

## Lucrarea 11

### **Efectele cuantizării prin rotunjire ale produselor și sumelor (cicluri limită) și depășirile în filtrele digitale**

#### **1. Oscilații cu ciclu-limită în sisteme recursive**

Prezența unuia sau a mai multor cuantizoare în implementarea unui filtru digital conduce la un dispozitiv neliniar a cărui caracteristică poate fi semnificativ diferită de cea a filtrului ideal. De exemplu, un filtru digital recursiv poate prezenta *oscilații* nedorite la ieșirea sa, cum se va vedea în continuare, chiar în absența unui semnal de intrare.

Ca urmare a operațiilor aritmetice de precizie finită realizate în filtrele digitale, unele rezultate (adunare, multiplicare) pot depăși domeniul pe care sunt reprezentate dacă semnalul de intrare are un nivel prea mare. *Depășirea* reprezintă o altă formă de distorsiune neliniară nedorită asupra semnalului dorit la ieșirea filtrului. Prin urmare, trebuie luate precauții speciale la scalarea semnalului de intrare, pentru a preveni depășirea, sau cel puțin, de a minimiza frecvența sa de apariție.

Efectele neliniare datorate aritmeticii cu precizie finită îngreunează analiza performanțelor unui filtru digital. Pentru a face o analiză a efectului de cuantizare, se adoptă o caracterizare statistică a erorilor de cuantizare, ceea ce conduce în final la un model liniar pentru filtru. Astfel se vor putea evidenția efectele erorii de cuantizare la implementarea filtrelor digitale. Abordarea de mai jos se referă doar la realizările în virgulă fixă, în care efectul de cuantizare este mult mai pregnant.

În sistemele recursive, neliniaritatea datorată operațiilor matematice poate cauza oscilații periodice la ieșire, chiar dacă secvența de intrare este zero sau o valoare constantă nenulă. Astfel de oscilații în sistemele recursive sunt denumite **cicluri limită** și pot fi direct atribuite *erorii de rotunjire la multiplicare* și *erorii de depășire la adunare*.

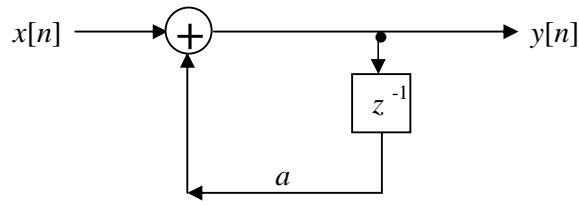
Fenomenul ciclurilor limită este diferit de comportamentul zgomotului cauzat de cuantizare. Efectele cuantizării se identifică cu zgomotul când nivelul semnalului este mare și foarte variabil, făcând eroarea de cuantizare, la orice moment de timp, aproape independentă de erorile anterioare. Când nivelul semnalului este scăzut, erorile cauzate de cuantizare devin corelate. Când semnalul de intrare este zero, comportamentul aleatoriu dispare devenind complet determinist. Oscilațiile în absența semnalului de intrare sunt numite *cicluri-limită cu intrare zero*. Astfel de oscilații sunt periodice, dar nu neapărat sinusoidale. Ele sunt susceptibile a apărea într-un filtru ce are feedback (reacție). Filtrele IIR au întotdeauna mecanisme tip feedback în interiorul lor, deci pot apărea astfel de oscilații la ieșirea lor. Pe de altă parte, filtrele FIR nu conțin mecanisme gen feedback deci ele nu vor prezenta oscilații la ieșire. Acesta este un avantaj al filtrelor FIR asupra IIR. Tratarea generală a comportării pe cicluri limită a filtrelor digitale este dificilă, motiv pentru care analiza se va face pe structuri de ordinul 1 și 2. Pentru a ilustra caracteristica unei oscilații cu ciclu limită, se va considera în continuare un sistem cu un singur pol situat la  $z=a$ , descris de ecuația liniară cu diferențe:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \quad (1)$$

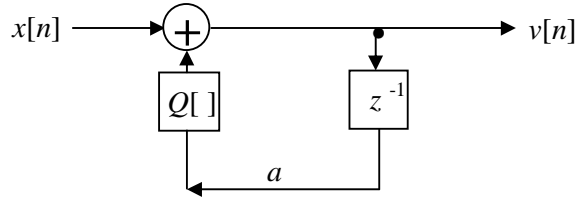
Sistemul ideal este reprezentat în figura 1. Pe de altă parte, sistemul care este descris de ecuația neliniară cu diferențe:

$$v[n] = Q[av[n-1]] + x[n], \quad (2)$$

este realizat ca în figura 2:



**Figura 1** Sistem recursiv ideal cu un singur pol



**Figura 2** Sistem recursiv neliniar real

**Problema 1** Fie sistemul real din figura 2 implementat cu o aritmetică în virgulă fixă cu patru biți pentru amplitudine și un bit pentru semn. Cuantizarea după multiplicare este de rotunjire a produsului prin adaos. În tabelul 1 se prezintă răspunsul sistemului real pentru patru valori diferite ale polului  $z=a$  și cu intrarea  $x[n]=\beta\delta[n]$ , unde  $\beta=15/16$ , care are reprezentarea binară 0.1111. În cazul ideal, răspunsul sistemului ar trebui să scadă exponențial spre zero ( $y[n] = a^n \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ ). În sistemul real totuși, răspunsul  $v[n]$  atinge o stare stabilă periodică la ieșire, cu o perioadă ce depinde de valoarea polului. Când polul este pozitiv, oscilațiile au loc cu o perioadă  $N_p = 1$ , astfel încât ieșirea atinge o valoare constantă de  $1/16$  pentru  $a=1/2$  și  $1/8$  pentru  $a=3/4$ . Acest fenomen este numit ciclu limită cu frecvență zero.

Când polul este negativ, secvența de ieșire oscilează între valori pozitive și negative ( $\pm 1/16$  pentru  $a = -1/2$  și  $\pm 1/8$  pentru  $a = -3/4$ ). Prin urmare, perioada este  $N_p = 2$ . Obținem astfel o oscilație de amplitudine constantă, a cărei frecvență este  $\theta_0=\pi$  și a cărei amplitudine este  $\pm 1/16$  sau  $\pm 1/8$ .

**Tabel 1** Cicluri limită pentru un filtru trece-jos, cu un singur pol

n	$a=0.1000$ $=1/2$		$a=1.1000$ $=-1/2$		$a=0.1100$ $=3/4$		$a=1.1000$ $=-3/4$	
0	1	0.1111 (15/16)	1	0.1111 (15/16)	1	0.1011 (11/16)	1	0.1011 (11/16)
1	1/2	0.1000 ( 7/16)	-1/2	1.1000 (-7/16)	3/4	0.1000 ( 8/16)	-3/4	1.1000 (-8/16)
2	1/4	0.0100 ( 3/16)	1/4	0.0100 ( 3/16)	9/16	0.0110 ( 6/16)	9/16	0.0110 ( 6/16)
3	1/8	0.0010 ( 1/16)	-1/8	1.00 (-1/16)	27/64	0.0101 ( 5/16)	-27/64	1.0101 (-5/16)
4	1/16	0.0001 ( 1/16)	1/16	0.0001 ( 1/16)	81/256	0.0100 ( 4/16)	81/256	0.0100 ( 4/16)
5	1/32	0.0001 ( 1/16)	-1/32	1.0001 (-1/16)	243/1024	0.0011 ( 3/16)	-243/1024	1.0011 (-3/16)
6	1/64	0.0001 ( 1/16)	1/64	0.0001 ( 1/16)	729/4096	0.0010 ( 2/16)	729/4096	0.0010 ( 2/16)
7	1/128	0.0001 ( 1/16)	-1/128	1.0001 (-1/16)	1123/8413	0.0010 ( 2/16)	-1123/8413	1.0010 (-2/16)
8	1/256	0.0001 ( 1/16)	1/256	0.0001 ( 1/16)	266/2657	0.0010 ( 2/16)	266/2657	0.0010 ( 2/16)

Aceste cicluri-limită apar ca rezultat al efectului de cuantizare după multiplicare. Când secvența de intrare a filtrului  $x[n]$  devine zero, ieșirea intră într-un ciclu limită după un număr de iterații. Ieșirea rămâne în acest ciclu limită până când un alt semnal de intrare, suficient de puternic, este aplicat pentru a scoate sistemul din ciclu.

În mod similar, ciclurile limită cu intrare zero apar din condiții inițiale nenule cu intrarea  $x[n]=0$ . Amplitudinea ieșirii pe perioada ciclului limită este inclusă într-un domeniu de valori care

este numit “*banda moartă*” a filtrului. Frecvența și amplitudinea ciclului limită depind de coeficienți, condiții inițiale, metoda de cuantizare și lungimea cuvântului.

Astfel, pentru un filtru de ordinul întâi *banda moartă* este dată de relația (3).

$$|v[n-1]| \leq \frac{\frac{1}{2} 2^{-b}}{1-|a|} \quad (3)$$

Pentru filtrul de ordinul întâi, când ieșirea filtrului se încadrează în această limită și intrarea este zero, polul rezultat este pe cercul unitate și filtrul va suporta un comportament de ciclu limită. Dacă coeficientul  $a$  este pozitiv, răspunsul ciclului limită se numește *dc* (are amplitudine și semn constante), iar dacă  $a$  este negativ comportamentul ciclului limită are amplitudine constantă dar semn alternant.

Expresia din (3) definește zona sau banda moartă pentru un filtru cu un singur pol. De exemplu, când  $b = 4$  și  $|a| = 1/2$  banda moartă are domeniul amplitudinilor  $(-1/16, 1/16)$ , iar pentru  $b = 4$  și  $|a| = 3/4$ , banda moartă crește la  $(-1/8, 1/8)$ .

Ciclul limită în cazul unui filtru cu doi poli este mai complex datorită faptului că pot apărea o mai mare varietate de oscilații. În acest caz sistemul ideal cu doi poli este descris de ecuația liniară cu diferențe:

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n], \quad (4)$$

în timp ce sistemul real este descris de ecuația neliniară cu diferențe:

$$v[n] = Q_r[a_1 v[n-1]] + Q_r[a_2 v[n-2]] + x[n]. \quad (5)$$

Când polii sunt complecși conjugați  $z = re^{\pm j\theta}$  domeniul benzii moarte este:

$$|v[n-2]| \leq \frac{\frac{1}{2} 2^{-b}}{1-|a_2|}. \quad (6)$$

Se observă că limitele *benzii moarte* depind doar de  $|a_2|$ . Parametrul  $a_1 = 2r \cos \theta$  determină doar frecvența oscilațiilor.

## Problema 2

- Cât este banda moartă pentru un filtru recursiv de ordinul 1 cu  $a = (1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 9/10)$  iar produsul se cuantizează pe 4 biți.
- Determinați valoarea lui  $a$  astfel încât

$$|v[n-1]| \leq \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}$$

**Exemplul 1** va încerca să pună în evidență existența unui ciclu limită într-un filtru recursiv de ordinul întâi.

- Fie sistemul din figura 1 descris de ecuația 1. Se scrie un script Matlab ce calculează răspunsul la impuls al filtrului, cu precizie infinită, pentru  $0 \leq n \leq 10$ . Obs. (din fereastra Matlab se va seta modul de reprezentare a datelor sub formă rațională *Files-Preferences-General-Numeric Format(Rational)*).
- Pentru sistemul din figura 2 se procedează ca la punctul a) cu deosebirea că produsul  $ay[n]$  se cuantizează cu ajutorul funcției *quant* (vezi: `help quant`). Ieșirea se va calcula astfel:  $y[n] = Q[ay[n-1]] + x[n]$   
 $y[-1] = 0 \quad x[n] = (15/16)\delta[n]$

Pentru acest subpunct se poate folosi programul **P11\_1.m** descris mai jos:

```
%Program 11_1
%Calculul raspunsului la impuls pentru un sistem recursiv
%de ordinul 1 cu produsul cuantizat pe n biti
a=input('Introduceti polul sistemului=');
x=15/16;
y(1)=0;
B=4;
N=10;
for i=2:N+2;
    y(i)=quant(a*y(i-1),2^-B)+x; %ecuatia cu diferente
    x=0;
end
k=0:N;
stem(k,y(2:N+2));
disp('      n      y(n)');
disp([(0:N)',y(2:N+2)']);
ylabel('Amplitudine');xlabel('n');
title('Ciclul limita intr-un filtru recursiv de ordin 1');
```

- c) se va rula scriptul **P11\_1.m** pentru mai multe valori ale coeficientului  $a$  ( $1/4, 1/2, -1/2, 3/4, -3/4$ ). Ce observați? Comentați rezultatul.
- d) pentru  $a=1/2$  schimbați  $B=5$ . Ce observați? Comentați rezultatul.

**Exemplul 2** va încerca să pună în evidență apariția ciclului limită datorat cuantizării produselor pentru un filtru recursiv de ordinul 2. Scriptul va folosi în acest caz relația (5), banda moartă fiind dată de relația (6).

Se vor parcurge aceleași etape ca la Exemplul 1, scriptul folosit fiind în acest caz **P11\_2.m** :

```
%Program P11_2
%Calculul raspunsului la impuls pentru un sistem recursiv
%de ordinul 2 cu produsele cuantizate pe B biti
a1=input('Introduceti coeficientul a1=');
a2=input('Introduceti coeficientul a2=');
x=15/16;
y(1)=0;y(2)=0
B=4;
N=30;
for i=3:N+3;
    y(i)=quant(a1*y(i-1),2^-B)+quant(a2*y(i-2),2^-B)+x;
    x=0;
end
k=0:N;
stem(k,y(3:N+3));
disp('      n      y(n)');
disp([(0:N)',y(3:N+3)']);
ylabel('Amplitudine');xlabel('n');
title('Ciclul limita intr-un filtru recursiv de ordin 2');
```

- a) se calculează răspunsul la impuls al filtrului cu precizie infinită folosind coeficienții ( $a1=-3/4, a2=3/4$ ).
- b) pentru aceiași coeficienți, dar folosind programul P11\_2 calculați răspunsul la impuls atunci când produsele sunt cuantizate pe  $b=4$  biți.  $0 \leq n \leq 20$
- c) schimbați  $b=5$ . Ce observați? Comentați rezultatul.
- d) reluați punctul b) pentru ( $a1=-1/4, a2=1/4$ ). Ce observați? Comentați.

Este interesant de menționat ca ciclurile limită descrise anterior au rezultat prin rotunjirea produsului coeficienților filtrului cu ieșirile  $v[n-1]$  și  $v[n-2]$ . În locul rotunjirii, se poate alege trunchierea produsului la  $b$  biți. Prin trunchiere putem elimina o parte din ciclurile limită. Totuși trunchierea are ca rezultat o deplasare a valorii medii a erorii, excepție făcând cazul când se folosește reprezentarea semn-valoare, unde eroarea de trunchiere este simetrică față de zero. În general, această deplasare este nedorită în implementarea filtrelor digitale.

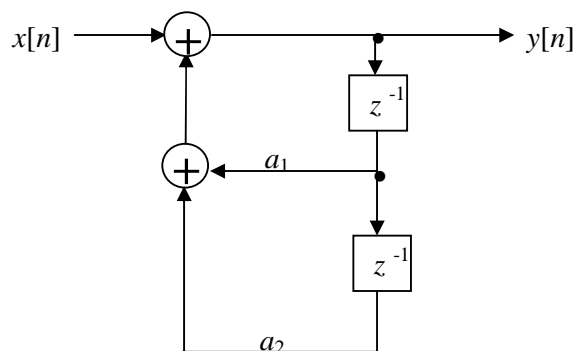
La realizarea în paralel a diverselor sisteme IIR de ordin înalt, fiecare secțiune de ordinul doi a filtrului generează propriul ciclu limită, fără interacțiune între secțiunile de filtru de ordin doi. Prin urmare, ieșirea este o sumă a ciclurilor limită cu intrare zero a secțiunilor individuale. În cazul realizării în cascadă pentru un sistem IIR de ordin înalt, ciclurile limită sunt mult mai greu de analizat. În particular, când prima secțiune de filtru generează un ciclu limită cu intrare zero, ciclul limită de ieșire este filtrat de secțiunile succesive. Dacă frecvența ciclului limită cade lângă frecvența de rezonanță a secțiunii de filtru din succesiune, amplitudinea secvenței va fi mărită de caracteristica de rezonanță. În general, trebuie evitate astfel de situații.

În plus față de clasa anterioară de cicluri limită datorate rotunjirii în multiplicări, un tip mult mai sever de cicluri limită pot apare datorită depășirii aritmetice din interiorul filtrelor care folosesc aritmetica în complement față de unu sau în complement față de doi. Amplitudinea acestor cicluri limită (oscilații de depășire) poate fi micșorată când sunt folosiți suficienți biți pentru reprezentare. O depășire la adunarea a două sau mai multe numere binare apare atunci când suma depășește lungimea disponibilă a cuvântului la implementarea digitală a sistemului. De exemplu, se consideră secțiunea de filtru de ordin doi prezentată în Figura 4, în care adunarea se face în aritmetica complementului față de doi.

În continuare putem scrie ieșirea  $y[n]$  astfel:

$$y[n] = g[a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n]] \quad (7)$$

unde funcția  $g[\cdot]$  reprezintă adunarea în complement față de doi. Figura 5 prezintă caracteristica intrare-ieșire  $g[v]$  a sumatorului în complement față de doi.



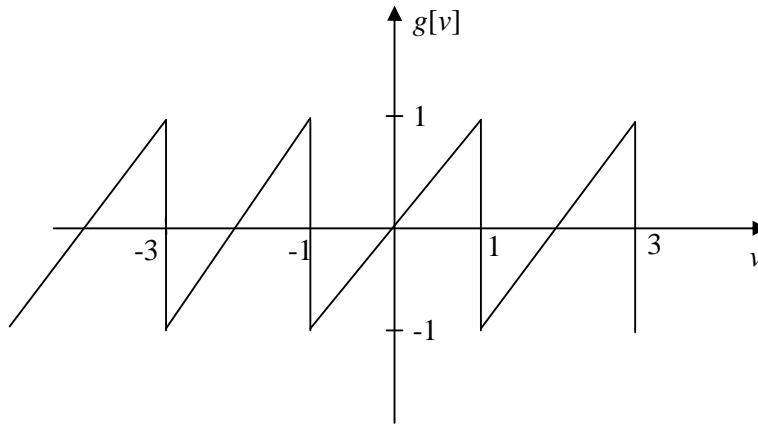
**Figura 4** Secțiune de filtru de ordin doi

Se poate observa ușor că, condiția necesară și suficientă pentru a nu apărea cicluri limită datorate depășirii este dată de relația (8) și este o condiție extrem de restrictivă ce duce la o constrângere nerezonabilă asupra oricărei secțiuni de filtru de ordin doi.

$$|a_1| + |a_2| < 1 \quad (8)$$

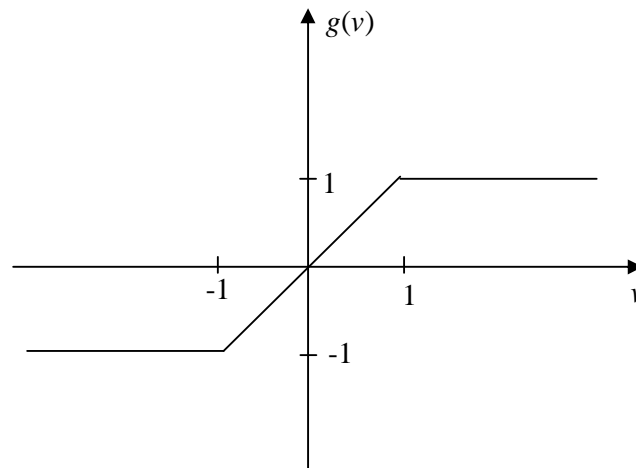
Un remediu efectiv pentru rezolvarea problemei oscilațiilor provocate de depășire este de a modifica caracteristica sumatorului, ca în figura 6, care operează cu saturare numerică. Atunci când

o depășire (sau o subdepășire) este sesizată, ieșirea sumatorului va avea valoarea maximă de capăt de scară  $\pm 1$ . Distorsiunea cauzată de această neliniaritate în sumator este de obicei mică, deoarece saturația apare rar. Folosirea unei astfel de neliniarități nu elimină necesitatea scalării semnalelor și a parametrilor sistemului, așa cum este descrisă în secțiunea următoare.



**Figura 5** Caracteristica funcțională pentru adunarea în complement față de doi a două sau mai multe numere

**Problema 3** Calculați  $y[0]$  și  $y[1]$  pentru precizie finită și sumare în complement față de doi pentru sistemul descris de ecuația (7) cu  $x[n]=0 \quad \forall n$ ,  $y[-1]=0.75$   $y[-2]=-0.75$  și  $a_1 = -3/4$ ,  $a_2 = 3/4$ .



**Figura 6** Caracteristica funcțională pentru adunare cu tăiere la  $\pm 1$

**Exemplul 3.** Se pune în evidență apariția ciclului limită datorat depășirii. Programul P11\_3 implementează relația (7) cu  $x[n]=0 \quad \forall n$ , și  $y[-1]=0.75$   $y[-2]=-0.75$ :

```
%Program p11_3
%Evidențierea apariției ciclurilor limita datorate depășirii
a1=input('Introduceți coeficientul a1=');
a2=input('Introduceți coeficientul a2=');
y=[];
y(1)=0.75;y(2)=-0.75;
B=4;
N=40;
```

```

for i=3:N+3;
    %Pentru precizie infinita
    y(i)=-a1*y(i-1)-a2*y(i-2);
    %Pentru precizie finita cu aritmetica in complement fata de doi %(vezi fig.
    5)
    %y(i)=g1(-quant(a1*y(i-1),2^-B)-quant(a2*y(i-2),2^-B),2^-B);
    %Pentru precizie finita cu sumator cu saturare (vezi fig. 6)
    %y(i)=g2(-quant(a1*y(i-1),2^-B)-quant(a2*y(i-2),2^-B),2^-B);
    %vezi functia g1 si g2
end
k=0:N;
stem(k,y(3:N+3));
disp('          n          y(n)');
disp(['(0:N)',y(3:N+3)']);
ylabel('Amplitudine');xlabel('n');
title('Ciclul limita intr-un filtru recursiv de ordin 2');

```

- Se rulează P11\_3.m cu ( $a_1=-3/4$ ,  $a_2=3/4$ ) pentru calculul cu precizie infinită;
- Se rulează P11\_3.m pentru adunarea în complement față de doi (Fig. 5). Ce observați? Comentați.
- Se rulează P11\_3.m pentru adunarea cu saturare (Fig. 6). Ce observați? Comentați.

## 2. Scalarea pentru prevenirea depășirii

Saturația aritmetică descrisă mai sus elimină ciclurile limită datorate depășirii pe de o parte, dar, pe de altă parte, duce la distorsiuni nedorite ale semnalelor, datorate neliniarității trunchierii. Pentru a limita creșterea distorsiunilor neliniare este importantă scalarea semnalului de intrare și răspunsul la impuls între intrare și orice nod intern de sumare din sistem, astfel încât depășirea să devină un eveniment rar. Pentru un filtru nerecursiv, acest efect este simțit în distorsionarea semnalului de ieșire  $y[n]$ , care este suma ponderată a intrării curente și a intrărilor anterioare. Efectul este mult mai sever pentru un filtru recursiv, deoarece erorile sunt filtrate din nou (datorită feedback-ului) ceea ce face ca filtrul să devină inutilizabil în scurt timp. În ambele cazuri, scalarea este necesară pentru reducerea amplitudinii semnalelor în anumite limite și, prin urmare, se previne depășirea în condiții normale de lucru. Aceasta se face printr-o scalare a intrării după o normă dată. Se definesc mai multe norme:

- Norma  $l_1$ .  $x(n)$  se scalează astfel încât limita sa superioară respectă condiția:

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=0}^{N-1} |h_i[m]|} = \frac{1}{l_1} \quad (9)$$

- norma  $l_\infty$ :

$$x_{\max} < \frac{1}{\max_{|\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)|} = \frac{1}{l_\infty} \quad (10)$$

- norma  $l_2$ :

$$x_{\max}^2 \leq \frac{1}{\max_i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_i(\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{\max_i \sum_{n=0}^{N-1} |h_i[n]|^2} = \frac{1}{\max_i \frac{1}{2\pi j} \oint H_i(z) H_i(z^{-1}) z^{-1} dz} = \frac{1}{l_2^2} \quad (11)$$

Având în vedere cele scrise mai sus, se poate scrie inegalitatea:

$$\left( \sum_{n=0}^{N-1} |h_i[n]|^2 \right)^{1/2} \leq \max_{\omega} |H_i(\omega)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |h_i[n]|, \quad (12)$$

adică  $l_2 \leq l_\infty \leq l_1$ .

Se observă că cea mai restrictivă normă este  $l_1$  iar cea mai puțin restrictivă este  $l_2$ .

**Problema 4** Calculați norma  $l_\infty = \max_{\omega} |H(\omega)|$  pentru un filtru ce are funcția de sistem:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}}$$

cu ajutorul metodei geometrice.

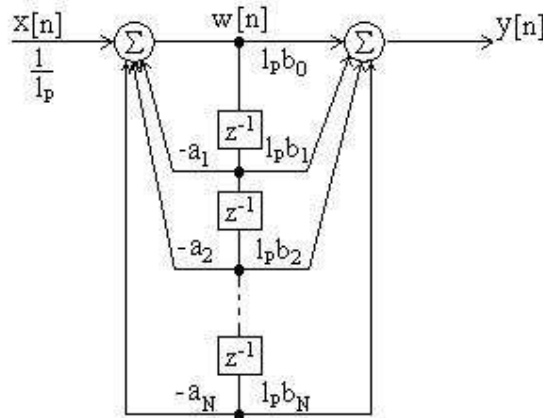
**Exemplul 4** Cu ajutorul funcției `normescal` se calculează normele  $l_\infty, l_2, l_1$ , pentru un sistem dat. Ca argumente de intrare se folosesc vectorii  $b$  și  $a$  ce conțin coeficienții de la numărător și respectiv numitor ai funcției de sistem.

```
%calculul normei linfinit, lunu, ldoi
function [linfinit,lunu,ldoi]=normescal(b,a);
%linfinit
[h,w]=freqz(b,a,1024);
linfinit=max(abs(h));
disp('linfinit=');disp(linfinit);
h=impz(b,a,1000);%se va considera ca h(1000)<< 0
%lunu
lunu=sum(abs(h));
disp('lunu=');disp(lunu);
%ldoi
ldoi=sqrt(sum(h.^2));
disp('ldoi=');disp(ldoi);
```

- a) Pentru  $r=0.8$  și  $\theta = \pi/4$  calculați cu ajutorul funcției `normescal` cele trei norme descrise mai sus. Comparați cu rezultatul de la problema 4.

- **Scalarea la forma de implementare canonică a unui sistem de ordinul 2**

( $l_p$  - norma de scalare,  $p=1,2,\infty$ )



**Figura 7** Scalarea la un filtru IIR implementat în forma canonică

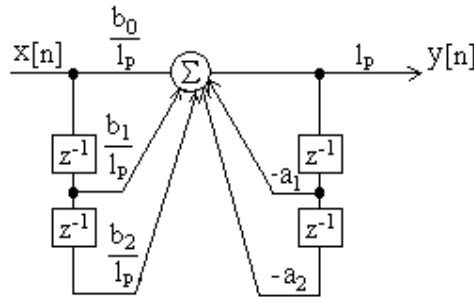


$$w[n] = -\sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n] \tag{13}$$

Scalarea intrării cu norma  $l_p$  se face pentru prevenirea depășirii în nodul  $w[n]$ . Deoarece  $w[n]$  este la ieșirea filtrului doar cu poli, pentru structura dată, norma  $l_p$  se calculează pentru filtrul cu funcția de sistem din (14).

$$H_{D2}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \tag{14}$$

• **Scalarea la implementarea în forma directă 1**



**Figura 8** Scalarea la un filtru de ordinul 2 implementat în forma directă 1

În structura din figura 8 există un singur sumator și depășirile nu sunt problematice, ceea ce reprezintă un avantaj.

**Aplicația propusă 1** Fie un sistem cu funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1} - 0.728z^{-3} + 0.1z^{-4}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.08z^{-2} - 0.264z^{-3} - 0.0504z^{-4}}$$

- a) generați un semnal cu valori ale eșantioanelor cuprinse între (-1,1) (semnal treaptă) și treceți-l prin filtrul. Reprezentați grafic semnalele  $w[n]$  și  $y[n]$  de la ieșirea filtrului doar cu poli respectiv de la ieșirea întregului filtru;
- b) calculați cele trei norme  $l_\infty$ ,  $l_2$  și  $l_1$  în scopul prevenirii depășirii în nodul  $w[n]$ .
- c) scalați pe rând semnalul de la intrare cu cele trei norme, calculați și reprezentați grafic semnalele  $w[n]$  și  $y[n]$  obținute. Ce observați?
- d) Repetați punctul c) pentru un semnal de intrare sinusoidal și un semnal aleator uniform distribuit (vezi rand).

• **Scalarea la realizarea în cascadă**

În figura 9 este prezentat un sistem implementat cu  $K$  module de ordinul doi, fiecare din acestea implementat în forma canonică, conectate în cascadă. Se notează cu  $F_k(z)$ ,  $k=1, \dots, K$ , funcția de sistem a unui modul de ordinul doi:

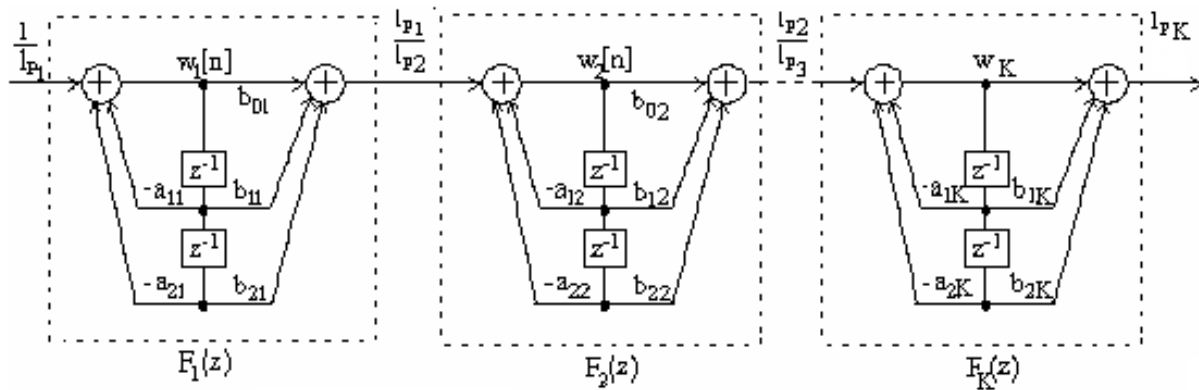
$$F_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \tag{15}$$

$l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$ ;  $i=1, 2, 3, \dots, K$ ,  $p = 1, 2, \infty$ , reprezintă norma după care s-a efectuat scalarea, iar  $H_i(\omega)$  - funcția de transfer de la intrare la nodul  $w_i$ :

$$H_i(z) = \frac{\prod_{k=1}^{i-1} F_k(z)}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}. \tag{16}$$

Coeficienții  $\frac{l_{pi}}{l_{p(i+1)}}$  pot fi încorporați în  $b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}$ .

Ținând seama de cele prezentate în paragraful precedent, scalarea este propriu-zis necesară numai pentru secțiunile pentru care normele  $l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$  sunt supraunitare. Dacă, însă,  $\|H_i(\omega)\|_p \leq 1$ , rezultă că nu este necesară scalare pentru celula respectivă, ceea ce ar corespunde unui factor de scalare unitar, fără efect asupra zgomotului de cuantizare. Totuși, dacă se scalează intrarea într-o secțiune de ordinul doi cu un factor supraunitar, care va amplifica semnalul, va crește raportul semnal/zgomot, prin utilizarea eficientă a gamei dinamice a filtrului. Astfel, scalarea poate fi privită nu numai ca un mod de a evita depășirea, ci și de adaptare a nivelului semnalului la gama dinamică a filtrului.



**Figura 9.** Scalarea la realizarea în cascadă a unui filtru cu K celule de ordinul doi

**Aplicația propusă 2** Se rescrie funcția de sistem  $H(z)$  de la aplicația 1 sub forma:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$H_1(z) = \frac{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.14z^{-2}} \quad H_2(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 + 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2}}$$

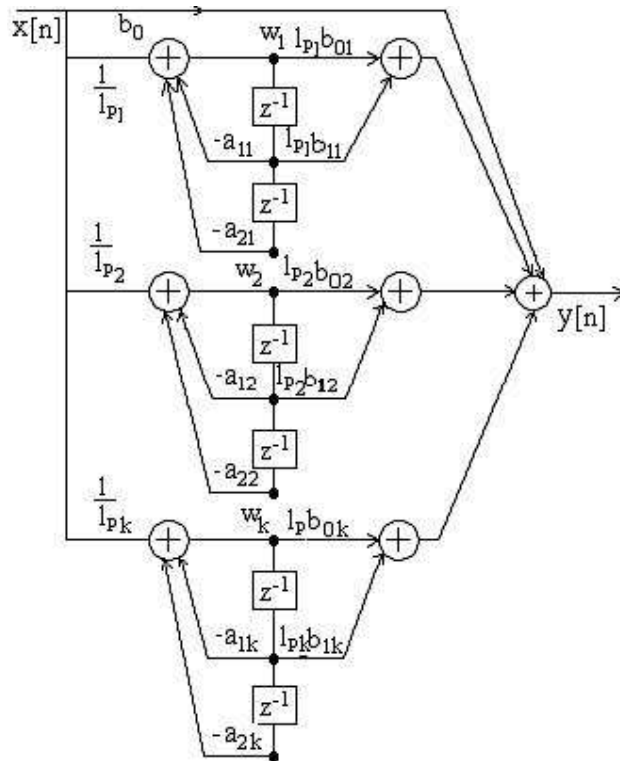
- a) calculați normele ( $l_{p1}, l_{p2}$ ;  $p = 1, 2, \infty$ ) pentru prevenirea depășirii în nodurile filtrului;
- b) procedați ca la Aplicația propusă 1, calculați și reprezentați grafic semnalele  $w_1[n]$ ,  $y_1[n]$ ,  $w_2[n]$  și  $y[n]$  în cazul în care semnalul de la intrare nu este scalat precum și în cazurile în care semnalul de la intrare este scalat cu normele  $l_{p1}, l_{p2}$ ;  $p = 1, 2, \infty$ .

• **Scalarea la realizarea în paralel**

În Figura 10 este prezentat un sistem implementat cu  $K$  module de ordinul doi, conectate în paralel.

$l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$ ;  $i=1, 2, 3, \dots, K$ ,  $p = 1, 2, \infty$ , reprezintă norma după care s-a efectuat scalarea.

$H_i(\omega)$  - funcția de transfer de la intrare  $x[n]$  la nodul  $w_i$ . Funcția de sistem corespunzătoare este



**Figura 10.** Scalarea la realizarea în paralel a unui filtru cu K celule de ordinul 2

$$H_i(z) = \frac{1}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

**Aplicația propusă 3** Se rescrie  $H(z)$  de la aplicația 1 sub forma:

$$H(z) = c + H_1(z) + H_2(z)$$

$$H_1(z) = \frac{0.3725 - 0.1297z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2}} \quad H_2(z) = \frac{2.6116 - 1.8527z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.14z^{-2}} \quad c = -1.9841$$

- a) calculați normele  $l_{p1}$  și  $l_{p2}$ ,  $p = 1, 2, \infty$ , necesare scalării pentru prevenirea depășirii în nodurile  $w_1[n]$  și  $w_2[n]$ .
- c) procedați ca la Aplicația propusă 1 și 2 conform figurii 10, calculați și reprezentați grafic semnalele  $w_1[n]$ ,  $y_1[n]$ ,  $w_2[n]$ ,  $y_2[n]$  și  $y[n]$  în cazul în care semnalul de la intrare nu este scalat precum și în cazurile în care semnalul de la intrare este scalat cu normele  $l_{p1}, l_{p2}$ ;  $p = 1, 2, \infty$ .