Lucrarea 12

Metode clasice de estimare spectrală (neparametrice)

1. Introducere

În lucrarea de faţă se urmăreşte estimarea caracteristicilor spectrale ale semnalelor considerate a fi procese aleatoare, pentru care, datorită fluctuaţiilor aleatoare nu este posibilă aplicarea directă a analizei Fourier. În acest caz se adoptă o tratare statistică a lor. În particular, funcţia de autocorelaţie a proceselor aleatoare staţionare în sens larg este potrivită pentru caracterizarea lor statistică, iar transformata Fourier a acesteia, care reprezintă densitatea spectrală de putere face legătura între domeniile timp şi frecvenţă. Problema estimării spectrale constă în determinarea componentelor spectrale ale procesului aleator staţionar în sens larg pe baza unei mulţimi finite de observaţii asupra procesului.

1.1. Elemente de teoria estimării

Fie θ un parametru caracteristic al unui proces aleator şi $\hat{\theta}$ un estimator realizat pe baza a N observaţii $x[i]$ cu $(0 \le i \le N-1)$:

$$\hat{\theta} = F(x[0], \ldots\ldots, x[N-1]).$$

Eroarea sistematică sau *deplasare*a unui estimator reprezintă diferenţa dintre valoarea adevărată a mărimii ce trebuie estimată şi valoarea medie a estimatului său:

$$B(\theta) = \theta - E(\hat{\theta}),$$

unde $E(.)$ reprezintă valoarea medie statistică.

Dispersia sau *varianţa* unui estimator se defineşte astfel:

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\}.$$

O varianţă mică indică o dispersie mică a estimatorului în jurul valorii $E(\theta)$. Un estimator este *asimptotic nedeplasat* dacă:

$$\lim_{N\to\infty} B(\theta) = 0.$$

Un estimator este *consistent* dacă atunci când este asimptotic nedeplasat şi:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\theta}) = 0.$$

1.2. Aspecte teoretice ale estimării spectrale

Teoretic, desnsitatea spectrală de putere a unui proces aleator staţionar în sens larg $x[n]$ este transformata Fourier a funcţiei de autocorelaţie:

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[k] e^{-j2\pi fk} \tag{1}$$

Funcţia de autocorelaţie statistică este:

$$\gamma_{xx}[k] = E(x[n+k]x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+k]x[n] \tag{2}$$

Din aceste relaţii rezultă:

a) estimarea spectrului de putere necesită o secvenţă de autocorelaţie de lungime infinită;

b) estimarea secvenței de autocorelație necesită estimarea mediei ...

c) estimarea spectrului de putere pentru un proces staționar în sens larg este echivalentă cu estimarea funcției de autocorelație.

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+k]x[n]e^{-j2\pi fk} \underset{n+k=p}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]x[n]e^{-j2\pi fp}e^{j2\pi fn} =$$
$$= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2 = |X(f)|^2 \tag{3}$$

Din relațiile (1) și (3) se observă două moduri de a calcula desnitatea spectrală de putere:

- una directă (relația 3), în care se calculează pătratul modulului transformatei Fourier;
- una indirectă(relația 1), în care se calculează întâi funcția de autocorelație și apoi transformata sa Fourier.

În practică nu se dispune de mulțimea realizărilor procesului pe baza căruia să se evalueze funcția de autocorelație, astfel încât este de dorit a se estima funcția de autocorelație a procesului pe baza unei singure realizări particulare. Pentru ca acest lucru să fie posibil este necesar ca procesul să fie ergodic atât în medie cât și în corelație , adică atât valoarea medie temporală , cât și valoarea funcția de autocorelație temporală să tindă cu probabilitate 1 la corespondentele lor statistice. Proprietatea de ergodicitate justifică folosirea funcției de autocorelație temporale ca un estimat al funcției de autocorelație statistice. Mai mult, transformata Fourier a acestui estimat furnizează un estimat al spectrului densității de putere.

Se consideră un proces staționar în sens larg $x[n]$ care este observat numai în intervalul $0 \le n \le N-1$. Pe baza acestei observări de durată finită se poate estima funcția de autocorelație în mai multe moduri. De exemplu, un estimator este:

a)

$$\begin{cases} r'_{xx}[m] = \dfrac{1}{N-m} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m],\ m = 0,1,...,N-1 \\ r'_{xx}[m] = \dfrac{1}{N-|m|} \displaystyle\sum_{n=|m|}^{N-1} x[n]x[n+m],\ m = -1,-2,...,-N+1 \end{cases} \tag{4}$$

Acest estimator este nedeplasat și de varianță asimptotic nulă (pentru $N \to \infty$ $\quad \mathrm{var}(\hat{r}_{xx}) = 0$). Funcția MATLAB care calculează este estimat este :

```
rxx1=xcorr(x,'unbiased');
```

b)

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m],\ 0 \le m \le N-1 \\ \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=|m|}^{N-1} x[n]x[n+m],\ -N+1 \le m < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Acest estimator este deplasat, în schimb este *asimptotic nedeplasat* și de *varianță asimptotică nulă*. În MATLAB acesta se determină cu:

```
rxx2=xcorr(x,'biased');
```

Se definește ca o măsură a performanțelor unui estimator neparametric un *factor de calitate* dat de raportul dintre pătratul mediei puterii spectrului estimat și dispersia sa:

$$Q_A = \frac{\{E[P_{xx}^A(f)]\}^2}{\text{var}[P_{xx}^A(f)]} \tag{6}$$

unde prin A se specifică tipul de metodă folosită iar x este vectorul de date al cărui spectru se estimează. Cei doi estimatori sunt consistenți.

2. Metode clasice de estimare spectrală

2.1. Metoda directă (Periodograma)

Estimatul corespunzător al densității spectrale de putere este:

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot m} \tag{7}$$

Înlocuind (3) în (7) rezultă:

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N}\left|X_N(f)\right|^2 \tag{8}$$

unde $X_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot f}$.

Relația (8) a estimatului spectrului de putere se numeşte *periodogramă*. Valoarea medie a periodogramei este:

$$E[P_{xx}(f)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \tag{9}$$

Interpretarea acestei relații este că media spectrului estimat este transformata Fourier a funcției de autocorelație înmulțită cu o fereastră triunghiulară. Produsului din domeniul timp îi corespunde în domeniul frecvență operația de convoluție:

$$E[P_{xx}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f-\alpha) d\alpha \tag{10}$$

unde $W_B(f)$ este transformata Fourier a ferestrei Bartlett iar $\Gamma_{xx}(f)$ densitatea spectrală de putere care se doreşte a fi estimată. Ca urmarea a acestei convoluții, spectrul estimat este o versiune netezită a spectrului semnalului şi suferă de fenomenul de *scurgere spectrală* din cauza lungimii finite a datelor.

Spectrul estimat este asimptotic nedeplasat, deoarece

$$\lim_{N\to\infty} E[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}(f),$$

iar

$$\lim_{N\to\infty} \text{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f).$$

În concluzie, spre deosebire de funcția de autocorelație estimată, periodograma nu este un estimat consistent al densității spectrale de putere. $P_{xx}(f)$ este un estimat asimptotic nedeplasat pentru $\Gamma_{xx}(f)$, dar, pentru o secvență de durată finită, valoarea sa medie este deplasată. Spectrul estimat suferă de efecte de netezire şi scurgere spectrală, cauzate de înmulțirea cu ferestra Bartlett.

Factorul de calitate pentru periodogramă este:

$$Q_P \cong \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1$$

ceea ce arată independența performanțelor estimatorului de lungimea vectorului de date.

2.2. Metoda Bartlett (Periodograma mediată)

Având la dispoziție un segment de date de lungime N pentru a reduce varianța estimatului divizăm segmentul în K segmente de lungime M nesuprapuse (N=K×M). Pentru fiecare dintre aceste segmente se calculează periodograma:

$$P_{xx}^{(i)}(f)=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i[n]e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot f}\right|^2 \quad cu \quad i=0,1....K-1 \tag{11}$$

În final cu cele K periodograme se realizează o medie rezultând aşa numita *periodogramă mediată*:

$$P_{xx}^{B}(f)=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}P_{xx}^{(i)}(f) \tag{12}$$

Se demonstrează că:

$$E[P_{xx}^{B}(f)]=E[P_{xx}^{(i)}(f)]\to\Gamma_{xx}(f)$$

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{B}(f)]\to\frac{1}{K}\Gamma_{xx}^{2}(f)$$

iar $Q_B=K=\dfrac{N}{M}$.

O primă concluzie este aceea că varianța se reduce iar dacă $N\to\infty$ şi M este finit $K\to\infty$ şi estimatorul devine consistent. Pentru un segment de date de lungime N fixă putem reduce varianța estimatorului crescând K, cu prețul reducerii rezoluției cu un factor K=N/M.

2.3. Metoda Welch (Periodograma mediată modificată)

Welch realizează două modificări la metoda Bartlett. Prima constă în posibilitatea suprapunerii segmentelor ce se obțin din vectorul inițial iar a doua modificare constă în aplicarea unei ferestre fiecărui segment.

Fie $x[n]$ o secvență de N. Segmentele se vor obține astfel:

$$x_i[n]=x[n+iD] \qquad n=0,1......M-1$$
$$i=0,1........K-1$$

Vor rezulta *K* segmente, fiecare de lungime *M*. Dacă *D=M* segmentele nu se suprapun. Periodograma rezultată este:

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}=\frac{1}{M\cdot U}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i[n]w[n]e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot f}\right|^2 \qquad i=0,1.....L-1 \tag{13}$$

unde *U* este un factor de normalizare, ales astfel încât:

$$U=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w^2[n] \tag{14}$$

Puterea spectrală estimată în acest caz devine:

$$P_{xx}^{W}(f)=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{L-1}\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \tag{15}$$

Se demonstrează că $E[P_{xx}^{W}(f)]=E[\widetilde{P}_{xx}^{(i)}(f)]\to\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)d\alpha$ unde $W(\alpha)=\dfrac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w[n]e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot f}\right|^2$.

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)] = \begin{cases} \dfrac{1}{K}\Gamma_{xx}^{2}(f) & \text{segmentele nu se suprapun} \\ \dfrac{9}{8K}\Gamma_{xx}^{2}(f) & \text{segmentele se suprapun cu } 50\% \end{cases}$$

Pentru N infinit şi M finit, estimatorul devine consistent.

Coeficientul de calitate este:

$$Q_W = \begin{cases} K = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} & \text{segmentele nu se suprapun} \\ 8\dfrac{K}{9} = \dfrac{16\mathrm{N}}{\mathrm{M}} & \text{segmentele se suprapun cu } 50\% \end{cases}$$

Se observă o pierdere a rezoluţiei în cazul în care K creşte şi N rămâne fix şi o varianţă mai mare atunci când segmentele sunt suprapuse. Avem de-a face cu un compromis varianţă-rezoluţie ca şi în cazul precedent.

2.4. Metoda Blackman-Tukey

Se poate considera că una din cauzele performanţelor slabe ale estimatorului periodogramă constă în performanţele slabe ale estimatorului folosit pentru funcţia de autocorelaţie $r_{xx}[m]$. Într-adevăr

$$r_{xx}[N-1] = \frac{1}{N}x^{*}[0]x[N-1].$$

poate avea fluctuaţii mari, datorită lipsei vreunei medieri. O posibilitate ar consta în eliminarea termenilor lui $r_{xx}[m]$ pentru $m \geq M$ $M \leq N$. Estimatorul devine:

$$P_{xx}^{C}(f) = \sum_{-M}^{M} r_{xx}[m]e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot m\cdot f} \tag{16}$$

Aceasta poartă numele de *corelogramă*.

O posibilitate de ameliorare ar consta în micşorarea ponderii valorilor $r_{xx}[m]$ pentru m mare (apropiat de *N-1*) utilizând o funcţie fereastră:

$$P_{xx}^{BT}(f) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{xx}(m)w(m)e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot m\cdot f} \tag{17}$$

unde $w[n]$ are lungimea *2M-1* şi valoarea zero pentru $|m| \geq M$.

Se demonstrează că:

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)d\alpha \xrightarrow[N\to\infty]{} \Gamma_{xx}(\alpha)$$

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \frac{E_W}{N}\Gamma_{xx}^{2}(f) \quad \text{unde} \quad E_W = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^{2}[m]$$

$$Q_{BT} = 1{,}5\frac{N}{M}$$

Obs. Rezultatele tuturor acestor metode arată o oarecare superioritate ale metodelor Welch şi Blackman-Tukey faţă de metoda Bartlett, însă diferenţa în performanţă este relativ mică.

Principala observație este aceea că odată cu creşterea lungimii vectorului de date N cresc performanțele estimaților, de la această regulă făcând excepție doar periodograma.

În cazul estimaților considerați, factorul de calitate se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} Q_B &= 1{,}11 \cdot N \cdot \Delta f \\ Q_W &= 1{,}39 \cdot N \cdot \Delta f \\ Q_{BT} &= 1{,}34 \cdot N \cdot \Delta f \end{aligned} \tag{18}$$

unde N este lungimea secvenței iar Δf este lățimea de bandă la 3dB a lobului principal al ferestrei considerate. Pentru o rezoluție dată putem mări calitatea estimatului mărind lungimea vectorului de date.

3. Aplicații rezolvate

Exemplul 1. Fie un semnal analogic de forma: $x(t) = \sin(2\pi \cdot 135 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot (135 + \Delta F) \cdot t)$, eşantionat cu frecvența de 1000Hz. Să se determine expresia semnalului eşantionat şi, având la dispoziție 16 eşantioane să se evalueze puterea spectrală:

$P(f) = \frac{1}{N}|X(f)|^2$ la frecvențele $f_k = \frac{k}{L}$ *k=0,1,... L-1* pentru *L=16,32,64 şi 256* pentru $\Delta F = 60Hz$ şi $\Delta F = 10Hz$.

```
%Functia ce realizeaza estimarea spectrului de putere cu
%metoda periodogramei simple

function [spectru_simplu,frecv]=periodo_simpla(data,lung_spec);
X=fft(data,lung_spec);
spectru=X.*conj(X);
spectru_simplu=spectru/lung_spec;
spectru_simplu=spectru_simplu(1:1+lung_spec/2);
frecv=(0:lung_spec/2)/lung_spec;

%P12_1
n=0:1:15;
df=60; %se va modifica apoi cu df=10
lung_spec=16 ; %se va modifica apoi cu 32,64,2 56
x=sin(2*pi*135*n/1000)+cos(2*pi*(135+df)*n/1000);
[Pxx,f]=periodo_simpla(x,lung_spec);
stem(f,Pxx,'filled');
xlabel('frecventa normalizata'); ylabel('Amplitudine');
title('Periodograma simpla');
```

Exemplul 2. Fie un proces alb gaussian de medie nulă şi varianță $\sigma_P^2 = 0.25$ de lungime 2048 eşantioane. Se va reprezenta estimatorul realizat cu ajutorul periodogramei simple şi se va calcula deplasarea şi varianța sa. Se va repeta aceeaşi procedură pentru un proces de 512, 1024 şi 4096 de eşantioane. Pentru generarea zgomotului alb, gaussian se foloseşte funcția **`randn`** iar pentru calculul deplasării şi a varianței funcțiile **`mean`** şi **`std`**.

```
%P12_2
lung_p=512; %se modifică cu 1024 respectiv 4096
p=randn(1,lung_p)*sqrt(0.25);
[Ppp,f]=periodo_simpla(p,lung_p);
plot(f,10*log10(Ppp));
xlabel('Frecventa normalizata'); ylabel('Amplitudine dB');
title('Periodograma simpla a unui process alb (2048 puncte)');
```

```
depl=mean(Ppp)
varianta=std(Ppp)^2
```

Procesul aleator, fiind un process alb, de tip gaussian, va avea funcția densitate spectrală constantă şi egală cu $\sigma_P^2 = 0.25$ pentru toate frecvențele. Se verifică deci că estimatorul spectral simplu conține şi eroarea sistematică şi că varianța sa nu depinde de durata observațiilor. Se spune că este *estimator neconsistent*.

Pentru a observa performanțele periodogramei rulați programul `perf_periodogram`.

Exemplul 3. Pentru acelaşi proces de la exercițiu precedent se va calcula şi reprezenta estimatorii spectrali mediați şi modificați. Se va calcula eroarea sistematică şi varianța acestora şi se vor studia efectul diferitelor ferestre asupra periodogramei modificate. Pentru obținerea ferestrelor vom utiliza funcțiile definite în MATLAB (`boxcar, triang, hamming, hanning, blakman`).

```
%Generarea functiei ce realizeaza periodograma mediata
%data-lungimea datelor ; M-lungimea segmentului ;
%nfft- lungimea pe care se va reprezenta spectru ;
function [periodo_mediata,frecv]=periodo_mediata(data,M,nfft);
N=length(data);
K=N/M;
sum=0;
for i=1:K;
   X=fft(data((i-1)*M+1:i*M),nfft);
   sum=sum+X.*conj(X);
end;
frecv=(0:nfft/2)/nfft;
periodo_mediata=sum(1:length(frecv))/(K*M);

%P12_3
clf;
lung_p=2048;
p=randn(1,lung_p)*sqrt(0.25);
lung_segm=512; % aceeasi pasi pentru lung_segm=256, 128, 64;
[Spp,f]=periodo_mediata(p,lung_segm,256);
plot(f,10*log10(Spp));
xlabel('Frecventa normalizata'); ylabel('Amplitudine');
hold on;
disp('pentru K=4 segmente');
medie=mean(Spp)
varianta=std(Spp)^2
```

Tabelul 1

Lungimea segmentelor	Rezoluția frecvențială $\frac{\Delta\nu}{\nu_C}$	Media	Varianța
512			
256			
128			
64			

Se poate verifica că acest estimator este deplasat, dar se remarcă o scădere a varianței odată cu creşterea numărului de segmente utilizate K. Se completează tabelul 1 cu datele obținute. Dacă numărul de eşantioane ale semnalului rămâne constant iar lungimea segmentului scade, ce se observă?

```
%Generarea functiei ce realizeaza periodograma modificata
%data - vectorul de intrare
%M - lungimea segmentelor
%nfft - nr. de puncte in care se calculeaza fft-ul
%fereastra - vectorul ce contine fereastra
function [periodo_modif,frecv]=periodo_modif(data,M,nfft,fereastra);
N=length(data);
K=N/M;
U=sum(fereastra.*fereastra);
suma=0;
for i=1:K;
   x=data(((i-1)*M+1):i*M);
   x=x.*fereastra';
   X=fft(x,nfft);
   S=X.*conj(X);
   suma=suma+S;
end;
frecv=(0:nfft/2)/nfft;
periodo_modif=suma(1:length(frecv))/(K*U);

%P12_4
lung_p=2048;
p=randn(1,lung_p)*sqrt(0.25);
lung_segm=512; %se va modifica la fiecare fereastra cu 256, 128, 64
fereastra=boxcar(lung_segm);
%se va modifica ulterior cu alta fereastra
[Spp,f]=periodo_modif(p,lung_segm,lung_segm,fereastra);
plot(f,10*log10(Spp),'b');
xlabel('Frecventa normalizata'); ylabel('Amplitudine dB');
hold on;
medie=mean(Spp)
varianta=std(Spp)^2
```

Pentru a vizualiza performanțele celor doi estimatori se vor utiliza funcțiile:

```
      perf_per_med;
      perf_per_modif;
```

Exemplul 4. Pentru acelaşi proces de la exercițiul precedent se va calcula şi reprezenta estimatorul spectral Blackman-Tukey pentru fereastră rectangulară şi fereastră Hanning.

```
%Generarea functiei ce realizeaza estimatorul B-T
function [per_bt,frecv]=per_bt(data,fereastra);
fereastra=fereastra';
rdata=xcorr(data,'biased');
M=length(fereastra);
N=length(rdata);
if length(rdata)==length(fereastra)
   fereastra=fereastra;
elseif length(rdata)>length(fereastra)
   k=round((N-M)/2);
   fereastra=[zeros(1,k),fereastra,zeros(1,N-M-k)];
```

```
else N<M
   error('lungimea ferestrei mai mare decit lungimea vectorului autocorelatie');
end;
rdd=rdata.*fereastra;
per_bt=abs(fft(rdd));
frecv=(0:length(per_bt)/2)/length(per_bt);
per_bt=per_bt(1:length(frecv));

%P12_5
lung_p=512;
p=randn(1,lung_p)*sqrt(0.25);
[Sbt,f]=per_bt(p,hanning(2*lung_p-1));
plot(f,10*log10(Sbt));
xlabel('Frecventa normalizata'); ylabel('Amplitudine dB');
title('Estimatorul Blackman-Tukey pentru un process alb');
depl=mean(Sbt);
varianta=std(Sbt)^2;
% se realizeaza aceeasi pasi dar cu o alta fereastra
```

Pentru a vizualiza performanțele estimatorului utilizat anterior folosiți funcția:

```
perf_BT;
```

Exemplul 5. Vom analiza un semnal format din două sinusoide peste care se suprapune zgomot, una din cele două sinusoide având o amplitudine foarte mică în raport cu amplitudinea celeilalte.

Prima sinusoidă	A doua sinusoidă	Zgomotul
-frecvența= 25 Hz	- frecvența= 50 Hz	-media = 0
- amplitudine= 1	- amplitudine =0.01	- $\sigma_w = 0.031$

Frecvența de eşantionare este de 200 Hz iar lungimea N a semnalului va avea valorile {512, 2048, 16384}. Se va determina în fiecare caz un estimator simplu.

Apoi, se va determina estimatorii mediați şi modificați pentru perechile de valori *K* şi *N*. *N* reprezintă lungimea semnalului iar *K* numărul de secțiuni.

(N=512, K=1), (N=2048, K=4), (N=16384, K=16)

```
%P12_6
lungime_semnal=2^9; %se va modifica ulterior cu 1024…..
n=0:lungime_semnal-1;
F1=25; F2=50; Fs=200;
sigma=0.031;
y=sin(2*pi*F1/Fs*n)+0.01*sin(2*pi*F2/Fs*n)+randn(1,lungime_semnal)*sigma;

%Estimatorul simplu (Periodograma)
[spectru_simplu,frecv]=periodo_simpla(y,lungime_semnal) ;
subplot(2,1,1) ;
plot(frecv,10*log10(spectru_simplu)) ;
title('512 puncte') ;
```

Se remarcă aici, utilizând estimatorul simplu, că vârful caracteristicii semnalului care are amplitudinea maximă apare în mod distinct. Dar estimatorul fiind inconsistent, varianța datorată contribuției zgomotului nu este atenuată. Din acest motiv, componenta spectrală a sinusoidei cu amplitudine mică nu apare clar. Estimatorul simplu nu permite să se detecteze un semnal de putere scăzută atât timp cât varianța estimatorului este mare.

```
%P12_7
lungime_semnal=2^9; %se va modifica ulterior cu 2^12, 2^14 ...
n=0:lungime_semnal-1;
F1=25; F2=50; Fs=200;
sigma=0.031;
y=sin(2*pi*F1/Fs*n)+0.01*sin(2*pi*F2/Fs*n)+randn(1,lungime_semnal)*sigma;

%Estimatorul mediat (metoda Bartlett)
lungime_segment=2^9;
[spectru_mediat,frecv]=periodo_mediata(y,lungime_segment,lungime_segment);
subplot(2,1,1);plot(frecv,10*log10(spectru_mediat));
title(['L=',num2str(lungime_semnal),'
K=',num2str(lungime_semnal/lungime_segment)]);
```

Se observă că pentru aceeaşi rezoluţie frecvenţială, ceea ce presupune L/K=constant, creşterea numărului K de secţiuni permite atenuarea puternică a varianţei estimatorului şi, în consecinţă, detectarea şi a componentei de putere redusă.

Exemplul 6. Estimatorul modificat (metoda Welch). Se va relua semnalul din aplicaţia numărul 3 şi se va utiliza de această dată estimatorul modificat, aplicând o fereastră de tip Hamming, apoi una Blackman în următoarele cazuri: (N=512, K=1), (N=2048, K=4), (N=16384, K=16). Să se compare aceste rezultate cu cele obţinute cu estimatorul de mediere.

```
%P12_8
lungime_semnal=2^9; %se va modifica ulterior cu 2^12, 2^14 ...
n=0:lungime_semnal-1;
F1=25; F2=50; Fs=200;
sigma=0.031;
y=sin(2*pi*F1/Fs*n)+0.01*sin(2*pi*F2/Fs*n)+randn(1,lungime_semnal)*sigma;

%Estimatorul modificat
lung_segment=2^9;
fereastra=hamming(lung_segm);
[spectru_modif,frecv]=periodo_modif(y,lung_segment,lung_segm,fereastra);
subplot(2,1,1); plot(frecv,10*log10(spectru_modif));
title('Fereastra hamming');
xlabel('frecventa normalizata'); ylabel('Amplitudine');
```

Calculul se reface, de data aceasta utilizând o fereastră Blackman. Putem de asemenea să comparăm efectul utilizării ferestrei triunghiulare sau de tip Hanning.

În cazul periodogramei mediate şi a celei modificate estimarea este satisfăcătoare. Comparând aceste rezultate cu cele date de estimatorul de mediere, se remarcă lărgirea vârfurilor detectate efect datorat lăţimii lobului principal al ferestrei utilizate (în domeniul spectral). Acesta poate fi un dezavantaj în estimarea frecvenţei acestor vârfuri (lărgite), dar compensaţia constă în faptul că frecvenţele semnalelor sinusoidale nu vor mai coincide cu frecvenţele armonice.

Exemplul 7. Se analizează semnalul propus anterior cu metoda Blackman-Tukey. Se alege lungimea ferestrei spectrale de 512, 2048 şi 16384.

```
%P12_9
lungime_semnal=2^9; %se va modifica ulterior cu 2^12, 2^14 ...
n=0:lungime_semnal-1;
```

```
F1=25; F2=50; Fs=200;
sigma=0.031;
y=sin(2*pi*F1/Fs*n)+0.01*sin(2*pi*F2/Fs*n)+randn(1,lungime_semnal)*sigma;

%Estimatorul Blackman-Tukey
lung_segm=2^9; % se va modifica ulterior cu 2^12, 2^14
[Ybt,f]=per_bt(y,hanning(lung_segm*2-1));
plot(f,10*log10(Ybt));
```

4. Aplicații propuse

1. Să se prelucreze semnalul din exemplul 3 şi calculați estimatorul spectral modificat pentru diferite tipuri de ferestre (Hanning, triunghiulară). Comentați rezultatele.

2. Generați de această dată un semnal format din două sinusoide ale căror frecvențe sunt adte mai jos, la care adăugați un zgomot alb, gaussian, centrat de dispersie 0.031.

Prima sinusoidă	A doua sinusoidă	Zgomotul
-frecvența= 25,4 Hz	- frecvența= 51,3 Hz	-media = 0
- amplitudine= 1	- amplitudine =0.01	-dispersia = 0.031

Încercați utilizarea unui estimator simplu pentru lungimi ale semnalului de N=256, 512, 1024 şi observați care sunt frecvențele armonice.

Treceți apoi la utilizarea estimatorului de mediere cu {N=2048, K=8}, {N=4096, K=16}, {N=4096, K=8}. Pentru fiecare caz, care sunt frecvențele armonice? Depind aceste frecvențe de N? Comentați rezultatele. Aplicați estimatorul modificat pentru diferite tipuri de ferestre şi estimatorul Blackman-Tukey. Comentați rezultatele.