Lucrarea 14

Filtre Wiener pentru filtrare şi predicţie

În multe situaţii practice semnalele utile sunt afectate de perturbaţii cu caracter aditiv, motiv pentru care se pune problema proiectării unui filtru care să suprime componenta nedorită de zgomot, păstrând, în acelaşi timp, caracteristicile semnalului dorit. Se impune ca filtrul, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, să fie liniar, iar ieşirea sa să aproximeze un semnal dorit. Situaţia este ilustrată în figura 1.

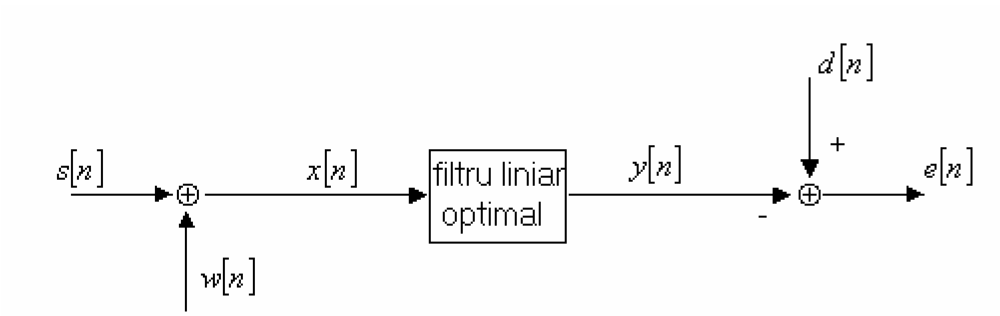

Figura 1

unde:
- $s[n]$-semnalul util
- $w[n]$-zgomot aditiv
- $d[n]$-semnal dorit
- $x[n] = s[n] + w[n]$-semnalul de intrare în filtru
- $y[n]$-ieşirea filtrului
- $e[n] = d[n] - y[n]$-secvenţa de eroare

Se disting trei cazuri :

1) $d[n] = s[n]$ situaţie cunoscută sub numele de filtrare;
2) $d[n] = s[n + D], D > 0$ situaţie cunoscută sub numele de predicţie;
3) $d[n] = s[n - D]$ situaţie cunoscută sub numele de netezire.

În continuare se va prezenta cazul filtrării. Criteriul ales pentru optimizarea răspunsului la impuls al filtrului este cel de minimizare a erorii pătratice medii. Secvenţele $\{s[n]\}, \{w[n]\}, \{d[n]\}$ se presupun a fi de medie zero şi staţionare în sens larg. Filtrul liniar optimal care minimizează eroarea pătratică medie se numeşte *filtru Wiene*r şi poate fi cu răspuns finit la impuls (FIR) sau cu răspuns infinit la inpuls (IIR).

1. Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

Se presupune că filtrul cu răspus finit la impuls are lungimea M şi coeficienţii $\{h[k], 0 \le k \le M - 1\}$, caz în care ieşirea sa este:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k] \tag{1}$$

Valoarea pătratică medie a erorii dintre ieşirea dorită $d[n]$ şi ieşirea filtrului este:

$$\xi_M = E\left\{e[n]^2\right\} = E\left\{\left|d[n] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]\right|^2\right\} \tag{2}$$

unde $\gamma_{dd}[0] = E\left\{d^2[n]\right\} = \sigma_d^2$, $\gamma_{dx}[n] = E\left\{d[n+k]x[k]\right\}$ - funcţia de corelaţie dintre secvenţa dorită şi cea de intrare şi $\gamma_{xx}[n] = E\{x[n+k]x[k]\}$ - funcţia de autocorelaţie a semnalului de intrare.

Coeficienţii filtrului optimal FIR care minimizează eroarea medie pătratică şi care reprezintă răspunsul la impuls al filtrului se calculează din ecuaţiile Wiener-Hopf.

$$\sum_{k=0}^{M-1} \gamma_{xx}[m-k]h_0[k] = \gamma_{dx}[m], 0 \le m \le M-1, \tag{3}$$

cunoscute şi sub numele de ecuaţii normale. Ecuaţia (3) poate fi exprimată şi în formă matricială:

$$[\Gamma_M][h_M] = [\gamma_l] \tag{4}$$

unde $[\Gamma_M]_{M\times M}$ este matricea de autocorelaţie, cu elementele $\Gamma_{lk} = \gamma_{xx}[l-k]$ şi $[\gamma_d]_{M\times 1}$ este un vector cu elementele $\gamma_{dx}[l], l = 0,1,...,M-1$. Soluţia pentru coeficienţii filtrului optimal este:

$$[h_0] = [\Gamma_M]^{-1}[\gamma_d] \tag{5}$$

iar erorea pătratică medie minimă (EPMM) rezultată cu filtrul Wiener este:

$$EPMM_M = \min_{[hM]} \xi_M = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_{dx}[k]h_0[k] \tag{6}$$

sau, matriceal :

$$EPMM_M = \min_{[hM]} \xi_M = \sigma_d^2 - [\gamma_d]^t [\gamma_M]^{-1} [\gamma_d] \tag{7}$$

În continuare, se consideră câteva cazuri particulare pentru ecuaţiile Wiener-Hopf. Semnalul dorit a fi estimat se consideră de forma:

$$d[n] = s[n+D], D(fixat) \in Z \tag{8}$$

Filtrul liniar optimal operează asupra semnalului observat afectat de zgomot aditiv:

$$x[n] = s[n] + w[n] \tag{9}$$

pentru a elimina zgomotul, producând un răspuns $y[n]$ care să aproximeze $s[n+D]$. Natura filtrului optimal este legată de alegerea lui D.

Pentru $D = 0$, se obţine cazul filtrării clasice care are rolul de a înlătura zgomotul aditiv, lăsând nedistorsionat semnalul $s[n]$.

Pentru $D < 0$, filtrul de netezire optimal va produce o versiune întârziată cu D unităţi a semnalului de informaţie.

Pentru $D > 0$, filtrul predictor optimal va produce la ieşire o versiune anticipată a semnalului de informaţie.

Dacă semnalul $s[n]$ şi zgomotul $w[n]$ sunt necorelate, cum este de obicei cazul în practică, atunci:

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}[n]&=\gamma_{ss}[k]+\gamma_{ww}[k]\\ \gamma_{ds}[k]&=\gamma_{ss}[k+D]\end{aligned}\qquad(10)$$

iar ecuaţiile normale devin:

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{M-1}h[k][\gamma_{ss}[m-k]+\gamma_{ww}[m-k]]=\gamma_{ss}[m+D]\\ m=0,\ldots,M-1\end{cases}\qquad(11)$$

Matricele de corelaţie sunt Toeplitz şi se poate folosi algoritmul Levison-Durbin generalizat pentru aflarea coeficienţilor filtrului optimal.

Exemplul 1 Funcţia `wienerfir` determină coeficienţii filtrului FIR Wiener şi eroarea pătratică medie minimă ($EPMM_M$) având ca argumente de intrare secvenţa $x[n]$ şi semnalul dorit $s[n]$ precum şi ordinul filtrului M:

```
function  [h,mmse]=wienerfir(x,s,M);
%calculeaza coeficientii filtrului optimal FIR rezolvind ecuatiile %Wiener-
Hopf
%[h,mmse]=wienerfir(x,s,M);
%h=vector coloana ce contine coeficientii filtrului optimal
%mmse  eroarea medie patratica minima corespunzatoare filtrului %optimal
%x[n]=s[n]+w[n] semnalul afectat de zgomotul de tip alb w[n]
%s semnalul util ce trebuie estimat cu ajutorul filtrului optimal
L=length(x);
rxx=xcorr(x,'biased');
rsx=xcorr(s,x,'biased');
rsxM=rsx(L:L+M-1)';
Rxx=toeplitz(rxx(L:L+M-1)');
h=(Rxx^-1)*rsxM;
mmse=var(s)-h'*rsxM;
```

a)scrieţi un program Matlab (vezi **p14_1**) în care generaţi o secvenţă de tip zgomot alb $v[n]$ cu varianţa $\sigma_v^2=0.64$ (vezi **randn**), pe care o filtraţi printr-un filtru IIR cu un pol. Peste secvenţa obţinută $s[n]$ suprapuneţi o secvenţă de tip zgomot alb $w[n]$ cu varianţa $\sigma_w^2=1$ rezultând secvenţa $x[n]$.

b)filtraţi secvenţa $x[n]$ cu filtrul cu coeficienţii b=[0.451 0.165]; a=[1]. Calculaţi EPMM cu ajutorul relaţiei (2).

c) determinaţi coeficienţii filtrului FIR pentru *M=2* folosind funcţia prezentată mai sus. Filtraţi acum secvenţa $x[n]$ cu filtrul rezultat. Cât este EPMM în acest caz? Comentaţi.

d) filtraţi secvenţa $x[n]$ cu un filtru FIR de ordinul 2 cu coeficienţii aleşi la întâmplare. Calculaţi EPMM cu ajutorul relaţiei (2). Ce observaţi?

e) refaceţi subpunctul c) pentru M=6,10,40,100,200. Ce observaţi? Comentaţi.

```
%Program p14_1

%Exemplul 1
clc
L=1000;
sigmav=0.8;
sigmaw=1;
a=0.6;
v=randn(1,L)*sigmav;
```

```
s=filter(1,[1 -a],v); %semnalul util
x=s+sigmaw*randn(1,L); %semnalul afectat de zgomot
M=2;
%determinarea coeficientilor filtrului Wiener FIR
[h,mmse]=wienerfir(x,s,M); %

fprintf('Exemplul 1\n Filtru WIENER FIR\n\n',e0)

%filtrare cu filtrul FIR dedus teoretic (pct. b)
s0=filter([0.451 0.165],1,x);
e0=sum((s0-s).^2)/L;
fprintf('Ex.1 pct. b : EPMM = %f\n',e0)

%filtrare cu filtrul FIR calculat cu "wienerfir"  (pct. c)
s1=filter(h,1,x);
e1=sum((s1-s).^2)/L;
fprintf('Ex.1 pct. c : EPMM = %f\n',e1)

%filtrare cu un filtru FIR oarecare  (pct. d)
s2=filter([0.2, 0.16],1,x);
e2=sum((s2-s).^2)/L;
fprintf('Ex.1 pct. d : EPMM = %f\n\n',e2)
```

2. Filtru Wiener cu răspuns infinit la impuls

În cazul filtrelor IIR, ieşirea acestora este:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{12}$$

Coeficienții filtrului rezultă din minimizarea erorii pătratice medii dintre semnalul de ieşire dorit $d[n]$ şi $y[n]$, adică:

$$\xi_M = E\left\{e[n]^2\right\} = E\left|d[n] - \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|^2 \tag{13}$$

Filtrul cauzal optimal Wiener are funcția de sistem:

$$H_{opt}(z) = \frac{1}{\sigma_i^2 G(z)} {}^{+}\left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})}\right] \tag{14}$$

unde

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z)G(z^{-1}) \qquad \Gamma_{dx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k) \cdot z^{-k} \tag{15}$$

iar ${}^{+}[\ ]$ reprezintă doar partea cauzală a funcției în Z din interiorul parantezelor.

Eroarea pătratică medie minimă se poate calcula cu relația:

$$EPMM_{\infty} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\Gamma_{dd}(z) - H_{opt}(z)\Gamma_{dz}(z^{-1})\right] z^{-1} dz \tag{16}$$

Exemplul 2. Cu aceleaşi secvenţe generate anterior filtraţi secvenţa $x[n]$ cu un filtru IIR cu coeficienţii $b=[9/4]$; $a=[1 \quad -1/3]$. Calculaţi $EPMM_\infty$ folosind relaţia (13). Ce observaţi? Comentaţi.

```
%Exemplul 2 (Continuare la p14_1)
%filtrare cu filtrul Wiener IIR
bo=4/9;
ao=[1 -1/3];
s4=filter(bo,ao,x);
e4=sum((s4-s).^2)/L;
fprintf('Exemplul 2\nFiltru WIENER IIR     : EPMM = %f\n',e4)
```

3. Aplicaţie propusă:

Fie semnalul de mai jos:

$$s[n]=\sin(2\pi f_1 n)+\sin(2\pi f_2 n) \qquad f_1=0.013 \quad f_2=0.051 \qquad n=0:999$$

Peste semnalul $s[n]$ se suprapune o secvenţă de tip zgomot alb cu varianţa $\sigma_w^2=0.25$, $x[n]=s[n]+w[n]$.

a) cu ajutorul funcţiei `wienerfir` determinaţi coeficienţii filtrului Wiener FIR optimal cu M=20 şi filtraţi secvenţa $x[n]$ cu acest filtru. Reprezentaţi pe aceeaşi figură cele trei secvenţe $s[n]$, $x[n]$ şi $s1[n]$ rezultat în urma filtrării lui $x[n]$ în culori diferite. (Vezi **p14_2**). De asemenea, calculaţi eroarea medie pătratică EPMM rezultată.

b) repetaţi punctual a) pentru diverse valori ale ordinului filtrului FIR M=40, 100. Ce observaţi? Comentaţi.