) = H_{22}(z)\cdot H_{21}(z)$



$$\sigma_{z_{o_3}}^2 = \left\{\left(\sigma_e^2 \oint H_{22}(z)\cdot H_{22}(z^{-1})z^{-1}dz + \sigma_e^2\right)\oint_C H_{21}(z)H_{21}(z^{-1})z^{-1}dz\right\} + \sigma_e^2$$

$$\sigma_{z_{o_3}}^2 = \sigma_e\left[\left(\frac{16}{15}+1\right)\frac{16}{15}+1\right] = \frac{721}{225} < \sigma_{z_{o_2}}^2$$

4)



$$H_4(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = H_{41}(z)H_{42}(z)$$

$$\sigma_{z_{o_4}}^2 = \left(\sigma_e^2\oint_C H_{41}(z)H_{41}(z^{-1})z^{-1}dz + \sigma_e^2 + \sigma_e^2\right)\oint_C H_{42}(z)H_{42}(z^{-1})z^{-1}dz$$

$$\oint H_{41}(z)H_{41}(z^{-1})z^{-1}dz = \oint_C \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\,\frac{1-\frac{1}{2}z}{1+\frac{1}{4}z}\,z^{-1}dz = \oint_C \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(z+\frac{1}{4}\right)(z+4)\left(\frac{1}{4}\right)z}dz =$$

$$= -2\oint_C \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}{\left(z+\frac{1}{4}\right)(z+4)z}dz = -2\left\{\frac{\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{\left(-\frac{1}{4}+4\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)}{\frac{1}{4}\cdot 4}\right\} = \frac{8}{5}$$

$$\oint_C H_{42}(z)H_{42}(z^{-1})z^{-1}dz = \sum_{n=0}^{\infty} h_{42}^2[n] = \sum_{0}\left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{16}{15}$$

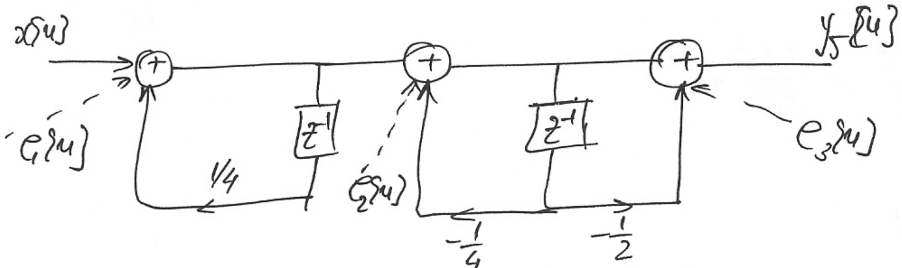
$$h_{42}[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$\sigma_{z_{o_4}}^2 = \sigma_e^2\left(\frac{8}{5}+2\right)\frac{16}{15} = \frac{864}{225}\sigma_e^2$$

-4-

5)

$$H_5(z) = H_{42}(z)\, H_{41}(z)$$

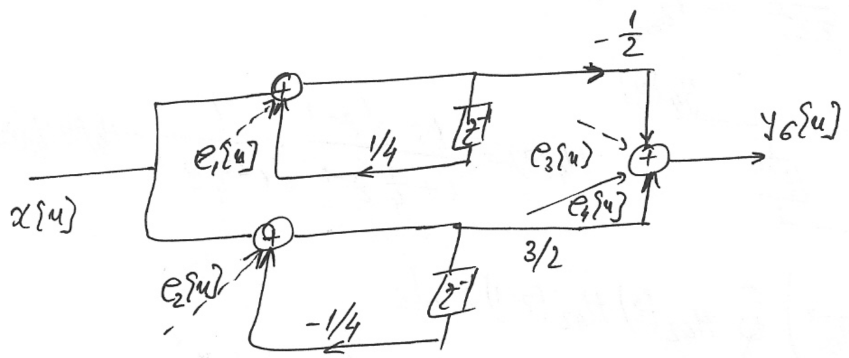


$$\sigma_{z_{05}}^2 = \left(\sigma_e^2 \oint_C H_{42}(z)H_{42}(z^{-1})z^{-1}dz + \sigma_e^2\right)\oint_C H_{41}(z)H_{41}(z^{-1})z^{-1}dz + \sigma_e^2 =$$

$$= \sigma_e^2\left[\left(\frac{16}{15}+1\right)\cdot\frac{8}{5}+1\right] = \frac{969}{225}\sigma_e^2$$

6)

$$H_6(z) = \frac{-1/2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{3/2}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} = H_{61}(z) + H_{62}(z)$$



$$\sigma_{z_{06}}^2 = \sigma_e^2 \oint_C H_{61}(z)H_{61}(z^{-1})z^{-1}dz + \sigma_e^2\oint_C H_{62}(z)H_{62}(z^{-1})z^{-1}dz + 2\sigma_e^2$$

$$\oint_C H_{61}(z)H_{61}(z^{-1})z^{-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{61}[n]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{15} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

$$h_{61}[n] = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$\oint_C H_{62}(z)H_{62}(z^{-1})z^{-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{62}^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{9}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{9}{\cancel{4}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{15} = \frac{36}{15}$$

$$\sigma_{z_{06}}^2 = \sigma_e^2\left[\frac{4}{15}+\frac{36}{15}+2\right] = \frac{1050}{225}\sigma_e^2$$

1. Autocorelația unui proces aleator este: fod. 1

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} 1 & m=0 \\ -1/2 & m=\pm 1 \\ 5/8 & m=\pm 2 \\ -11/16 & m=\pm 3 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine funcția de sistem $A_m(z)$ a filtrului de predicție, coeficienții de reflexie $\{K_m\}$ și eroarea medie pătratică de predicție E_m^f, pentru $m=1,2,3$.

Algoritmul Levinson-Durbin

- Pentru $m=1$ se inițializează:

$$a_1(1) = -\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} \qquad E_1^f = (1-|a_1(1)|^2)\,\gamma_{xx}(0)$$

- La pasul m se calculează:

$$a_m(m) = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1}(k)\,\gamma_{xx}(m-k)}{E_{m-1}^f} \; ; \quad E_m^f = (1-|a_m(m)|^2)\,E_{m-1}^f$$

$$a_m(k) = a_{m-1}(k) + a_m(m)\,a_{m-1}^*(m-k) \qquad 1 \le k \le m-1$$

Soluție:

$\Rightarrow \underline{\underline{m=1}}$ $\quad a_1(1) = -\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} = \frac{1}{2} \qquad E_1^f = \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]\gamma_{xx}(0) = \frac{3}{4}$

$\Downarrow$

$A_1(z) = 1 + a_1(1)z^{-1} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}\; ; \quad K_1 = \frac{1}{2}\; ; \quad E_1^f = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{m=2}}$ $\quad a_2(2) = -\frac{\gamma_{xx}(2) + \sum_{k=1}^{1} a_1(k)\gamma_{xx}(2-k)}{E_1^f} = -\frac{\gamma_{xx}(2)+a_1(1)\gamma_{xx}(1)}{E_1^f} = -\frac{\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$

$$E_2^f = \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]E_1^f = \frac{9}{16}\,;$$

$$a_2(k) = a_1(k) + a_2(2)\,a_1(2-k) \qquad 1 \le k \le 2-1$$

$k=1 \quad a_2(1) = a_1(1) + a_2(2)a_1(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow A_2(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\; ; \quad K_2 = a_2(2) = -\frac{1}{2}\; ; \quad E_2^f = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{m=3}}$ $\quad a_3(3) = -\dfrac{\gamma_{xx}(3) + \sum\limits_{k=1}^{2} a_2(k)\,\gamma_{xx}(3-k)}{E_2^f} = -\dfrac{\gamma_{xx}(3) + a_2(1)\gamma_{xx}(2) + a_2(2)\gamma_{xx}(1)}{E_2^f}$

$$a_3(3) = -\frac{-\frac{11}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{9}{16}} = -\frac{1}{2} \quad ;$$

$$E_3^f = \left(1 - |a_3(3)|^2\right) E_2^f = \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

$$a_3(k) = a_2(k) + a_3(3)\cdot a_2(3-k) \qquad 1 \le k \le 2$$

$k=1 \quad a_3(1) = a_2(1) + a_3(3)\cdot a_2(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$k=2 \quad a_3(2) = a_2(2) + a_3(3)\cdot a_2(1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$

$$A_3(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{5}{8}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3} \;;\; k_3 = a_3(3) = -\frac{1}{2} \;;\; E_3^f = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

2. Autocorelația unei secvențe ~~AR~~ dintr-un proces AR este:

$$\gamma_{xx}(m) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}$$

p. S.a

a) determinați ecuația cu diferențe a lui $x[n]$;

b) este soluția unică? ~~Gasi~~ Dacă nu, găsiți toate soluțiile posibile

Sol. Spectrul de putere a lui $x[n]$ este

$$S_{xx}(z) = Z\{\gamma_{xx}(m)\} = X(z)\cdot X(z^{-1})$$

Trebuie să determinăm $S_{xx}(z)$ și apoi să identificăm $X(z)$.

$$S_{xx}(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{|m|} z^{-m} = \sum_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{-m} z^{-m} + \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{m} z^{-m} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{m} z^{m} - 1 + \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{m} z^{-m} = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot z\right)^{m} + \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{m} - 1$$

Dacă $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$ și $\left|\frac{z^{-1}}{4}\right| < 1$ ceea ce înseamnă $\frac{1}{4} < |z| < 4$ avem:

$$S_{xx}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - 1 = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1} + 1 - \frac{1}{4}z - \left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} =$$

$$= \frac{2 - \cancel{\frac{1}{4}z^{-1}} - \cancel{\frac{1}{4}z} - 1 + \cancel{\frac{1}{4}z^{-1}} + \cancel{\frac{1}{4}z} - \frac{1}{16}}{\left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{15}{16}}{\left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} = X(z)X(z^{-1})$$

$x[n]$ - mărginit și cauzal $\Rightarrow$ că $X(z)$ are polul în interiorul cercului unitate

$$\Rightarrow X(z) = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad \text{cu } p_1 = \frac{1}{4}$$

b) ecuația cu diferențe ce caracterizează procesul $x[n]$ ~~poate~~ poate fi:

$$x[n] = \frac{1}{4}x[n-1] \pm \frac{\sqrt{15}}{4}w[n] \quad \text{dacă } \sigma_w^2 = 1$$

Dacă $\sigma_w^2 = \frac{15}{16}$

$$x[n] = \frac{1}{4}x[n-1] \pm w[n]$$

unde $w[n]$ proces de tip zgomot alb cu varianța σ_w^2

3. Să se determine media și funcția de autocorelație a secvenței $x[n]$ care este ieșirea unui proces ARMA (1, 1) descris de ecuația cu diferențe s.a.

$$x[n] = \frac{1}{2}x[n-1] + w[n] - w[n-1]$$

unde $w[n]$ este un proces de tip zgomot alb cu variația σ_w^2 și medie nulă.

$$w[n] \to \boxed{H(z)} \to x[n] \qquad x[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} w(k)h(n-k) \qquad E\{w(k)\} = 0$$

$$E\{x[n]\} = E\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} w(k)h[n-k]\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} E\{w(k)\}\, h(n-k) = 0 \qquad E - \text{media statistică}$$

Autocorelația $\gamma_{xx}[m]$ se obține cu relația: $\gamma_{xx}[m] = Z^{-1}\{S_{xx}(z)\}$

unde $S_{xx}(z) = S_{ww}(z)\cdot|H(z)|^2 = S_{ww}(z)\,H(z)H(z^{-1})$; $S_{ww}(z) = \sigma_w^2$

iar $H(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\Rightarrow$ $S_{xx}(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\dfrac{1-z}{1-\frac{1}{2}z}\cdot\sigma_w^2 =$

$$= \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-z}{1-\frac{1}{2}z}\sigma_w^2 = \sigma_w^2\cdot\frac{(z-1)^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\cdot 2 = 2\sigma_w^2\cdot\frac{z^2-2z+1}{z^2-\frac{5}{2}z+1} =$$

$$\begin{array}{l|l} z^2-2z+1 & z^2-\frac{5}{2}z+1 \\ \hline -z^2+\frac{5}{2}z-1 & 1 \\ \hline =\ \frac{1}{2}z\ = & \end{array}$$

$$= 2\sigma_w^2\left[1 + \frac{\frac{1}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\right] =$$

$$= 2\sigma_w^2\left[1 + \frac{\frac{1}{2}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right] =$$

$$= \sigma_w^2\left[2 + A\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + B\frac{z}{z-2}\right] \qquad A = \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{2}{3}\ ;\ B = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$S_{xx}(z) = 2\sigma_w^2 - \frac{2}{3}\sigma_w^2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\sigma_w^2\frac{z}{z-2}$$

$x[n]$ – mărginit $\Rightarrow$ $\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}} \longrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^m u[m]$ semnal cauzal pentru $|z| > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{z}{z-2} \longrightarrow -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-m} u[-m-1] = -2^m u[-m-1]$ pentru $|z| < 2$
semnal necauzal

$$\gamma_{xx}[m] = \sigma_w^2\left[2\delta[m] - \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^m u[m] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} u[-m-1]\right]\right] = \sigma_w^2\left[2\delta[n] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}\right]$$

4. Se consideră sistemul liniar descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = 0.8\,y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

unde $x[n]$ este un proces aleator staționar în sens larg cu medie zero și autocorelație: $\gamma_{xx}[m] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$

a) Să se determine D.S.P. a ieșirii $y[n]$;

b) Să se determine $\gamma_{yy}[m]$ a ieșirii;

c) Să se determine dispersia σ_y^2 a ieșirii.

a) $S_{yy}(z) = S_{xx}(z)\cdot|H(z)|^2 = S_{xx}(z)H(z)H(z^{-1})$ $\quad \gamma_{yy}[m] = \mathcal{Z}^{-1}\{S_{yy}(z)\}$

$$S_{xx}(z) = \mathcal{Z}\{\gamma_{xx}[m]\} = \sum_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{-m} z^{-m} + \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{m} - 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{m} =$$

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2}<|z|<2}} \quad \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{2}{2-z} - 1 + \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{2z-\cancel{1}+\cancel{2z}-\cancel{z^2}-\cancel{2z}+\cancel{1}+\cancel{z^2}-\frac{1}{2}z}{-(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}\ ; \quad H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\ ; \quad H(z)\cdot H(z^{-1}) = \frac{(1+z^{-1})(1+z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} =$$

$$= -\frac{1}{0.8}\,\frac{(z+1)^2}{(z-0.8)(z-\frac{1}{0.8})}\ ; \quad S_{yy}(z) = \frac{3}{1.6}\,\frac{z(z+1)^2}{(z-\frac{1}{2})(z-2)(z-0.8)(z-\frac{1}{0.8})}$$

$$\frac{S_{yy}(z)}{z} = \frac{3}{1.6}\,\frac{(z+1)^2}{(z-\frac{1}{2})(z-2)(z-0.8)(z-\frac{1}{0.8})} = \frac{3}{1.6}\left[\frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-0.8} + \frac{D}{z-\frac{1}{0.8}}\right]$$

$$A = \frac{(\frac{1}{2}+1)^2}{(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-0.8)(\frac{1}{2}-\frac{1}{0.8})} = -\frac{20}{3}$$; la fel rezultă $B = \frac{20}{3}$; $C = 20$; $D = -20$

$$S_{yy}(z) = \frac{3}{1.6}\left[-\frac{20}{3}\,\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{20}{3}\,\frac{z}{2-z} + 20\,\frac{z}{z-0.8} + \frac{z}{\frac{1}{0.8}-z}\right]$$

$y[n]$ - mărginit (cauzalitate) $\Rightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m u[m] \quad \frac{z}{2-z} \rightarrow 2^m u[-m-1]$

$\frac{z}{z-0.8} \rightarrow (0.8)^m u[m]$ iar $\frac{z}{\frac{1}{0.8}-z} \rightarrow \left(\frac{1}{0.8}\right)^m u[-m-1]$

$$\gamma_{yy}[m] = \frac{3\cdot 20}{1.6}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^m u[m] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-m} u[-m-1] + (0.8)^m u[m] + \left(\frac{1}{0.8}\right)^m u[m]\right] =$$

$$\gamma_{yy}[m] = \frac{75}{2}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|} + (0.8)^{|m|}\right]$$ iar $\sigma_y^2 = \gamma_{yy}[0] = 25$

5. Un proces MA(2) are secvența de autocorelație:

$$\gamma_{xx}\{m\} = \begin{cases} 6\sigma_w^2 & m=0 \\ -4\sigma_w^2 & m=\pm1 \\ +1\sigma_w^2 & m=\pm2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

p.s.a.

a) să se determine coeficienții procesului MA(2) cu $\gamma_{xx}(m)$ de mai sus

b) Este soluția unică? Dacă nu, dați toate soluțiile posibile.

$x\{n\} = b_0 w\{n\} + b_1 w\{n-1\} + b_2 w\{n-2\}$ unde $w\{n\}$ zgomot alb de dispersie σ_w

Din definiție:

$$\gamma_{xx}\{m\} = E\{x\{n\}x\{n+m\}\} = E\{(b_0 w\{n\} + b_1 w\{n-1\} + b_2 w\{n-2\})(b_0 w(n+m) + b_1 w(n-1+m) + b_2 w(n-2+m))\}$$

pentru:

$\underline{m=0}$ $\gamma_{xx}\{0\} = E\{(b_0 w\{n\} + b_1 w\{n-1\} + b_2 w\{n-2\})(b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2)\}$

$$E\{w(n)w(n+k)\} = \begin{cases} \sigma_w^2 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_{xx}\{0\} = (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)\sigma_w^2$$

$\underline{m=1}$

$\gamma_{xx}\{1\} = E\{(b_0 w\{n\} + b_1 w\{n-1\} + b_2 w\{n-2\})(b_0 w(n+1) + b_1 w(n) + b_2 w(n-1))\} =$

$= (b_0 b_1 + b_1 b_2)\sigma_w^2$

$\underline{m=2}$

$\gamma_{xx}\{2\} = E\{(b_0 w\{n\} + b_1 w\{n-1\} + b_2 w\{n-2\})(b_0 w(n+2) + b_1 w(n+1) + b_2 w(n))\} =$

$= b_0 b_2 \sigma_w^2$

$$\begin{cases} b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 6 \\ b_0 b_1 + b_1 b_2 = -4 \\ b_0 b_2 = 1 \end{cases} \qquad b_2 = \frac{1}{b_0} \qquad b_1(b_0+b_2) = b_1\left(b_0 + \frac{1}{b_0}\right) = b_1 \frac{b_0^2+1}{b_0}$$

$$b_1 = \frac{-4b_0}{b_0^2+1}; \quad b_0^2 + \frac{16 b_0^2}{(b_0^2+1)^2} + \frac{1}{b_0^2} = 6 \qquad b_0^2 = p \quad p + \frac{16p}{(p+1)^2} + \frac{1}{p} = 6$$

$$\frac{p^2+1}{p} + \frac{16p}{(p+1)^2} = 6 \quad (p^2+1)(p+1)^2 + 16p^2 = 6p(p+1)^2$$

$$p^4 + 2p^3 + p^2 + p^2 + 2p + 1 + 16p^2 = 6p + 12p^2 + 6p^3$$

$$\Rightarrow p^4 - 4p^3 + 6p^2 - 4p + 1 = 0 \Rightarrow (p-1)^4 = 0 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow b_0^2 = 1$$

$b_0 = \pm 1 \quad b_2 = \pm 1 \quad b_1 = \mp 2$

$x\{n\} = w\{n\} - 2w\{n-1\} + w\{n-2\}$

$x\{n\} = -w\{n\} + 2w\{n-1\} - w\{n-2\}$

6. Un proces AR(2) este caracterizat de coeficienții filtrului de predicție de mai jos:

$$a_2(1)=\frac{3}{8} \qquad a_2(2)=\frac{1}{2}$$

Dacă procesul AR(2) s-a obținut prin filtrarea unui semnal de tip zgomot alb cu varianța σ_w^2 să se determine: fo d z

a) $\gamma_{xx}[m]$ $\quad 0\le m\le 2$

b) coeficienții de reflexie k_m $\quad 1\le m\le 2$

c) eroarea medie pătratică de predicție E_2^f

a) Ecuațiile Yule-Walker

$$\gamma_{xx}[m]+\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}[m-k]=\begin{cases}\sigma_w^2 & m=0\\ 0 & 1\le m\le p\end{cases}$$

$p=2$ $\quad a_k=a_2(k)$ și rezultă sistemul:

$$m=0 \qquad \gamma_{xx}[0]+a_2(1)\gamma_{xx}[-1]+a_2(2)\gamma_{xx}[-2]=\sigma_w^2$$

$$m=1 \qquad \gamma_{xx}[1]+a_2(1)\gamma_{xx}[0]+a_2(2)\gamma_{xx}[-1]=0$$

$$m=2 \qquad \gamma_{xx}[2]+a_2(1)\gamma_{xx}[1]+a_2(2)\gamma_{xx}[0]=0$$

$\gamma_{xx}[-m]=\gamma_{xx}[m]$

$\gamma_{xx}[-2]=\gamma_{xx}[2]$

$\gamma_{xx}[-1]=\gamma_{xx}[1]$

$$\gamma_{xx}[0]+\frac{3}{8}\gamma_{xx}[1]+\frac{1}{2}\gamma_{xx}[2]=\sigma_w^2$$

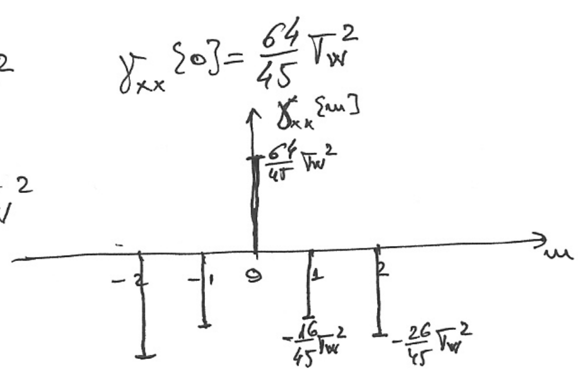
$$\gamma_{xx}[1]+\frac{3}{8}\gamma_{xx}[0]+\frac{1}{2}\gamma_{xx}[1]=0 \Rightarrow \gamma_{xx}[1]=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\gamma_{xx}[0]=-\frac{1}{4}\gamma_{xx}[0]$$

$$\gamma_{xx}[2]+\frac{3}{8}\gamma_{xx}[1]+\frac{1}{2}\gamma_{xx}[0]=0 \Rightarrow \gamma_{xx}[2]=-\frac{3}{8}\gamma_{xx}[1]-\frac{1}{2}\gamma_{xx}[0]=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\gamma_{xx}[0]-\frac{1}{2}\gamma_{xx}[0]$$

$$\gamma_{xx}[2]=-\frac{13}{32}\gamma_{xx}[0]$$

$$\gamma_{xx}[0]\left(1+\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{13}{32}\right)\right)=\sigma_w^2 \qquad \gamma_{xx}[0]=\frac{64}{45}\sigma_w^2$$

$$\gamma_{xx}[1]=-\frac{16}{45}\sigma_w^2 \qquad \gamma_{xx}[2]=-\frac{26}{45}\sigma_w^2$$



b) $$A_{m-1}(z)=\frac{A_m(z)-k_m B_m(z)}{1-k_m^2} \qquad A_1(z)=\frac{A_2(z)-k_2B_2(z)}{1-k_2^2}$$

vezi structuri lattice

$k_2=a_2(2)$ $\quad A_2(z)=1+a_2(1)z^{-1}+a_2(2)z^{-2}$

$$B_2(z)=z^{-2}+a_2(1)z^{-1}+a_2(2)$$

$$A_1(z) = \frac{1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} \qquad k_1 = a_1(1) = \frac{1}{4}$$

$k_2 = \frac{1}{2} \quad k_1 = \frac{1}{4}$

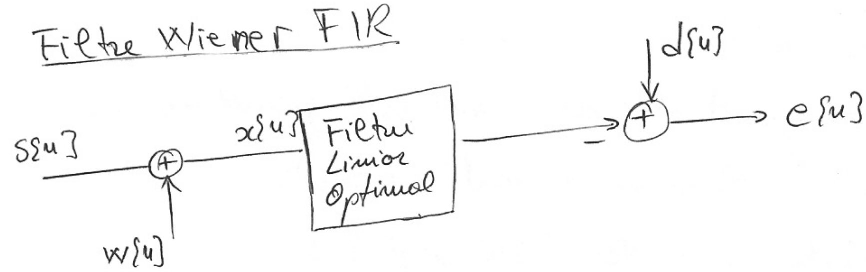
c) $E_m^f = (1 - |a_m(m)|^2)E_{m-1}^f = \gamma_{xx}(0)\prod_{k=1}^{m}[1 - |a_k(k)|^2]$

$m = 2 \quad a_1(1) = \frac{1}{4}; \quad a_2(2) = \frac{1}{2}$

$E_2^f = \gamma_{xx}(0)\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{65}{45}\sigma_w^2 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{3}{4} = \sigma_w^2$ vezi. teoria

Filtrare optimală

Filtre Wiener FIR



Coeficienții filtrului FIR se calculează din sistemul de ecuații

$$\sum_{k=0}^{M-1} h[k]\,\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l) \qquad l = 0, 1 \ldots M-1$$

Matricial $\quad \Gamma_M \cdot h_{opt} = \gamma_d \qquad h_{opt} = \Gamma_M^{-1} \cdot \gamma_d$

unde:

- $\gamma_{xx}[m]$ autocorelația semnalului $x[n]$
- $\gamma_{dx}[m]$ corelația dintre semnalul dorit $d[n]$ și semnalul $x[n]$
- $h[k]$ coeficienții filtrului ce vor fi determinați din ecuațiile de mai sus

Eroarea minimă este:

$$MMSE_M = \min_{h_M} \mathcal{E}_M = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{opt}(k)\,\gamma_{dx}^*(k)$$

$$MMSE_M = \sigma_d^2 - \gamma_d^{*T}\,\Gamma_M^{-1}\,\gamma_d$$

Dacă $d[n] = s[n]$

$$\gamma_{xx}(k) = \gamma_{ss}(k) + \gamma_{ww}(k) \qquad \gamma_{sw}(k) = 0$$

$$\gamma_{dx}(k) = \gamma_{ss}(k) \qquad \gamma_{ww}(k) = \sigma_w^2\,\delta(k)$$

Sistemul de ecuații devine:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h[k]\left[\gamma_{ss}(l-k) + \gamma_{ww}(l-k)\right] = \gamma_{ss}(l) \qquad l = 0, 1 \ldots M-1$$

Problemă:

Fie semnalul $x[n] = s[n] + w[n]$ unde $s[n]$ este un proces $AR(1)$:

$$s[n] = a\, s[n-1] + v[n] \qquad a = 0.6$$

fod 3

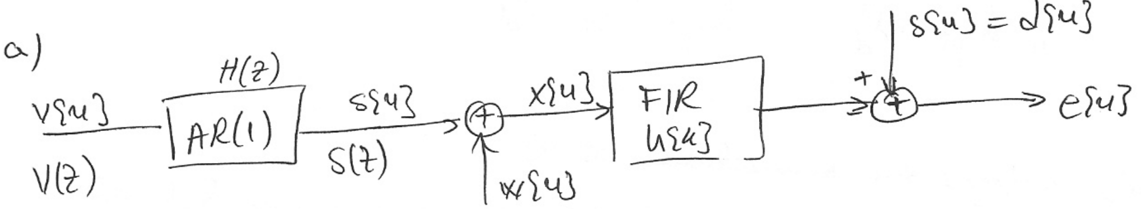
unde $\sigma_v^2 = 0.64$ v- zgomot alb. iar $w[n]$ este zgomot alb cu varianța $\sigma_w^2 = 1$. Procesele $v[n]$ și $w[n]$ sunt necorelate.

a) Determinați autocorelația secvenței $\gamma_{ss}[m]$ și $\gamma_{xx}[m]$;

b) Proiectați filtrul Wiener FIR de lungime $M=2$ pentru estimarea lui $s[n]$ din $x[n]$.

c) Determinați eroarea pătratică medie minimă MMSE pentru $M=2$.

a)



$|a| < 1$

$$\Gamma_{ss}(z) = V(z)V(z^{-1})H(z)H(z^{-1}) = \sigma_v^2 \frac{1}{(1-az^{-1})(1-az)} = \sigma_v^2 \frac{z}{(z-a)(1-az)} =$$

$$= \sigma_v^2 \frac{-\frac{1}{a} z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} = -\frac{1}{a} z\, \sigma_v^2 \left(\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-\frac{1}{a}} \right) = \sigma_v^2 \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} \right)$$

$$A = \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = -\frac{a}{1-a^2} \quad ; \quad B = \frac{1}{\frac{1}{a} - a} = \frac{a}{1-a^2}$$

$$\gamma_{ss}[m] = \mathcal{Z}^{-1}\{\Gamma_{ss}(z)\} = \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} \left(a^m u[m] + \left(\frac{1}{a}\right)^m u[-m-1] \right) = \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} \cdot a^{|m|}$$

$$a = 0,6 \quad \sigma_v^2 = 0,64 \implies \gamma_{ss}[m] = a^{|m|} = (0,6)^{|m|}$$

$$\gamma_{xx}[m] = \gamma_{ss}[m] + \gamma_{ww}[m] = (0,6)^{|m|} + \sigma_w^2 \delta[m] \qquad \text{deoarece } \gamma_{ww}[m] = \begin{cases} \sigma_w^2 & m = 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\gamma_{xx}[m] = (0,6)^{|m|} + \delta[m]$$

b) $M = 2$

$$\sum_{k=0}^{1} h[k]\, \gamma_{xx}[l-k] = \gamma_{dx}[l] \qquad l = 0, 1$$

$$\sum_{k=0}^{1} h[k] \left[\gamma_{ss}[l-k] + \gamma_{ww}[l-k] \right] = \gamma_{ss}[l]$$

$l=0 \quad h[0]\gamma_{xx}[0] + h[1]\gamma_{xx}[-1] = \gamma_{dx}[0]$

$l=1 \quad h[0]\gamma_{xx}[1] + h[1]\gamma_{xx}[0] = \gamma_{dx}[1]$

sau matricial:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{dx}[0] \\ \gamma_{dx}[1] \end{bmatrix}$$

$\gamma_{xx}[0] = 1+1 = 2 \quad \gamma_{xx}[-1] = \gamma_{xx}[1] = 0.6$

$\gamma_{dx}[0] = \gamma_{ss}[0] = 1 \quad \gamma_{dx}[1] = \gamma_{ss}[1] = 0.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2h[0] + 0{,}6\,h[1] = 1 \\ 0{,}6\,h[0] + 2\,h[1] = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} h[0] = 0{,}4505 \\ h[1] = 0{,}1648 \end{array}$$

c) $MMSE = \sigma_s^2 - \sum_{k=0}^{1} h[k]\gamma_{ss}^{*}[k] = \gamma_{ss}[0] - h[0]\gamma_{ss}[0] - h[1]\gamma_{ss}(1) =$

$= 1 - 0{,}4505 - (0{,}1648)(0{,}6) = 0{,}45$

Eroarea poate fi redusă prin mărirea ordinului filtrului M.

Filtre IIR

Să se determine filtrul optim cauzal Wiener IIR pentru semnalul dat la problema anterioară și eroarea corespunzătoare $MMSE_\infty$.

Noțiuni teoretice

$$H_{opt}(z) = \frac{Q(z)}{G(z)} = \frac{1}{\sigma_i^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+$$

$[\ ]_+$ - reprezintă partea cauzală

$G(z)$ se obține prin albirea lui $x[n]$. La fel și σ_i^2

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z) G(z^{-1})$$

$$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z) \qquad \text{iar} \quad X(z) = S(z) + W(z)$$

$$\Gamma_{xx}(z) = X(z)\cdot X(z^{-1}) = \left(S(z) + W(z)\right)\left(S(z^{-1}) + W(z^{-1})\right) = S(z)S(z^{-1}) + W(z)W(z^{-1})$$

$$= \Gamma_{ss}(z) + \sigma_w^2 \quad \text{deoarece} \quad \gamma_{sw}\{m\} = \gamma_{ws}\{m\} = 0$$

$$\Gamma_{ss}(z) = \frac{\sigma_v^2}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{0,64 + 1 + 0,36 - 0,6z^{-1} - 0,6z}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} = \frac{2 - 0,6z^{-1} - 0,6z}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} =$$

$$= \frac{1,8 - 0,6z^{-1} - 0,6z + 0,2}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} = \frac{1,8\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{9}\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} = 1,8\,\frac{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}$$

$$\Rightarrow \sigma_i^2 = 1,8 \quad \text{și} \quad G(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-0,6z^{-1}}$$

$$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z)$$

$$\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}\cdot\frac{1-0,6z}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)} = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z\right)} = \frac{0,64\,z}{(z-0,6)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$$

$$= 0,64\,z\left(\frac{A}{z-0,6} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z}\right) = \qquad \left|\; \begin{array}{l} -\frac{1}{3}A + B = 0 \qquad B = \frac{1}{3}A \\ -0,6B + A = 1 \qquad A - \frac{0,6}{3}A = 1 \qquad A = \frac{1}{0,8}\;;\; B = \frac{1}{3\cdot 0,8} \end{array}\right.$$

$$= 0,64\left(\frac{\frac{1}{0,8}z}{z-0,6} + \frac{\frac{1}{0,8\cdot 3}z}{1-\frac{1}{3}z}\right) = \frac{0,8\,z}{z-0,6} + \frac{\frac{0,8}{3}z}{1-\frac{1}{3}z}$$

$$\left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})}\right]_+ = \frac{0,8\,z}{z-0,6}\;;$$

deoarece celălalt termen are polul în afara cercului unitate $p_2 = 3$ și nu poate fi stabil și cauzal.

$$H_{opt}(z) = \frac{1}{1{,}8 \dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\cancel{1-0{,}6z^{-1}}}} \cdot \frac{0{,}8}{\cancel{1-0{,}6z^{-1}}} = \frac{4/9}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$h_{opt}(n) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u\{n\}$$

$$MMSE_{\infty} = \min_{h_{opt}} \mathcal{E}_{\infty} = \sigma_d^{2} - \sum_{k=0}^{\infty} h_{opt}(k)\gamma_{dx}^{*}(k)$$

$$MMSE_{\infty} = \frac{1}{2\pi j}\oint \underbrace{\left[\Gamma_{dd}(z) - H_{opt}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})\right] z^{-1}}_{L(z)} dz =$$

$= \sum \text{Rez } L(z)$ în polii din interiorul cercului unitate

$\Gamma_{dd}(z) = \Gamma_{ss}(z)$ $\quad \Gamma_{dd}(z) - H_{opt}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1}) = \dfrac{0{,}64}{(1-0{,}6z^{-1})(1-0{,}6z)} - \dfrac{4/9}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \dfrac{0{,}64}{(1-0{,}6z)(1-0{,}6z^{-1})}$

$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z)$

$$= \frac{0{,}64\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{4}{9}\right)}{(1-0{,}6z^{-1})(1-0{,}6z)(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = 0{,}64\,\frac{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-0{,}6z^{-1})(1-0{,}6z)(1-\frac{1}{3}z^{-1})} =$$

$$= 0{,}64\,\frac{\frac{5}{9}\cancel{(1-0{,}6z^{-1})}}{\cancel{(1-0{,}6z^{-1})}(1-0{,}6z)(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{0{,}356\ z^{-1}}{(1-0{,}6z)(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = -\frac{0{,}356}{0{,}6}\cdot\frac{z}{\left(z-\frac{1}{0{,}6}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint \underbrace{\frac{-\frac{0{,}356}{0{,}6}z \cdot z^{-1}}{\left(z-\frac{1}{0{,}6}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}}_{L(z)} dz = \sum \text{Rez } L(z) \text{ în } z=\frac{1}{3}$$

$-\dfrac{\frac{0{,}356}{0{,}6}}{(z-\frac{1}{0{,}6})(z-\frac{1}{3})}$

(singurul pol din interiorul cercului unitate)

$$= \left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{-\frac{0{,}356}{0{,}6}}{\left(z-\frac{1}{0{,}6}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{0{,}356}{0{,}6}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{0{,}6}} = \frac{-\frac{0{,}356}{\cancel{0{,}6}}}{\frac{0{,}6-3}{3\cdot\cancel{0{,}6}}} = \frac{0{,}356\cdot 3}{2{,}4}$$

$$MMSE_{\infty} = 0{,}445 < 0{,}45 = MMSE_{FIR\ M=2}$$