CAPITOLUL 3

PREDICȚIE LINIARĂ ŞI FILTRARE LINIARĂ OPTIMALĂ

Proiectarea filtrelor pentru estimarea semnalelor este o problemă ce apare frecvent in proiectarea sistemelor de comunicații, de control şi alte aplicații.

În acest capitol problema proiectării filtrelor optimale va fi abordată din punct de vedere statistic. Pentru simplitatea tratării, filtrele se impun a fi liniare iar criteriul de optimizare se bazează pe minimizarea erorii pătratice medii. Drept consecință, în determinarea filtrelor optimale este necesară numai statistica de ordinul doi (funcțiile de autocorelație şi corelație) ale procesului presupus staționar. De asemenea, se va urmări proiectarea filtrelor optimale pentru predicția liniară care este un domeniu important în procesarea de semnal cu aplicații în domenii diverse ca:

-procesarea semnalului vocal;

-procesarea de imagini;

-suprimarea zgomotului in sistemele de comunicații etc.

3.1. Predicție înainte (forward)

Fie $x[n]$ un proces aleator staționar. Se doreşte estimarea valorii procesului la un moment dat, pe baza unui număr finit p de observații (eşantioane) consecutive anterioare.

În cazul general, valoarea estimată se notează $\hat{x}[n]\big|_{M_p^x[n-r]}$,

unde $M_p^x[n-r]=\{x[n-r-p+1],...,x[n-r]\}$, $r>1$, reprezintă vectorul format din p eşantioane consecutive anterioare momentului n-r, inclusiv. În acest caz, se spune că s-a realizat predicția înainte cu r paşi de ordinul p a eşantionului $x[n]$.

Un interes special prezintă *predictorul liniar înainte cu un pas* (r=1), care determină valoarea estimată $\hat{x}[n]$ ca o combinație liniară ponderată a ultimelor p valori: $x[n-1], x[n-2],.., x[n-p]$.

Valoarea estimată se determină cu relația

$$\hat{x}[n]=-\sum_{k=1}^{p}a_p[k]x[n-k] \tag{3.1}$$

unde $\{-a_p[k]\}$ reprezintă ponderile combinației liniare, numite *coeficienți de predicție* ai predictorului înainte cu un pas, de ordin p.

Conform relației (3.1), schema predictorului liniar cu un pas, de ordinul p este dată în figura 3.1.

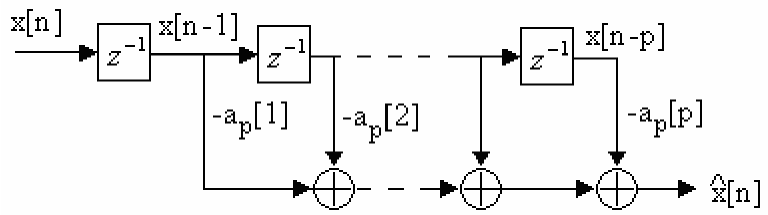


Fig. 3.1. Predictor liniar cu un pas, de ordin *p*

Diferența dintre valoarea $x[n]$ şi cea predictată $\hat{x}[n]$ se numeşte *eroare de predicție înainte* şi se notează $f_p[n]$.

$$f_p[n]=x[n]-\hat{x}[n]=x[n]+\sum_{k=1}^{p}a_p[k]x[n-k] \tag{3.2}$$

Pe baza relației (3.2), eroarea de predicție rezultă conform schemei din figura 3.2.

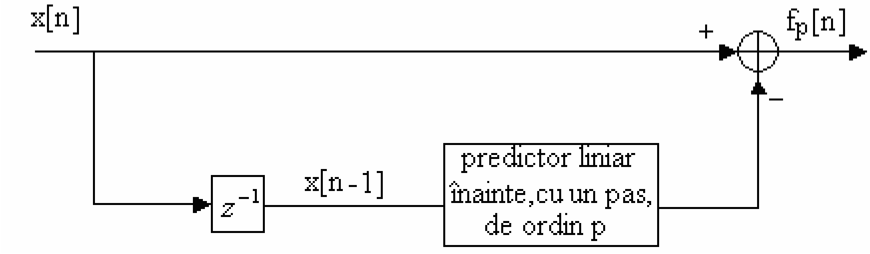


Fig. 3.2. Legătura dintre predictorul liniar înainte şi filtrul erorii de predicție

Structura din figura 3.2 se mai numeşte *filtrul erorii de predicție,* cu intrarea $x[n]$ şi ieşirea $f_p[n]$. O realizare echivalentă pentru filtrul erorii de predicție este prezentată în figura 3.3, care reprezintă o realizare în formă directă a unui filtru FIR cu funcția de sistem:

$$A_p(z)=\sum_{k=0}^{p} a_p[k]z^{-k} \tag{3.3}$$

unde $a_p[0]=1$.

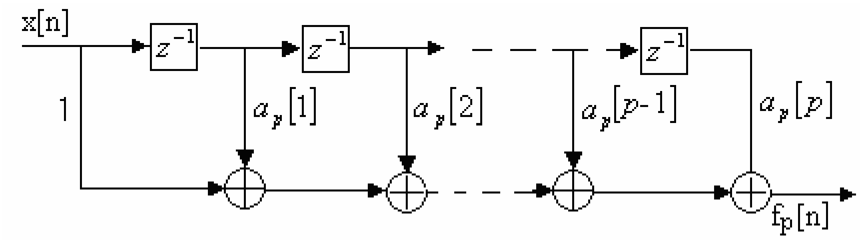


Figura 3.3. Filtrul erorii de predicție

Eoarea pătratică medie de predicție liniară înainte este

$$\xi_p^f = E\left[f_p^2[n_i]\right] = E\left[\sum_{k=0}^{p} a_p[k]x[n_i-k]\sum_{l=0}^{p} a_p[l]x[n_i-l]\right]=$$

$$=E\left[x[n_i]+...+a_p[p]x[n_i-p]\right]\left[x[n_i]+...+a_p[p]x[n_i-p]\right]=$$

$$= E\left[x^2\left[n_i\right] + 2\sum_{k=1}^{p} a_p\left[k\right] x\left[n_i\right] x\left[n_i - k\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_p\left[k\right] a_p\left[l\right] x\left[n_i - k\right] x\left[n_i - l\right] \right] = \tag{3.4}$$

$$= \gamma_{xx}\left[0\right] + 2\sum_{k=1}^{p} a_p\left[k\right]\gamma_{xx}\left[k\right] + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_p\left[k\right] a_p\left[l\right]\gamma_{xx}\left[l-k\right]$$

Eroarea pătratică medie este o funcție pătratică de coeficienții filtrului predictor şi prezintă un extrem pentru valorile coeficienților pentru care

$$\frac{\partial \xi_p^f\left(a_p[k]\right)}{\partial a_p[k]} = 0 \tag{3.5}$$

Înlocuind (3.4) în (3.5), rezultă

$$\frac{\partial \xi_p^f\left(a_p[k]\right)}{\partial a_p[k]} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_p[k]}\left(\gamma_{xx}\left[0\right] + 2\sum_{k=1}^{p} a_p\left[k\right]\gamma_{xx}\left[k\right] + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_p\left[k\right] a_p\left[l\right]\gamma_{xx}\left[l-k\right] \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_p[k]}(\gamma_{xx}\left[0\right] + 2\sum_{k=1}^{p} a_p\left[k\right]\gamma_{xx}\left[k\right] +$$

$$a_p[1]a_p[1]\gamma_{xx}[0] + \ldots + a_p[1]a_p[k]\gamma_{xx}[k-1] + \ldots + a_p[1]a_p[p]\gamma_{xx}[p-1] +$$

$$\vdots$$

$$a_p[k]a_p[1]\gamma_{xx}[1-k] + \ldots + a_p[k]a_p[k]\gamma_{xx}[0] + \ldots + a_p[k]a_p[p]\gamma_{xx}[p-k] +$$

$$\vdots$$

$$a_p[p]a_p[1]\gamma_{xx}[1-p] + \ldots + a_p[p]a_p[k]\gamma_{xx}[k-p] + \ldots + a_p[p]a_p[p]\gamma_{xx}[0])$$

$$= 2\gamma_{xx}[k] + 2\sum_{l=1}^{p} a_p[l]\gamma_{xx}[k-l] = 0 \tag{3.6}$$

sau, echivalent,

$$\gamma_{xx}\left[k\right]=-\sum_{l=1}^{p}a_p\left[l\right]\gamma_{xx}\left[k-l\right],k=1,...,p \tag{3.7}$$

Extremul erorii pătratice medii care se atinge pentru valorile coeficienților care rezultă din relația (3.7), este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2\xi_p^f\left(a_p[k]\right)}{\partial\left(a_p[k]\right)^2}=\gamma_{xx}[0]>0\,.$$

Relațiile (3.7) se numesc *ecuațiile normale* şi stabilesc legătura între coeficienții predictorului liniar şi valorile funcției de autocorelație. Înlocuind (3.7) în (3.4) se obține eroarea pătratică medie minimă de predicție, de forma

$$\min\left[\xi_p^f\right]\overset{not.}{=}E_p^f=\gamma_{xx}\left[0\right]+\sum_{k=1}^{p}a_p\left[k\right]\gamma_{xx}\left[k\right] \tag{3.8}$$

3.2. Predicție liniară înapoi (backward)

Estimarea eşantionului $x[n-p-r+1]$ pe baza observațiilor $M_p^x[n]$ se numeşte predicție înapoi cu *r* paşi, de ordin *p*. În continuare se tratează predicția înapoi de ordinul *p*, cu un pas (r=1), când se presupune că se cunoaşte secvența de date $x\left[n\right],x\left[n-1\right],...,x\left[n-p+1\right]$ şi se doreşte a se estima valoarea $x\left[n-p\right]$, adică

$$\hat{x}\left[n-p\right]=-\sum_{k=0}^{p-1}b_p\left[k\right]x\left[n-k\right] \tag{3.9}$$

Predictorul descris de relația (3.9) este reprezentat în figura 3.4.

Diferența dintre valoarea $x\left[n-p\right]$ şi estimatul $\hat{x}\left[n-p\right]$ se numeşte *eroare de predicție înapoi*, şi este notată cu $g_p\left[n\right]$.

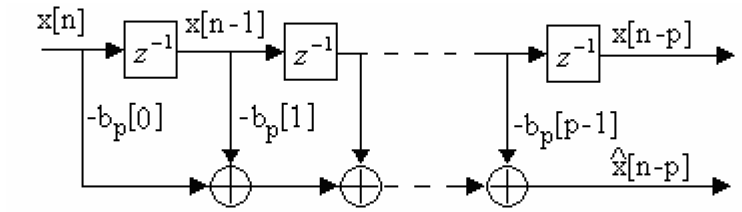


Fig. 3.4. Predictor înapoi cu un pas, de ordinul *p*

$$g_p[n] = x[n-p] + \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k]x[n-k] = \\ = \sum_{k=0}^{p} b_p[k]x[n-k],\ b_p[p]=1 \tag{3.10}$$

Implementarea filtrului erorii de predicție înapoi de ordinul *p* este prezentată în figura 3.5, care reprezintă o realizare în forma directă a unui filtru FIR cu funcția de sistem:

$$B_p(z) = \sum_{k=0}^{p} b_p[k]z^{-k} \tag{3.11}$$

unde $b_p[p]=1$.

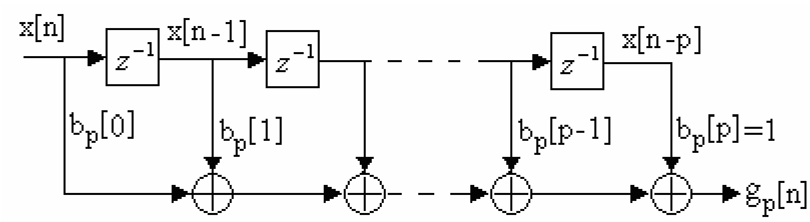


Fig. 3.5. Filtrul erorii de predicție înapoi

Eroarea de predicție înapoi este

$$g_p[n] = x[n-p] + \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k]x[n-k] = \\ = x[n-p] + \sum_{m=1}^{p} b_p[p-m]x[n-p+m] \tag{3.12}$$

Valoarea sa pătratică medie este

$$E\left\{g_p^2\left[n_i\right]\right\} \overset{not}{=} \xi_p^b \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\xi_p^b &= E\left\{x^2[n_i-p]+2x[n_i-p]\sum_{m=1}^{p} b_p\left[p-m\right]x\left[n_i-p+m\right]+\right.\\
&\left.+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} b_p\left[p-m\right]b_p\left[p-l\right]x\left[n_i-p+m\right]x[n_i-p+l]\right\}=\\
&=\gamma_{xx}\left[0\right]+2\sum_{m=1}^{p} b_p\left[p-m\right]\gamma_{xx}\left[m\right]+\\
&+\sum_{m=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} b_p\left[p-m\right]b_p\left[p-l\right]\gamma_{xx}\left[l-m\right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

La fel ca în cazul predicției înainte, eroarea pătratică medie de predicție înapoi este o funcție pătratică de coeficienții filtrului predictor. Valorile coeficienților pentru care aceasta prezintă un extrem, se obțin prin egalarea cu zero a derivatei sale în raport cu coeficienții filtrului, adică

$$\frac{\partial \xi_p^b\left(b_p[p-m]\right)}{\partial b_p[p-m]}=0 \tag{3.15}$$

Înlocuind (3.14) în (3.15), după prelucrări similare celor din cazul predicției înainte, rezultă sistemul de ecuații

$$\gamma_{xx}\left[m\right]=-\sum_{l=1}^{p} b_p\left[p-l\right]\gamma_{xx}\left[l-m\right], m=1,...,p \tag{3.16}$$

Extremul obținut este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2 \xi_p^b\left(b_p[p-m]\right)}{\partial\left(b_p[p-m]\right)^2}=\gamma_{xx}[0]>0$$

Înlocuind (3.16) în (3.14) se obține același minim ca în cazul predicției înainte, adică

$$\min\left[\xi_p^b\right]=E_p^b=E_p^f.$$

3.3. Structuri lattice pentru implementarea filtrelor FIR de eroare a predicției

Din cele prezentate până aici, s-a observat că erorile de predicție înainte şi înapoi se obțin ca ieşiri ale unor filtre FIR cu funcțiile de sistem $A_p(z)$, respectiv $B_p(z)$, date de (3.3), respectiv (3.11). Cum un filtru FIR implementat în forma directă este echivalent cu un filtru FIR lattice, filtrele erorii de predicție în forma directă, reprezentate în figurile 3.3 şi 3.5, pot fi implementate în formă lattice. Pentru a stabili legătura dintre coeficienții filtrului de predicție şi coeficienții structurii lattice, se consideră o familie de filtre FIR cu funcțiile de transfer

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m = 0, 1, 2, ..., p \tag{3.17}$$

unde $A_m(z)$ este un polinom de forma

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_m[k] z^{-k} \qquad m \ge 1, \tag{3.18}$$

şi $A_0(z) = 1$. Răspunsul la impuls al filtrului de ordin m este $h_m[0] = 1$ şi $h_m[k] = a_m[k]$, k = 1, 2, ….,m. Se defineşte $a_m[0] = 1$.

Dacă $x[n]$ este secvența de intrare în filtrul cu funcția de sistem $A_m(z)$ şi $y[n]$, secvența de ieşire, se poate scrie

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{m} a_m[k] x[n-k] \tag{3.19}$$

Ținând cont că

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{m} a_m[k] x[n-k] \tag{3.20}$$

este valoarea estimată a lui $x[n]$ pe baza a m intrări anterioare, $x[n\text{-}1]$, $x[n\text{-}2]$, …, $x[n\text{-}m]$, din (3.19) şi (3.20) rezultă că $y[n]$ reprezintă eroarea de predicție. Astfel, ieşirea filtrului FIR dată de relația (3.19) poate fi văzută ca eroarea între valoarea adevărată a semnalului $x[n]$ şi valoarea estimată $\hat{x}[n]$.

Pentru a stabili legătura între un filtru FIR în forma directă şi un filtru lattice, se consideră un filtru de ordinul m = 1. Ieşirea unui astfel de filtru este

$$y[n] = x[n] + a_1[1]x[n-1] \tag{3.21}$$

În figura 3.6 se prezintă un filtru lattice de ordinul întâi sau un filtru lattice cu o singură treaptă.

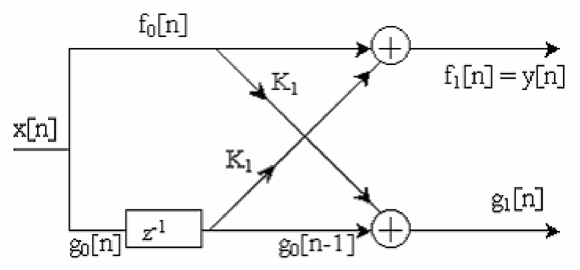


Figura 3.6. Filtru lattice cu o treapta

Dacă în această structură se aplică la ambele intrări $x[n]$ şi se selectează ieşirea de pe ramura de sus, se obține exact semnalul dat de relația (3.21), dacă se alege K_1=$a_1[1]$. Parametrul K_1 din structura lattice este denumit *coeficient de reflexie*.

Pentru această structură se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} f_0[n] &= g_0[n] = x[n] \\ f_1[n] &= f_0[n] + K_1 g_0[n-1] = x[n] + K_1 x[n-1] \\ g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] = K_1 x[n] + x[n-1] \end{aligned} \tag{3.22}$$

În continuare, se consideră filtrul FIR care se obține pentru m = 2. În acest caz ieşirea structurii în formă directă este

$$y[n] = x[n] + a_2[1]x[n-1] + a_2[2]x[n-2] \tag{3.23}$$

Conectând în cascadă două trepte de structuri lattice ca în figura 3.7, este posibil a se obține ieşirea ca în relația (3.23).

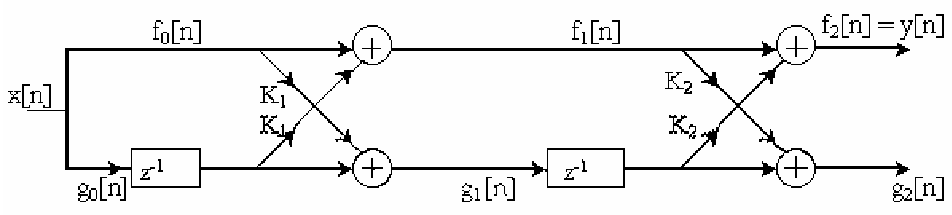


Figura 3.7. Filtru lattice cu două trepte

Într-adevăr, ieşirea din prima treaptă este dată de relațiile (3.22), iar ieşirea din treapta a doua este

$$\begin{aligned} f_2[n] &= f_1[n] + K_2 g_1[n-1] \\ g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \end{aligned} \tag{3.24}$$

Înlocuind $f_1[n]$ şi $g_1[n]$ din (3.22) în relația (3.24), se obține

$$\begin{aligned} f_2[n] &= x[n] + K_1 x[n-1] + K_2\left[K_1 x[n-1] + x[n-2]\right] \\ &= x[n] + K_1(1+K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Relația (3.25) este identică cu ieşirea filtrului FIR în forma directă dată de (3.23), dacă între coeficienți există relațiile:

$$a_2[2] = K_2 \qquad a_2[1] = K_1(1+K_2) \tag{3.26}$$

sau, echivalent

$$K_2 = a_2[2] \qquad K_1 = \frac{a_2[1]}{1 + a_2[2]} \tag{3.27}$$

Astfel, coeficienții de reflexie ai structurii lattice, K_1 şi K_2, pot fi obținuți din coeficienții $\{a_m[k]\}$ ai formei directe de implementare.

Continuând procedeul de cascadare a structurilor lattice, se poate demonstra prin inducție echivalența dintre filtrul FIR de ordin m implementat în forma directă şi filtrul lattice de ordin m sau cu m trepte. Filtrul lattice este descris, în general, de următorul sistem de ecuații recursive:

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n] \tag{3.28}$$

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \qquad m = 1,2,...,p \qquad (3.29)$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \qquad m = 1,2,...,p \qquad (3.30)$$

Ieşirea filtrului cu p trepte corespunde ieşirii filtrului FIR de ordin p. Prin urmare

$$y[n] = f_p[n] \qquad (3.31)$$

Ținând cont de relațiile (3.28) ÷ (3.30), în figura 3.8 s-a reprezentat un filtru lattice cu p trepte într-o diagramă bloc, împreună cu structura unei trepte.

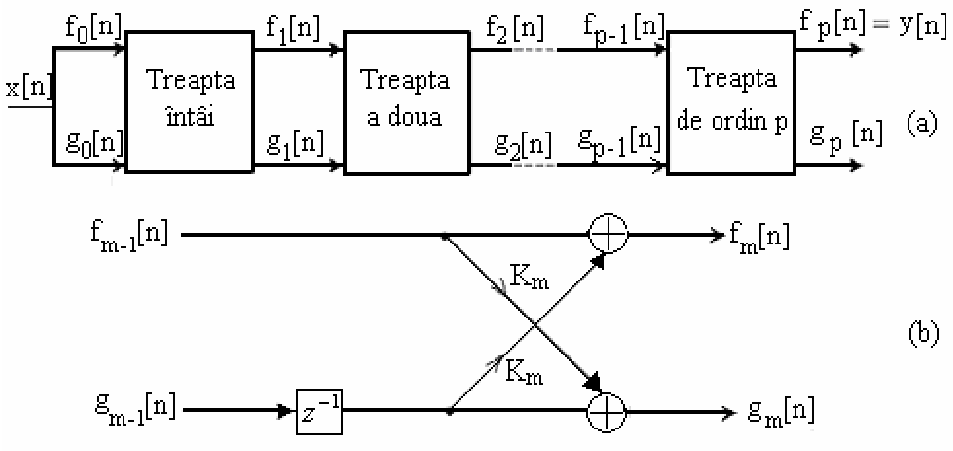


Figura 3.8. (a) Filtru lattice cu p trepte, (b) Structura treptei "m"

Ca urmare a echivalenței între un filtru FIR în formă directă şi un filtru lattice, ieşirea $f_m[n]$ a unui filtru lattice de ordin m poate fi exprimată sub forma

$$f_m[n] = \sum_{k=0}^{m} a_m[k]x[n-k] \qquad a_m[0] = 1 \qquad (3.32)$$

Deoarece relația (3.32) este o sumă de convoluție, transformata sa Z este

$$F_m(z) = A_m(z)X(z) \qquad (3.33)$$

sau, echivalent

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \qquad (3.33')$$

unde $A_m(z)$ reprezintă funcția de sistem a filtrului FIR cu coeficienții $\{a_m[k]\}$.

Cealaltă ieşire a structurii lattice, $g_m[n]$, ar putea fi, de asemenea, exprimată sub forma unei sume de convoluție, utilizând un alt set de coeficienți, notați $\{b_m[k]\}$. Din relația (3.22) se observă cum coeficienții filtrului care produce ieşirea $f_1[n]$ sunt $\{1, K_1\} = \{1, a_1[1]\}$, în timp ce coeficienții filtrului cu ieşirea $g_1[n]$, sunt $\{K_1, 1\} = \{a_1[1], 1\}$. Se observă că aceste două seturi de coeficienți sunt în ordine inversă. Dacă se consideră filtrul cu două trepte, cu ieşirea dată de relația (3.25), atunci $g_2[n]$ se determină cu relația

$$\begin{aligned} g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ &= K_2\left[x[n] + K_1 x[n-1]\right] + K_1 x[n-1] + x[n-2] \\ &= K_2 x[n] + K_1(1+K_2)x[n-1] + x[n-2] \\ &= a_2[2]x[n] + a_2[1]x[n-1] + x[n-2] \end{aligned} \qquad (3.34)$$

În consecință, coeficienții filtrului sunt $\{a_2[2], a_2[1], 1\}$, în timp ce pentru filtrul ce produce ieşirea $f_2[n]$ sunt $\{1, a_2[1], a_2[2]\}$.

Raționând în mod analog, se poate conchide că ieşirea $g_m[n]$ a filtrului lattice de ordin m poate fi exprimată cu ajutorul sumei de convoluție

$$g_m[n] = \sum_{k=0}^{m} b_m[k]x[n-k] \qquad (3.35)$$

unde coeficienții filtrului, $\{b_m[k]\}$, sunt asociați cu cei ai filtrului care produce ieşirea $f_m[n] = y[n]$, dar care operează în ordine inversă.

Dacă valorile $x[n]$, $x[n-1]$, . . . ,$x[n-m+1]$, sunt utilizate pentru predicția liniară a eșantionului de semnal $x[n-m]$, valoarea estimată $\hat{x}[n-m]$ se determină cu relația

$$\hat{x}[n-m] = -\sum_{k=0}^{m-1} b_m[k]x[n-k] \tag{3.36}$$

unde coeficienții $b_m[k]$ ai filtrului predictor sunt chiar coeficienții $\{a_m[k]\}$ luați în ordine inversă, prin urmare

$$b_m[k] = a_m[m-k] \qquad k = 0, 1, \ldots ,m \tag{3.37}$$

În domeniul Z, relația (3.35) devine

$$G_m(z) = B_m(z)X(z) \tag{3.38}$$

Rezultă atunci

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \tag{3.39}$$

unde $B_m(z)$ reprezintă funcția de sistem a filtrului FIR cu coeficienții $\{b_m[k]\}$, care se poate scrie sub forma

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^{m} b_m[k]z^{-k} \tag{3.40}$$

Înlocuind (3.37) în (3.40) se obține

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^{m} a_m[m-k]z^{-k} = \\ &= \sum_{l=0}^{m} a_m[l]z^{l-m} = z^{-m}\sum_{l=0}^{m} a_m[l]z^{l} = z^{-m}A_m(z^{-1}) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Din relația (3.41) rezultă că zerourile filtrului FIR cu funcția de transfer $B_m(z)$ sunt reciprocele zerourilor lui $A_m(z)$. Din acest motiv $B_m(z)$ este numit polinom *reciproc* sau *invers* al lui $A_m(z)$.

Aplicând transformata Z relațiilor recursive (3.28) ÷ (3.30), se obține

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \tag{3.42}$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, p \tag{3.43}$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, p \tag{3.44}$$

Împărțind fiecare ecuație prin $X(z)$, se obțin următoarele relații:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \tag{3.45}$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, p \tag{3.46}$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, p \tag{3.47}$$

Astfel, o treaptă lattice, este descrisă în domeniul Z de o ecuație matriceală de forma

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

3.3.1. Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului FIR în formă directă

Coeficienții filtrului FIR realizat în formă directă $\{a_m[k]\}$ pot fi obținuți din coeficienții $\{K_m\}$ ai structurii lattice, folosind următoarele relații:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \tag{3.49}$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \ldots, p \tag{3.50}$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \ldots, p \tag{3.51}$$

Soluția se obține recursiv, începând cu rangul $m = 1$. Astfel se obține o familie de (p) filtre FIR, fiecare din ele pentru o valoare a lui m.

Pentru fixarea ideilor, se consideră următorul exemplu.

Se dă un filtru lattice cu trei trepte având coeficienții

$K_1 = 1/4$, $K_2 = 1/2$, $K_3 = 1/3$.

Să se determine coeficienții filtrului FIR în formă directă.

Soluție. Problema se rezolvă recursiv, utilizând relația (3.50) începând cu $m = 1$.

Astfel, $A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}$.

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu o singură treaptă, sunt $a_1[0] = 1, a_1[1] = K_1 = 1/4$.

Deoarece $B_m(z)$ este reciprocul lui $A_m(z)$, rezultă $B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}$.

Pentru m=2, din (3.50) rezultă

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$$

Parametrii filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu două trepte sunt $a_2[0] = 1, a_2[1] = 3/8, a_2[2] = 1/2$. Din (3.51) rezultă atunci

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

În final, prin adăugarea celei de-a treia trepte în structura lattice, rezultă polinomul

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

şi, ca urmare, filtrul FIR în formă directă este caracterizat de coeficienții

$$a_3[0] = 1,\ a_3[1] = \frac{13}{24},\ a_3[2] = \frac{5}{8},\ a_3[3] = \frac{1}{3}$$

În general, structura lattice cu parametrii $K_1, K_2, ..., K_p$, corespunde unei clase de p filtre FIR în forma directă cu funcțiile de sistem $A_1(z), A_2(z), ..., A_p(z)$. Este interesant de observat că o caracterizare a acestei clase de filtre FIR în formă directă necesită $p(p+1)/2$ coeficienți, în timp ce o caracterizare lattice necesită doar p coeficienți de reflexie $\{K_m\}$. Motivul pentru care structura lattice produce o reprezentare mult mai compactă pentru clasa de filtre FIR de ordin p se datorează faptului că adăugarea treptelor la structura lattice nu modifică parametrii treptelor anterioare, în timp ce coeficienții funcției de sistem $A_m(z)$ sunt total diferiți de coeficienții filtrului FIR de ordin inferior, cu funcția de sistem $A_{m-1}(z)$.

O relație pentru determinarea recursivă a coeficienților $\{a_m[k]\}$ ai filtrului poate fi obținută din polinoamele date în relațiile (4.49)÷(4.51). Din relația (4.50) se obține

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{m} a_m[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}[k] z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}[m-1-k] z^{-(k+1)} \tag{3.52}$$

Prin egalarea coeficienților puterilor egale ale lui z^{-1} și ținând cont că $a_m[0]=1$, rezultă ecuațiile recursive pentru coeficienții filtrului FIR, sub forma:

$$a_m[0] = 1 \tag{3.53}$$

$$a_m[m] = K_m \tag{3.54}$$

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}[m-k] = a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}[m-k]$$
$$1 \le k \le m-1,\ m = 1, 2, ..., p. \tag{3.55}$$

3.3.2. Conversia coeficienților filtrului FIR din forma directă în coeficienți ai structurii lattice

Dacă se cunosc coeficienții filtrului FIR pentru implementarea în formă directă sau, echivalent, polinomul $A_m(z)$ şi se doreşte determinarea coeficienților corespunzători structurii lattice, de ordin *m*, atunci $K_m = a_m[m]$. Pentru a obține coeficientul K_{m-1} sunt necesare polinoamele $A_{m-1}(z)$ deoarece, în general, K_m este obținut din polinomul $A_m(z)$ pentru *m*=*p*, *p*-1,..,1. Prin urmare, trebuie calculate succesiv polinoamele $A_m(z)$, începând de la $m = p$ până la $m = 1$.

Relația recursivă dorită pentru polinoame se determină uşor din (3.46) şi (3.47).

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ &= A_{m-1}(z) + K_m \left[B_m(z) - K_m A_{m-1}(z) \right] \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = p, p-1, \ldots, 1. \tag{3.56}$$

Astfel se calculează toate polinoamele de grad inferior $A_m(z)$ începând cu $A_p(z)$ şi se obțin coeficienții doriți ai structurii lattice din relația $K_m = a_m[m]$. Se observă că procedura prezentată este operațională atât timp cît $|K_m| \neq 1$ pentru *m* = 1, 2, ...,*p*.

Din ecuația recursivă (3.56), se poate obține o relație pentru calculul recursiv al coeficienților K_m, începând cu *m* = *p* până la *m*=1. Pentru $m = p, p$-1,...,1 se obține

$$K_m = a_m[m] \qquad a_{m-1}[0] = 1 \tag{3.57}$$

$$a_{m-1}[k]=\frac{a_m[k]-K_m b_m[k]}{1-K_m^2}=\frac{a_m[k]-a_m[m]a_m[m-k]}{1-a_m^2[m]},1\le k\le m-1$$

(3.58)

Ecuația recursivă (3.58) nu poate fi folosită dacă $|K_m|=1$.

Pentru fixarea ideilor, se consideră următorul exemplu.

Să se determine coeficienții structurii lattice corespunzătoare filtrului FIR cu funcția de sistem

$$H(z)=A_3(z)=1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}$$

Soluție. Mai întâi se observă că $K_3=a_3[3]=\frac{1}{3}$. Apoi se construiește polinomul

$$B_3(z)=\frac{1}{3}+\frac{5}{8}z^{-1}+\frac{13}{24}z^{-2}+z^{-3}$$

Relația de decrementare din (3.56), cu m =3, conduce la

$$A_2(z)=\frac{A_3(z)-K_3B_3(z)}{1-K_3^2}=1+\frac{3}{8}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$$

Prin urmare, $K_2=a_2[2]=1/2$ și $B_2(z)=1/2+(3/8)z^{-1}+z^{-1}$. Repetând decrementarea recursivă, se obține

$$A_1(z)=\frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}=1+\frac{1}{4}z^{-1}$$

Astfel, $K_1=a_1[1]=\frac{1}{4}$.

3.4. Coeficienții de reflexie optimi ai predictorului lattice înainte și înapoi

În paragrafele anterioare s-a obținut un set de ecuații din care se pot obține coeficienții predictorului care minimizează valoarea pătratică medie a erorii de predicție. În continuare se va considera problema optimizării coeficienților de reflexie ai predictorului lattice şi exprimarea lor în funcție de erorile de predicție înainte şi înapoi.

Conform figurii 3.8, eroarea de predicție înainte în treapta m a predictorului este

$$f_m\left[n\right]=f_{m-1}\left[n\right]+K_m g_{m-1}\left[n-1\right] \tag{3.59}$$

Minimizarea erorii pătratice medii $\left\{E\left[f_m^2\left[n_i\right]\right]\right\}$ în raport cu coeficienții de reflexie impune calculul derivatei

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left\{E\left[f_m^2\left[n_i\right]\right]\right\}}{\partial K_m}=\\&\frac{\partial\left\{E\left[f_{m-1}^2\left[n_i\right]+2K_m f_{m-1}\left[n_i\right]g_{m-1}\left[n_i-1\right]+K_m^2 g_{m-1}^2\left[n_i-1\right]\right]\right\}}{\partial K_m}=\\&E\left\{2f_{m-1}\left[n_i\right]g_{m-1}\left[n_i-1\right]+2K_m g_{m-1}^2\left[n_i-1\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.60}$$

Prin egalarea cu zero a acesteia, rezultă

$$K_m=\frac{-E\left[f_{m-1}\left[n_i\right]g_{m-1}\left[n_i-1\right]\right]}{E\left[g_{m-1}^2\left[n_i-1\right]\right]}=\frac{-E\left[f_{m-1}\left[n_i\right]g_{m-1}\left[n_i-1\right]\right]}{\sqrt{E_{m-1}^f E_{m-1}^b}} \tag{3.61}$$

unde

$$E_{m-1}^f=E_{m-1}^b=E\left[g_{m-1}^2\left[n_i-1\right]\right]=E\left[f_{m-1}^2\left[n_i\right]\right] \tag{3.62}$$

Se observă că valorile optime ale coeficienților de reflexie ai predictorului lattice sunt egale cu coeficienții de corelație normalizați dintre erorile înainte şi înapoi din lattice, cu semnul minus. Din acest motiv, coeficienții $-K_m$ se mai numesc coeficienți de corelație parțială (PARCOR).

Valoarea pătratică medie a erorii de predicție poate fi exprimată în forma

$$E\left[f_m^2[n_i]\right]=E\left[f_{m-1}^2[n_i]+2K_m f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i-1]+K_m^2 g_{m-1}^2[n_i-1]\right]=$$
$$E\left[f_{m-1}^2[n_i]\right]+2K_m E\left[f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i-1]\right]+K_m^2 E\left[g_{m-1}^2[n_i-1]\right] \quad (3.63)$$

Înlocuind (3.61) şi (3.62) în (3.63), se obține eroarea pătratică medie minimă în formă recursivă

$$E_m^f=\left(1-K_m^2\right)E_{m-1}^f \quad (3.64)$$

Deoarece din relația (3.61) rezultă că $|K_m|\le 1$, eroarea pătratică medie minimă dată de relația (3.64) este o secvență monoton descrescătoare.

3.5. Relația dintre un proces AR şi predicția liniară

Parametrii unui proces AR de ordin p sunt strâns legați de parametrii unui predictor de ordin p pentru acelaşi proces. Se reaminteşte că pentru un proces AR(p) secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ este legată de parametrii $\{a_k\}$ ai procesului prin ecuațiile Yule-Walker.

$$\gamma_{xx}[m]=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}[m-k], m>0\\ -\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}[m-k]+\sigma_w^2, m=0\\ \gamma_{xx}^*[-m], m<0\end{cases} \quad (3.65)$$

Ecuațiile corespunzătoare predictorului de ordin p sunt date în relațiile (3.7).

$$\gamma_{xx}[l]=-\sum_{k=0}^{p}a_p[k]\gamma_{xx}[l-k], l=1...p$$

Comparând aceste relații se observă o relație de egalitate între parametrii $\{a_k\}$ ai procesului $\mathrm{AR}(p)$ şi coeficienții predictorului $\{a_p[k]\}$ de ordin p. Mai mult, comparând (3.65) cu (3.8), se observă că eroarea pătratică medie minimă a predictorului de ordinul p, E_p^f, este egală cu σ_w^2, dispersia zgomotului alb, caz în care filtrul erorii de predicție este un filtru de albire, care produce secvența de zgomot alb $w[n]$.

3.6. Soluția ecuațiilor normale

Anterior s-a arătat că minimizarea valorii pătratice medii a erorii de predicție înainte conduce la un sistem de ecuații numite ecuațiile normale (3.7). Acestea pot fi scrise compact în forma

$$\sum_{k=0}^{p} a_p[k]\gamma_{xx}[l-k]=0, l=1...p, a_p[0]=1 \tag{3.66}$$

Eroarea pătratică medie minimă (EPMM) este dată de relația (3.8). Adăugând (3.8) la (3.66) se obțin *ecuațiile normale extinse*

$$\sum_{k=0}^{p} a_p[k]\gamma_{xx}[l-k]=\begin{cases} E_p^f, l=0 \\ 0, l=1,...,p \end{cases} \tag{3.67}$$

Pentru un proces aleator $\mathrm{AR}(p)$, EPMM, $E_p^f=\sigma_w^2$. Există doi algoritmi eficienți de calcul pentru ecuațiile normale. Unul se datorează lui Levison [29] modificat ulterior de Durbin [62], numit algoritmul Levison-Durbin, care este potrivit prelucrării seriale. Al doilea algoritm, datorat lui Schur [61] calculează, de asemenea, coeficienții de reflexie şi se pretează prelucrării paralele. Cei doi algoritmi folosesc proprietățile de simetrie Toeplitz ale matricei de autocorelație.

3.6.1. Algoritmul Levison-Durbin

Algoritmul Levison Durbin este un algoritm eficient pentru rezolvarea ecuațiilor normale (3.66) în raport cu coeficienții predictorului. Acestea pot fi scrise matriceal, sub forma

$$[\Gamma_p][A_p] = -[\gamma_p] \tag{3.66'}$$

unde

$$[\Gamma_p] \overset{not.}{=} \mathbf{\Gamma}_p = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}^*[1] & \dots & \gamma_{xx}^*[p-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}^*[p-2] \\ .. & .. & \dots & .. \\ \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

este numită matricea de autocorelație, iar $[A_p] = \left[a_p[1] \dots a_p[p]\right]^T$ este un vector coloană ale cărui elemente sunt coeficienții predictorului, $a_p[k], 1 \le k \le p$, iar $[\gamma_p] = \left[\gamma_{xx}[1] \dots \gamma_{xx}[p]\right]^T$ este un vector coloană ale cărui elemente sunt valorile funcției de autocorelație $\gamma_p[l], 1 \le l \le p$.

Sistemul (3.67) poate fi scrise matriceal, sub forma

$$[\Gamma_{p+1}][A_{p+1}] = \begin{bmatrix} E_p^f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.67'}$$

unde $[A_{p+1}] = \left[1\; a_p[1] \dots a_p[p]\right]^T$, iar $[\Gamma_{p+1}]$ este matricea de autocorelație de ordinul p+1.

Dacă semnalul de intrare este real, operația de cojugare (*) dispare din γ_{xx}. Se observă că elementele $\Gamma_p(i,j)$ ale matricei $[\Gamma_p]$ au proprietatea că $\Gamma_p(i,j) = \gamma_{xx}[i-j]$. Dacă $\Gamma_p(i,j) = \Gamma_p^*(j,i)$ matricea este şi *hermitică*. Metoda de obținere a soluției prin algoritmul Levison-Durbin utilizează proprietățile matricei Toeplitz şi se aplică recursiv începând cu un predictor de ordinul $m=1$.

Soluția predictorului de ordinul întâi se obține din (3.66), pentru $p=1$, adică

$$a_1[1] = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]},\ a_1[0]=1 \tag{3.69}$$

EPMM este

$$E_1^f = \gamma_{xx}[0] + a_1[1]\gamma_{xx}[-1] = \gamma_{xx}[0]\left(1-\left|a_1[1]\right|^2\right) \tag{3.70}$$

Se reaminteşte că $a_1[1] = K_1$ este primul coeficient de reflexie al filtrului lattice.

Al doilea pas constă în obținerea coeficienților $\{a_2[1], a_2[2]\}$ ai predictorului de ordinul al doilea şi exprimarea soluției în funcție de $a_1[1]$. Cele două ecuații obținute din relația (3.66) sunt

$$\begin{aligned} a_2[1]\gamma_{xx}[0] + a_2[2]\gamma_{xx}^*[1] &= -\gamma_{xx}[1] \\ a_2[1]\gamma_{xx}[1] + a_2[2]\gamma_{xx}[0] &= -\gamma_{xx}[2] \end{aligned} \tag{3.71}$$

unde $\gamma_{xx}^*[1] = \gamma_{xx}[-1]$.

Ținând cont de (3.69) soluția sistemului de ecuații (3.71) devine

$$\begin{aligned} a_2[2] &= -\frac{\gamma_{xx}[2] + a_1[1]\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]\left(1-\left|a_1[1]\right|^2\right)} = -\frac{\gamma_{xx}[2] + a_1[1]\gamma_{xx}[1]}{E_1^f} \\ a_2[1] &= a_1[1] + a_2[2]a_1^*[1] \end{aligned} \tag{3.72}$$

expresii care reprezintă coeficienții predictorului de ordinul al doilea. Se reaminteşte că $a_2[2]=K_2$ este cel de-al doilea coeficient de reflexie al filtrului lattice.

Procedând în acelaşi mod se pot exprima coeficienții predictorului de ordin m în funcție de coeficienții predictorului de ordin $(m-1)$.

Vectorul coeficienților, notat cu $[a_m]$, poate fi scris ca sumă a doi vectori

$$[a_m]=\begin{bmatrix} a_m[1] \\ a_m[2] \\ .. \\ a_m[m] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [a_{m-1}] \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} [d_{m-1}] \\ K_m \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

unde $[a_{m-1}]$ reprezintă vectorul coeficienților predictorului de ordin $(m-1)$, iar vectorul $[d_{m-1}]$ şi scalarul K_m urmează a fi determinați. Matricea de autocorelație $\mathbf{\Gamma}$ de ordin $m\times m$ se partiționează în forma

$$[\Gamma_m]=\begin{bmatrix} \Gamma_{m-1} & [\gamma_{m-1}^{b^*}] \\ [\gamma_{m-1}^{bt}] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

unde $[\gamma_{m-1}^{bt}]=\left[\gamma_{xx}[m-1] \quad \gamma_{xx}[m-2] \quad ... \quad \gamma_{xx}[1]\right]=\left[\gamma_{m-1}^{b}\right]^t$,

În relația (3.74), $(\bullet)^*$ - înseamnă conjugarea complexă, $(\bullet)^t$ - înseamnă transpunere, iar indicele b al vectorului $[\gamma_{m-1}]$ semnifică faptul că elementele vectorului se consideră în ordine inversă.

Cu ajutorul relațiilor (3.73) şi (3.74), soluția ecuației $[\Gamma_m][a_m]=-[\gamma_m]$ poate fi exprimată astfel:

$$\begin{bmatrix} [\Gamma_{m-1}] & [\gamma_{m-1}^{b^*}] \\ [\gamma_{m-1}^{bt}] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} [a_{m-1}] \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [d_{m-1}] \\ K_m \end{bmatrix} \right\} = -\begin{bmatrix} [\gamma_{m-1}] \\ \gamma_{xx}[m] \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Din (3.75) rezultă două ecuații

$$[\Gamma_{m-1}][a_{m-1}] + [\Gamma_{m-1}][d_{m-1}] + K_m\left[\gamma_{m-1}^{b^*}\right] = -[\gamma_{m-1}] \quad (3.76)$$

$$\left[\gamma_{m-1}^{bt}\right][a_{m-1}] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right][d_{m-1}] + K_m\gamma_{xx}[0] = -\gamma_{xx}[m] \quad (3.77)$$

Deoarece $[\Gamma_{m-1}][a_{m-1}] = -[\gamma_{m-1}]$, din relația (3.76) rezultă

$$[d_{m-1}] = -K_m[\Gamma_{m-1}]^{-1}\left[\gamma_{m-1}^{b^*}\right] \quad (3.78)$$

dar $\left[\gamma_{m-1}^{b^*}\right]$ este chiar $[\gamma_{m-1}]$ cu elementele scrise în ordine inversă şi conjugate, ceea ce permite obținerea soluției ecuației (3.78) sub forma

$$[d_{m-1}] = K_m\left[a_{m-1}^{b^*}\right] = K_m \begin{bmatrix} a_{m-1}^*[m-1] \\ a_{m-1}^*[m-2] \\ .. \\ a_{m-1}^*[1] \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Înlocuind relația (3.79) în (3.77), se poate obține coeficientul de reflexie K_m.

$$\left[\gamma_{m-1}^{bt}\right][a_{m-1}] + K_m\left[\gamma_{xx}[0] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right]\left[a_{m-1}^{b^*}\right]\right] = -\gamma_{xx}[m] \quad (3.80)$$

de unde

$$K_m = -\frac{\gamma_{xx}[m] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right][a_{m-1}]}{\gamma_{xx}[0] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right]\left[a_{m-1}^{b^*}\right]} \quad (3.80')$$

Înlocuind soluțiile pentru $[d_{m-1}]$ şi K_m în relația (3.73) se obțin relațiile recursive pentru coeficienții predictorului

$$a_m[m] = K_m = -\frac{\gamma_{xx}[m] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right]\left[a_{m-1}\right]}{\gamma_{xx}[0] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right]\left[a_{m-1}^{b^*}\right]} = -\frac{\gamma_{xx}[m] + \left[\gamma_{m-1}^{bt}\right]\left[a_{m-1}\right]}{E_m^f}$$

(3.81)

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}^*[m-k] = a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}^*[m-k] \quad (3.82)$$
$$k = 1, \ldots, m-1, \; m = 1, \ldots, p$$

Se observă că relațiile recursive (3.82) sunt identice cu cele care dau coeficienții predictorului pe baza polinoamelor $A_m(z)$ şi $B_m(z)$ ca în relațiile (3.53) ÷ (3.55). Mai mult, K_m este coeficientul de reflexie pentru a $m-$a treaptă a predictorului lattice, deci algoritmul Levison-Durbin calculează coeficienții de reflexie pentru predicția lattice optimală, precum şi coeficienții predictorului optimal FIR în forma directă.

Pentru predictorul de ordinul m, EPMM este

$$\begin{aligned} E_m^f &= \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^{m} a_m[k]\gamma_{xx}[-k] = \\ &= \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^{m}\left(a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}^*[m-k]\right)\gamma_{xx}[-k] = \\ &= E_{m-1}^f\left[1 - \left|a_m[m]\right|^2\right] = E_{m-1}^f\left(1 - \left|K_m\right|^2\right), m = 1, \ldots, p \end{aligned} \quad (3.83)$$

unde $E_0^f = \gamma_{xx}[0]$. Deoarece coeficienții de reflexie satisfac proprietatea că $\left|K_m\right| \le 1$, EPMM satisface condiția

$$E_0^f \ge E_1^f \ge E_2^f \ge \ldots.. \ge E_p^f \quad (3.84)$$

În scopul aprecierii eficienței sau complexității unui algoritm, se foloseşte simbolismul din teoria complexității calculelor. Notația **O(•)** se foloseşte în analiza eficienței algoritmilor şi defineşte limita superioară a unei funcții, reflectând efortul de calcul necesar obținerii rezultatului, în funcție de mărimea intrării, de obicei, numărul de biți. Complexitatea (temporală) a unei probleme (sau a unui algoritm) reprezintă numărul de paşi (sau echivalentul lor temporal) ce trebuie parcurşi pentru a o rezolva, exprimat, în general, în funcție de mărimea intrării. De exemplu, se presupune că timpul (sau numărul de paşi) necesari rezolvării unei probleme a cărei intrare are dimensiunea n este de forma $T(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i n^i$, unde coeficienții a_i sunt constante independente de intrare. Cu creşterea lui n, termenul dominant este n^N, ceilalți putându-se neglija. Coeficienții a_i depind de detaliile implementării. Notația $\mathbf{O}(n^N)$ reflectă factorul dominant, evidențiind o complexitate de n^N.

Ecuația recursivă (3.82) a algoritmului Levison Durbin necesită $\mathbf{O}(m)$ operații de multiplicare şi sumare pentru a trece de la treapta m la treapta $m+1$. Prin urmare, pentru p trepte sunt necesare 1+2+3+...+p=p(p+1)/2 operații pentru a determina coeficienții filtrului predictor sau coeficienții de reflexie, adică o complexitate $\mathbf{O}(p^2)$. Dacă nu s-ar fi folosit proprietățile matricei de corelație şi sistemul (3.66) s-ar fi rezolvat prin metoda eliminărilor a lui Gauss, gradul de complexitate ar fi $\mathbf{O}(p^3)$. Prin folosirea procesării paralele, complexitatea algoritmului poate fi scăzută suplimentar.

3.6.2. Algoritmul Schur

Algoritmul Schur este strâns legat de un test recursiv pentru a determina faptul că matricea de corelație este pozitiv definită. În particular, fie matricea de autocorelație Γ_{p+1} asociată cu ecuațiile normale extinse date de relația (3.67'). Din elementele acestei matrice se formează funcția

$$R_0(z)=\frac{\gamma_{xx}[1]z^{-1}+\gamma_{xx}[2]z^{-2}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p}}{\gamma_{xx}[0]+\gamma_{xx}[1]z^{-1}+\gamma_{xx}[2]z^{-2}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p}} \tag{3.85}$$

şi familia de funcţii $R_m(z)$ definită recursiv prin

$$R_m(z)=\frac{R_{m-1}(z)-R_{m-1}(\infty)}{z^{-1}\left[1-R_{m-1}^*(\infty)R_{m-1}(z)\right]}, m=1,...,p \tag{3.86}$$

Conform teoremei lui Schur [56], o condiţie necesară şi suficientă pentru ca matricea de corelaţie să fie pozitiv definită este ca $\left|R_m(\infty)\right|<1$ pentru $m=1,...,p$. Se demonstrează mai întâi că matricea de autocorelaţie este pozitiv definită dacă coeficienţii de reflexie ai filtrului lattice corespunzător sunt subunitari, adică $\left|K_m\right|<1, m=1,...,p$.

Din (3.85) rezultă că $R_0(\infty)=0$. Înseamnă atunci, conform relaţiei (3.86), că

$$R_1(z)=\frac{\gamma_{xx}[1]+\gamma_{xx}[2]z^{-1}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p+1}}{\gamma_{xx}[0]+\gamma_{xx}[1]z^{-1}+\gamma_{xx}[2]z^{-2}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p}} \tag{3.87}$$

şi, deci $R_1(\infty)=\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}$. Comparând cu (3.69), se observă că $R_1(\infty)=-K_1$, adică $\gamma_{xx}[1]=-K_1\gamma_{xx}[0]$.

În mod analog, rezultă

$$R_2(z)=\frac{R_1(z)-R_1(\infty)}{z^{-1}\left(1-R_1^*(\infty)R_1(z)\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\gamma_{xx}[1]+\gamma_{xx}[2]z^{-1}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p+1}}{\gamma_{xx}[0]+\gamma_{xx}[1]z^{-1}+\gamma_{xx}[2]z^{-2}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p}}-\dfrac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}}{z^{-1}\left[1-\dfrac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}\cdot\dfrac{\gamma_{xx}[1]+\gamma_{xx}[2]z^{-1}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p+1}}{\gamma_{xx}[0]+\gamma_{xx}[1]z^{-1}+\gamma_{xx}[2]z^{-2}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p}}\right]}=$$

$$= \frac{\gamma_{xx}[0](\gamma_{xx}[2]+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p+2})-\gamma_{xx}[1](\gamma_{xx}[1]+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p+1})}{\gamma_{xx}[0]\left(\gamma_{xx}[0]+\gamma_{xx}[1]z^{-1}+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p}\right)-\gamma_{xx}[1](\gamma_{xx}[1]+...+\gamma_{xx}[p]z^{-p+1})}$$

şi, deci

$$R_2(\infty) = \frac{\gamma_{xx}[0]\gamma_{xx}[2]-\gamma_{xx}^2[1]}{\gamma_{xx}^2[0]-\gamma_{xx}^2[1]} = \frac{\gamma_{xx}[2]+K_1\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0](1-|K_1|^2)} \tag{3.88}$$

adică $R_2(\infty) = -K_2$. În general, rezultă $R_m(\infty) = -K_m, m = 1,..., p$. Înseamnă, deci, că dacă $|R_m(\infty)| < 1, m = 1,..., p$, atunci $|K_m| < 1, m = 1,..., p$, ceea ce asigură că matricea Γ_{p+1} este pozitiv definită. Deoarece coeficienții de reflexie pot fi obținuți din familia de funcții $R_m(z), m = 1,..., p$, rezultă o metodă alternativă pentru rezolvarea ecuațiilor normale, cunoscută sub denumirea de algoritmul lui Schur.

Fie $R_m(z)$ exprimat sub forma

$$R_m(z) = \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, m = 0,..., p \tag{3.89}$$

unde

$$P_0(z) = \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + ... + \gamma_{xx}[p]z^{-p}$$

$$Q_0(z) = \gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + ... + \gamma_{xx}[p]z^{-p} \tag{3.90}$$

Deoarece $K_0 = 0$ şi $K_m = -R_m(\infty), m = 1,..., p$ ecuația recursivă (3.86) implică următoarele ecuații recursive pentru polinoamele $P_m(z)$ şi $Q_m(z)$.

$$\begin{bmatrix} P_m(z) \\ Q_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_{m-1} \\ K_{m-1}^* z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-1}(z) \\ Q_{m-1}(z) \end{bmatrix}, m = 1,..., p \tag{3.91}$$

Astfel, se poate scrie

$$P_1(z) = P_0(z) = \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + ... + \gamma_{xx}[p]z^{-p}$$

$$Q_1(z) = z^{-1}Q_0(z) = \gamma_{xx}[0]z^{-1} + \gamma_{xx}[1]z^{-2} + ... + \gamma_{xx}[p-1]z^{-p} + \\ +\gamma_{xx}[p]z^{-p-1} \tag{3.92}$$

şi

$$K_1 = -\left(\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}\right)_{z=\infty} = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]} \tag{3.93}$$

Analog, rezultă

$$P_2(z) = P_1(z) + K_1Q_1(z) = \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + ... + \gamma_{xx}[p]z^{-p} - \\ -\gamma_{xx}[1]z^{-1} - \frac{\gamma_{xx}^2[1]z^{-2}}{\gamma_{xx}[0]} - \frac{\gamma_{xx}[1]\gamma_{xx}[2]z^{-3}}{\gamma_{xx}[0]} - ... - \frac{\gamma_{xx}[1]\gamma_{xx}[p]z^{-p-1}}{\gamma_{xx}[0]} = \\ = (\gamma_{xx}[2] + K_1\gamma_{xx}[1])z^{-2} + ... + (\gamma_{xx}[p] + K_1\gamma_{xx}[p-1])z^{-p} + \\ +K_1\gamma_{xx}[p]z^{-p-1} \tag{3.94}$$

$$Q_2(z) = z^{-1}K_1^*P_1(z) + z^{-1}Q_1(z) = z^{-1}\left(Q_1(z) + K_1^*P_1(z)\right) = \\ = z^{-1}[(\gamma_{xx}[0]z^{-1} + \gamma_{xx}[1]z^{-2} + ... + \gamma_{xx}[p-1]z^{-p} + \gamma_{xx}[p]z^{-p-1}) + \\ +(K_1^*\gamma_{xx}[1]z^{-1} + K_1^*\gamma_{xx}[2]z^{-2} + ... + K_1^*\gamma_{xx}[p]z^{-p})] = \\ (\gamma_{xx}[0] + K_1^*\gamma_{xx}[1])z^{-2} + (\gamma_{xx}[1] + K_1^*\gamma_{xx}[2])z^{-3} + ... \\ +(\gamma_{xx}[p-1] + K_1^*\gamma_{xx}[p])z^{-p-1} + \gamma_{xx}[p]z^{-p-2} \tag{3.95}$$

$$K_2 = -\left.\frac{P_2(z)}{Q_2(z)}\right|_{z=\infty} = -\frac{\gamma_{xx}[2] + K_1\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0] + K_1^*\gamma_{xx}[1]} \tag{3.96}$$

Pe baza acestor relaţii, algoritmul Schur este descris de următoarea procedură recursivă:

1. Se formează matricea generatoare cu două linii şi p+1 coloane, de forma:

$$[G_0]=\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] & \ldots & \gamma_{xx}[p] \\ \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] & \ldots & \gamma_{xx}[p] \end{bmatrix} \qquad (3.97)$$

unde elementele primei linii sunt coeficienții lui $P_0(z)$, iar cele de pe a doua linie, coeficienții lui $Q_0(z)$.

2. Se deplasează a doua linie a matricei generatoare spre dreapta cu o poziție şi se renunță la ultimul element al liniei. În locul rămas liber se plasează un zero. Astfel se obține o nouă matrice generatoare

$$[G_1]=\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] & \ldots & \gamma_{xx}[p] \\ 0 & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \ldots & \gamma_{xx}[p-1] \end{bmatrix} \qquad (3.98)$$

Raportul, cu semnul minus, al elementelor din a doua coloană reprezintă coeficientul de reflexie $K_1=-\dfrac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}$.

3. Se înmulțeşte la stânga matricea generatoare $[G_1]$ cu matricea

$$[V_1]=\begin{bmatrix} 1 & K_1 \\ K_1^* & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.99)$$

obținându-se

$$[V_1][G_1]=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}[2]+K_1\gamma_{xx}[1] & \ldots & \gamma_{xx}[p]+K_1\gamma_{xx}[p-1] \\ 0 & \gamma_{xx}[2]+K_1^*\gamma_{xx}[1] & \ldots & \ldots & \gamma_{xx}[p-1]+K_1^*\gamma_{xx}[p] \end{bmatrix} \qquad (3.100)$$

4. Se deplasează a doua linie a matricei $[V_1][G_1]$ cu o poziție spre dreapta, obținându-se o nouă matrice generatoare

$$[G_2]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}[2]+K_1\gamma_{xx}[1] & \ldots & \gamma_{xx}[p]+K_1\gamma_{xx}[p-1] \\ 0 & 0 & \gamma_{xx}[0]+K_1^*\gamma_{xx}[1] & \ldots & \gamma_{xx}[p-2]+K_1^*\gamma_{xx}[p-1] \end{bmatrix} \qquad (3.101)$$

Raportul, cu semnul “-“, al elementelor din coloana a treia reprezintă coeficientul de reflexie K_2. Paşii 3 şi 4 se repetă până se obțin toți cei p coeficienți de reflexie. În general, matricea $\left[V_m\right]$ este de forma

$$\left[V_m\right] = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m^* & 1 \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

Multiplicarea lui $\left[V_m\right]$ cu $\left[G_m\right]$ are ca rezultat o matrice din care, prin deplasarea celei de-a doua linii cu o poziție rezultă noua matrice generatoare $[G_{m+1}]$. Se observă că operația de deplasare a celei de-a doua linii la fiecare iterație echivalează cu înmulțirea cu z^{-1} din a doua ecuație recursivă (3.91). De asemenea, se observă că împărțirea polinomului $P_m(z)$ la $Q_m(z)$ şi evaluarea câtului la $z = \infty$ echivalează cu împărțirea elementelor din coloana ($m+1$) a matricei $\left[G_m\right]$.

Pentru a demonstra legătura dintre algoritmul Schur, algoritmul Levison Durbin şi predictorul lattice corespunzător, se determină ieşirea filtrului lattice când secvența de intrare este secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m], \quad m = 0,1,...$, adică prima intrare în lattice este $\gamma_{xx}[0]$, a doua, $\gamma_{xx}[1]$ şi aşa mai departe. Corespunzător figurii 3.8, $f_0[n] = \gamma_{xx}[n]$. După întârzierea din prima treaptă, $g_0[n-1] = \gamma_{xx}[n-1]$, adică, pentru $n = 1$, raportul $f_0[1]/g_0[0] = \gamma_{xx}[1]/\gamma_{xx}[0]$, care este coeficientul de reflexie K_1, cu semnul “-”. Această expresie se poate exprima şi în forma

$$f_0[1] + K_1 g_0[0] = \gamma_{xx}[1] + K_1 \gamma_{xx}[0] = 0 \tag{3.103}$$

Mai mult, $g_0[0] = \gamma_{xx}[0] = E_0^f$.

La momentul $n = 2$, conform relației (3.43), intrarea în a doua treaptă este

$$f_1[2] = f_0[2] + K_1 g_0[1] = \gamma_{xx}[2] + K_1\gamma_{xx}[1] \qquad (3.104)$$

şi, după întârzierea din a doua treaptă,

$$g_1[1] = K_1 f_0[1] + g_0[0] = K_1\gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[0] \qquad (3.105)$$

Raportul $f_1[2]/g_1[1]$ este

$$\frac{f_1[2]}{g_1[1]} = \frac{\gamma_{xx}[2] + K_1\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0] + K_1\gamma_{xx}[1]} = \frac{\gamma_{xx}[2] + K_1\gamma_{xx}[1]}{E_1^f} = -K_2 \qquad (3.106)$$

deci,

$$f_1[2] + K_2 g_1[1] = 0, \quad g_1[1] = E_1^f \qquad (3.107)$$

Continuând în acelaşi mod, rezultă

$$f_{m-1}[m]/g_{m-1}[m-1] = -K_m \ \textit{şi} \ g_{m-1}[m-1] = E_{m-1}^f \qquad (3.108)$$

În consecință, coeficienții filtrului lattice obținuți cu algoritmul Levison Durbin sunt identici cu coeficienții obținuți cu algoritmul Schur.

3.7. Proprietăți ale filtrelor erorii de predicție

3.7.1. Proprietatea de fază minimă a filtrului erorii de predicție înainte

Se reaminteşte că un filtru are fază minimă, dacă zerourile funcției sale de sistem sunt în interiorul cercului unitate sau pe acesta. S-a arătat anterior că în cazul implementării lattice a filtrului erorii de predicție, $|K_m| < 1$ pentru toți m. Această condiție împreună cu relația: $E_m^f = \left(1 - |K_m|^2\right) E_{m-1}^f$ poate fi folosită pentru a arăta că zerourile funcției de sistem a filtrului erorii de predicție sunt fie toate în interiorul cercului unitate, fie pe cerc.

Se va arăta că, dacă $E_p^f > 0$, zerourile $|z_i| < 1$ pentru orice i, unde z_i sunt zerourile funcției de sistem.

Într-adevăr, pentru $p = 1$ funcția de sistem filtrului erorii de predicție este

$$A_1(z) = 1 + K_1 z^{-1} \tag{3.109}$$

ceea ce înseamnă $z_1 = -K_1$ şi $E_1^f = \left(1 - |K_1|^2\right) E_0^f > 0$.

Se presupune ipoteza adevărată pentru $p-1$, adică $E_{p-1}^f > 0$. Dacă z_i este o rădăcină a lui $A_p(z)$, din relațiile (3.41) şi (3.46) se obține

$$\begin{aligned} A_p(z_i) &= A_{p-1}(z_i) + K_p z_i^{-1} B_{p-1}(z_i) = \\ &= A_{p-1}(z_i) + K_p z_i^{-p} A_{p-1}^*\left(\frac{1}{z_i}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Din relația precedentă se poate scrie expresia

$$\frac{1}{K_p} = -\frac{z_i^{-p} A_{p-1}^*\left(\frac{1}{z_i}\right)}{A_{p-1}(z_i)} = Q(z_i) \tag{3.111}$$

care este de tip trece tot.

Pe de altă parte, se ştie că o funcție trece tot, de forma

$$P(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z z_k^* + 1}{z + z_k}, |z_k| < 1 \tag{3.112}$$

se bucură de proprietățile:

$|P(z)| > 1$ pentru $|z| < 1$,

$|P(z)| = 1$ pentru $|z| = 1$ şi

$|P(z)| < 1$ pentru $|z| > 1$.

Prelucrând relația (3.112), rezultă

$$P(z)=z^N\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}+z_k^*}{1+z_kz^{-1}}=\frac{z^{-N}A_N^*\left(z^{-1}\right)}{A_N(z)} \tag{3.113}$$

Din relațiile (3.111) şi (3.113) rezultă că $Q(z)=-\frac{P(z)}{z}$ pentru N=p-1. Cum $E_p^f>0$ şi $E_{p-1}^f>0$ din $E_p^f=\left(1-\left|K_p\right|^2\right)E_{p-1}^f>0$ rezultă $\left|K_p\right|<1$şi, deci, $\left|Q(z_i)\right|=\frac{1}{\left|K_p\right|}>1$. Conform proprietăților funcției de tip trece tot, rezultă $\left|z_i\right|<1$.

Dacă se presupune că $E_{p-1}^f>0$ şi $E_p^f=0$, atunci $\left|K_p\right|=1$ şi $\left|Q(z_i)\right|=1$. Procesul aleator $x[n]$ pentru care EPMM este zero ($E_p^f=0$) se numeşte *predictibil* sau *determinist*.

Fie, de exemplu, procesul aleator sinusoidal de forma

$$x[n]=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k e^{j(n\alpha_k+\theta_k)} \tag{3.114}$$

unde fazele $\{\theta_k\}$ sunt statistic independente şi distribuite uniform în intervalul $(0,2\pi)$. Funcția de autocorelație este atunci

$$\gamma_{xx}[m]=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2 e^{jm\omega_k} \tag{3.115}$$

iar densitatea spectrală de putere

$$\Gamma_{xx}(f)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2\delta(f-f_k),f_k=\frac{\omega_k}{2\pi} \tag{3.116}$$

Se poate arăta că acest proces este predictibil cu un predictor de ordin $p\geq M$. Într-adevăr, fie $x[n]$ de forma (3.114) care se aplică la intrarea unui filtru al erorii de predicție de ordin $p\geq M$. Eroarea pătratică medie la ieşirea acestui filtru este

$$\xi_p^f = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_{xx}(f)\left|A_p(f)\right|^2 df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 \delta(f - f_k)\right] \left|A_p(f)\right|^2 df$$
$$= \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 \left|A_p(f_k)\right|^2 \tag{3.117}$$

Alegând M din cele p zerouri ale filtrului erorii de predicție să coincidă cu frecvențele $\{f_k\}$, eroarea pătratică medie poate fi forțată să fie zero. Celelalte $p-M$ zerouri pot fi plasate arbitrar, oriunde în interiorul cercului unitate.

3.7.2. Proprietatea de fază maximă a filtrului erorii de predicție înapoi

Un filtru se spune că este de fază maximă, dacă zerourile funcției sale de sistem sunt în exteriorul cercului unitate sau pe acesta. Funcția de sistem pentru filtrul erorii de predicție înapoi de ordin p este

$$B_p(z) = z^{-p} A_p\left(z^{-1}\right) \tag{3.118}$$

În consecință, rădăcinile lui $B_p(z)$ sunt inversele rădăcinilor filtrului erorii de predicție înainte cu funcția de sistem $A_p(z)$. Aceasta înseamnă că, dacă $A_p(z)$ este de fază minimă atunci $B_p(z)$ este de fază maximă. Dacă procesul $x[n]$ este predictibil atunci toate rădăcinile lui $B_p(z)$ sunt pe cercul unitate.

3.7.3. Proprietatea de albire

Se presupune că procesul aleator $x[n]$ este de tip AR(p), adică este generat prin trecerea zgomotului alb, staționar, de dispersie σ_w^2 printr-un filtru numai cu poli, care are funcția de sistem

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-1}} \tag{3.119}$$

Pe de altă parte, filtrul erorii de predicție înainte de ordin p are funcția de sistem:

$$A_p(z)=1+\sum_{k=1}^{p}a_p[k]z^{-k}=\frac{1}{H(z)} \tag{3.120}$$

dacă coeficienții predictorului sunt $a_p[k]=a_k$. Răspunsul acestui filtru la semnalul $x[n]$ este, evident, zgomot alb de dispersie σ_w^2. Din acest motiv, acest filtru al erorii de predicție se numeşte filtru de albire.

3.7.4. Proprietatea de ortogonalitate

Erorile de predicție înapoi $\{g_m[k]\}$ în diferite trepte ale filtrului FIR lattice sunt ortogonale, adică

$$E\left[g_m[n_i]g_l^*[n_i]\right]=\begin{cases}0, \text{ pentru } 1\le m\le p; 1\le l\le p; m\ne l\\ E_m^b, l=m\end{cases} \tag{3.121}$$

Într-adevăr,

$$E\left[g_m[n_i]g_l^*[n_i]\right]=\sum_{k=0}^{m}b_m[k]\sum_{j=0}^{l}b_l^*E\left[x[n_i-k]x^*[n_i-j]\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{l}b_l^*[j]\sum_{k=0}^{m}b_m[k]\gamma_{xx}[j-k] \tag{3.122}$$

Ecuațiile normale ale predictorului liniar înapoi sunt

$$\sum_{k=0}^{m} b_m[k]\gamma_{xx}[j-k]=\begin{cases}0, j=1,2,...,m-1\\ E_m^b, j=m\end{cases} \tag{3.123}$$

care, înlocuite în (3.122) conduc la (3.121).

3.8. Filtre lattice pentru procese AR şi ARMA

În paragraful 3.3 s-a arătat relația dintre un filtru lattice FIR şi predicția liniară. Predictorul liniar cu funcția de sistem

$$A_p(z)=1+\sum_{k=1}^{p} a_p[k]z^{-k}, \tag{3.124}$$

când este excitat cu procesul aleator $x[n]$, produce o ieşire care aproximează zgomotul alb când $p \to \infty$. Pe de altă parte, dacă procesul de intrare este autoregresiv de ordin p, ieşirea predictorului cu funcția de sistem $A_p(z)$ este un zgomot alb. Deoarece predictorul cu funcția de sistem $A_p(z)$ generează un proces $\mathrm{MA}(p)$ când este excitat cu o secvență de zgomot alb, structurile lattice numai cu zerouri se mai numesc lattice cu medie alunecătoare sau mobilă. În continuare se prezintă structurile lattice pentru filtrul invers, numai cu poli, $1/A_p(z)$, numite structuri lattice AR şi structurile lattice cu poli şi zerouri pentru un proces ARMA.

3.8.1. Structura lattice AR

Fie un sistem numai cu poli, cu funcția de sistem

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_p[k]z^{-k}} \tag{3.125}$$

Ecuația cu diferențe corespunzătoare este:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_p[k] y[n-k] + x[n] \tag{3.126}$$

Schimbând rolul intrării cu ieşirea, adică înlocuind în relația (3.126) $x[n]$ cu $y[n]$, şi invers, se obține ecuația cu diferențe:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_p[k] x[n-k] + y[n] \tag{3.127}$$

sau, echivalent

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{p} a_p[k] x[n-k] \tag{3.128}$$

care reprezintă ecuația cu diferențe pentru un sistem FIR cu funcția de sistem $A_p(z)$. Aşadar, un sistem IIR numai cu poli poate fi transformat în unul FIR prin interschimbarea rolului intrării cu ieşirea. Pe baza acestei observații se poate obține structura unei lattice AR(p) dintr-o lattice MA(p) prin interschimbarea semnalată anterior. Dacă structura lattice MA(p) are ieşirea $y[n] = f_p[n]$, şi intrarea $x[n] = f_0[n]$, se va impune

$$\begin{cases} x[n] = f_p[n] \\ y[n] = f_0[n] \end{cases} \tag{3.129}$$

Aceste definiții impun calculul mărimilor $\{f_m[n]\}$ în ordine inversă, lucru care poate fi efectuat prin rearanjarea ecuației recursive (3.29) pentru $f_m[n]$ şi aflarea lui $f_{m-1}[n]$ în funcție de $f_m[n]$. Astfel

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_m[n-1], m = p, p-1, ..., 1. \tag{3.130}$$

Ecuația pentru $g_m[n]$ rămâne neschimbată. Se obțin în final relațiile:

$$
\begin{aligned}
&x[n]=f_p[n]\\
&f_{m-1}[n]=f_m[n]-K_m g_{m-1}[n-1]\\
&g_m[n]=K_m f_{m-1}[n]+g_{m-1}[n-1]\\
&y[n]=f_0[n]=g_0[n]
\end{aligned}
\tag{3.131}
$$

Implementarea corespunzătoare pentru structura lattice AR(p) este prezentată în figura 3.9.

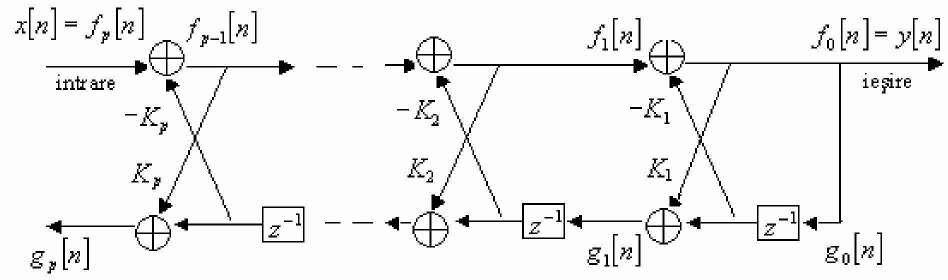


Figura 3.9. Structura corespunzătoare pentru lattice AR(p)

Se observă că structura lattice numai cu poli are o cale numai cu zerouri cu intrarea $g_0[n]$ şi ieşirea $g_p[n]$, care este identică cu calea numai cu zerouri din structura lattice MA(p). Se observă, de asemenea, că cele două structuri lattice AR(p) şi MA(p) sunt caracterizate de aceiaşi parametri, şi anume, coeficienţii de reflexie $\{K_i\}$, fapt ce permite aplicarea aceloraşi relaţii de conversie (3.53) ÷ (3.55) şi (3.57), (3.58) a parametrilor $\{a_p[k]\}$ ai realizării în formă directă a sistemului numai cu zerouri $A_p(z)$ în parametrii lattice $\{K_i\}$ ai structurii MA(p) şi pentru structurile numai cu poli.

3.8.2. Procese ARMA şi filtre lattice cu poli şi zerouri

O structură lattice numai cu poli furnizează blocul constructiv de bază pentru structurile de tip lattice care implementează sisteme IIR ce conțin atât poli cât şi zerouri. Fie un sistem IIR cu funcția de sistem

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{q}c_q[k]z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p}a_p[k]z^{-k}}=\frac{C_q(z)}{A_p(z)} \tag{3.132}$$

Fără a se pierde din generalitate, se presupune $p \geq q$. Acest sistem este caracterizat de ecuațiile cu diferențe

$$\begin{aligned} v[n]&=-\sum_{k=1}^{p}a_p[k]v[n-k]+x[n] \\ y[n]&=\sum_{k=0}^{q}c_q[k]v[n-k] \end{aligned} \tag{3.133}$$

obținute prin considerarea sistemului IIR ca o cascadă formată dintr-un sistem numai cu poli care precede un sistem numai cu zerouri. Ieşirea $y[n]$ este o combinație liniară a ieşirilor întârziate din sistemul numai cu poli.

Funcția de sistem

$$H_b(z)=\frac{G_m(z)}{Y(z)}=B_m(z) \tag{3.134}$$

unde $G_m(z)$ este transformata Z a ieşirii $g_m[n]$ din treapta a *m*-a, iar $Y(z)$, intrarea în calea numai cu zerouri, caracterizează un sistem numai cu zerouri. Prin urmare, orice combinație de $\{g_m[n]\}$ este, de asemenea, un filtru numai cu zerouri.

Fie un filtru lattice numai cu poli, cu coeficienții K_m, căruia i se adaugă o structură, numită *scară,* prin considerarea ieşirii ca o combinație liniară de $\{g_m[n]\}$. Se obține un filtru lattice cu poli şi zerouri ca în figura 3.10, a cărui ieşire este

$$y[n]=\sum_{k=0}^{q}\beta_k g_k[n] \tag{3.135}$$

unde $\{\beta_k\}$ sunt parametrii care caracterizează sistemul numai cu zerouri.

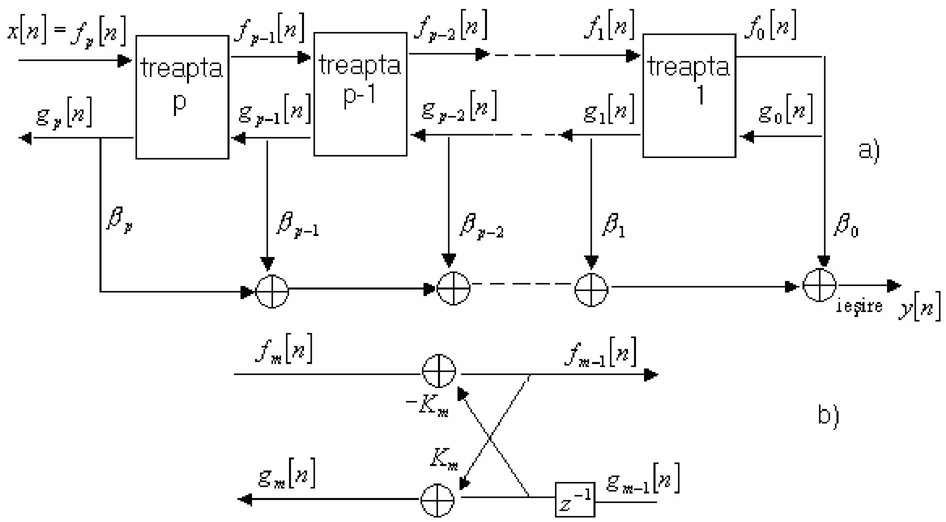


Figura 3.10. a) Structură lattice pentru un sistem cu poli şi zerouri, b) treapta m a latticei

Cu ajutorul relației (3.135), funcția de sistem corespunzătoare sistemului cu poli şi zerouri este

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{q}\beta_k\frac{G_k(z)}{X(z)} \tag{3.136}$$

Deoarece $X(z)=F_P(z)$ şi $F_0(z)=G_0(z)$, relația (3.136) se poate scrie

$$H(z)=\sum_{k=0}^{q}\beta_k\frac{G_k(z)}{G_0(z)}\frac{F_0(z)}{F_p(z)}=\frac{1}{A_p(z)}\sum_{k=0}^{q}\beta_k B_k(z) \qquad (3.137)$$

Prin identificarea cu relația (3.132), rezultă

$$C_q(z)=\sum_{k=0}^{q}\beta_k B_k(z) \qquad (3.138)$$

Această relație poate fi folosită pentru determinarea coeficienților $\{\beta_k\}$. Fiind date polinoamele $C_q(z)$ și $A_p(z)$ cu $p \geq q$, se determină întâi coeficienții de reflexie $\{K_m\}$ din coeficienții $a_p[k]$. Cu ajutorul relațiilor recursive date de (3.56) se obțin polinoamele $B_k(z), k=1,...,p$. Parametrii scării se pot obtine din relația (3.138), care se mai scrie sub forma

$$C_m(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k B_k(z)+\beta_m B_m(z)=C_{m-1}(z)+\beta_m B_m(z) \qquad (3.139)$$

sau, echivalent

$$C_{m-1}(z)=C_m(z)-\beta_m B_m(z), m=p,p-1,...,1 \qquad (3.140)$$

ceea ce permite determinarea polinoamelor de ordin inferior. Deoarece $b_m[m]=1$, parametrul β_m se determină din relația (3.140) impunând $\beta_m=c_m[m], m=p,...,1$.

Dacă o structură lattice cu poli și zerouri este excitată cu o secvență de zgomot alb, se generează un proces ARMA(p,q), a cărui densitate spectrală de putere este

$$\Gamma_{xx}(f)=\sigma_w^2\frac{|C_q(f)|^2}{|A_p(f)|^2}, \qquad (11.141)$$

unde σ_w^2 este dispersia secvenței de zgomot alb de la intrare.

3.9. Filtre Wiener pentru filtrare şi predicţie

În multe situaţii practice semnalele utile sunt afectate de perturbaţii cu caracter aditiv, motiv pentru care se pune problema proiectării unui filtru care să suprime componenta nedorită de zgomot, păstrând, în acelaşi timp, caracteristicile semnalului dorit. Se impune ca filtrul, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, să fie liniar, iar ieşirea sa să aproximeze un semnal dorit. Situaţia este ilustrată în figura 3.11.

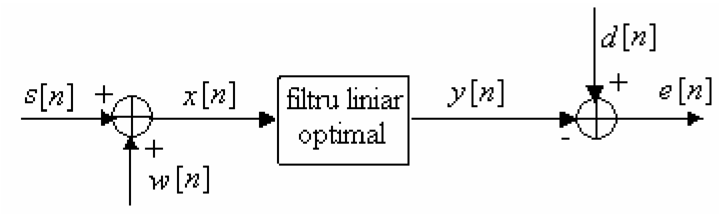


Figura 3.11. Model pentru estimarea liniară a unui semnal

unde $s[n]$-semnalul util

$w[n]$-zgomot aditiv

$d[n]$-semnal dorit

$x[n]=s[n]+w[n]$-semnalul de intrare în filtru

$y[n]$-ieşirea filtrului

$e[n]=d[n]-y[n]$-secvenţa de eroare

Se disting trei cazuri

1) $d[n]=s[n]$, situaţie cunoscută sub numele de filtrare;

2) $d[n]=s[n+D], D>0$, situaţie cunoscută sub numele de predicţie, filtrare cu anticipare sau extrapolare;

3) $d[n] = s[n-D], D > 0,$ situație cunoscută sub numele de netezire, filtrare cu întârziere sau interpolare.

Criteriul ales pentru optimizarea răspunsului la impuls al filtrului este cel de minimizare a erorii pătratice medii. Secvențele $\{s[n]\},\{w[n]\},\{d[n]\}$ se presupun de medie zero şi staționare în sens larg. Filtrul liniar optimal care minimizează eroarea pătratică medie se numeşte *filtru Wiener* şi poate fi cu răspuns finit sau infinit la impuls.

3.9.1. Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

Se presupune că filtrul cu răspuns finit la impuls are lungimea M şi coeficienții $\{h[k], 0 \le k \le M-1\}$, caz în care ieşirea sa este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \tag{3.142}$$

Valoarea pătratică medie a erorii dintre ieşirea dorită $d[n]$ şi ieşirea filtrului, $y[n]$, este

$$\xi_M = E\{(e[n_i])^2\} = E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)^2\right\} \tag{3.143}$$

Condiția necesară din care se obține valoarea de extrem a erorii este:

$$\frac{\partial E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[k]} = 0,\ 0 \le k \le M-1 \tag{3.144}$$

Înlocuind (3.143) în (3.144), rezultă

$$\frac{\partial E\left\{(e[n_i])^2\right\}}{\partial h[k]} = \frac{\partial}{\partial h[k]} E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)^2\right\} =$$

$$= E\left\{\frac{\partial}{\partial h[k]}\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)^2\right\} =$$

$$= -2E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)\left(x[n_i-m]\right)\right\} = \qquad (3.145)$$

$$= -2\left(\gamma_{xd}[m] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\gamma_{xx}[k-m]\right) = 0,\ 0 \le m \le M-1$$

sau, echivalent

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_o[k]\gamma_{xx}[k-m] = \gamma_{xd}[m],\ 0 \le m \le M-1 \qquad (3.146)$$

Relațiile (3.146) pentru $0 \le m \le M-1$ sunt cunoscute ca *ecuațiile Wiener Hopf* din care se deduc coeficienții filtrului optimal FIR care asigură o eroare pătratică minimă.

Extremul erorii pătratice medii este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2 E\left\{(e[n_i])^2\right\}}{\partial h[m]\partial h[k]} = 0, \text{pentru } m \ne k \text{ şi}$$

$$\frac{\partial^2 E\left\{(e[n_i])^2\right\}}{\partial h^2[m]} = \gamma_{xx}[0] > 0,\ 0 \le m \le M-1 \qquad (3.147)$$

Ecuațiile (3.146) poate fi exprimate în formă matriceală astfel:

$$[\Gamma_M][h_o] = [\gamma_d] \qquad (3.148)$$

unde

$$[\Gamma_M]_{M\times M}=\begin{bmatrix}\gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \ldots & \gamma_{xx}[M-1]\\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \ldots & \gamma_{xx}[M-2]\\ .. & .. & \ldots & ..\\ \gamma_{xx}[M-1] & \gamma_{xx}[M-2] & \ldots & \gamma_{xx}[0]\end{bmatrix}$$

este matricea de autocorelație, cu elementele $\Gamma_{lk}=\gamma_{xx}[l-k]$, $[\gamma_d]_{M\times 1}=[\gamma_{xd}[0] \quad \gamma_{xd}[1] \quad \ldots \quad \gamma_{xd}[M-1]]^T$ este un vector coloană cu elementele $\gamma_{xd}[l], l=0,1,\ldots,M-1$, iar

$[h_o]_{M\times 1}=[h[0] \quad h[1] \quad \ldots \quad h[M-1]]^T$ este un vector coloană ale cărui componente sunt valorile răspunsului la impuls al filtrului optimal.

Soluția pentru coeficienții filtrului optimal este

$$[h_0]=[\Gamma_M]^{-1}[\gamma_d]. \tag{3.149}$$

Deoarece matricea de corelație $[\Gamma_M]$ este de tip Toplitz, se poate folosi algoritmul Levison Durbin pentru aflarea coeficienților filtrului optimal (vezi paragraful 3.6.1).

Eroarea pătratică medie minimă a filtrului Wiener se obține înlocuind relațiile (3.146) în (3.143), adică

$$\begin{aligned}&\min\xi_M=E\left\{\left(d[n_i]-\sum_{k=0}^{M-1}h_o[k]x[n_i-k]\right)^2\right\}=\\&E\left\{\left(d[n_i]-\sum_{k=0}^{M-1}h_o[k]x[n_i-k]\right)\left(d[n_i]-\sum_{m=0}^{M-1}h_o[m]x[n_i-m]\right)\right\}=\\&\gamma_{dd}[0]-2\sum_{m=0}^{M-1}h_o[m]\gamma_{xd}[m]+\sum_{m=0}^{M-1}h_o[m]\sum_{k=0}^{M-1}h_o[k]\gamma_{xx}[m-k]=\\&\gamma_{dd}[0]-\sum_{m=0}^{M-1}h_o[m]\gamma_{xd}[m]\end{aligned} \tag{3.150}$$

Ținând cont de (3.149), relația (3.150) se scrie, echivalent, sub forma

$$\min \xi_M = \gamma_{dd}[0] - [\gamma_d]^T [\Gamma_M]^{-1} [\gamma_d] \tag{3.151}$$

Se consideră în continuare cazul când semnalul dorit a fi estimat este de forma

$$d[n] = s[n+D], \text{cu D întreg, fixat} \tag{3.152}$$

Filtrul liniar optimal operează asupra semnalului observat afectat de zgomot aditiv

$$x[n] = s[n] + w[n] \tag{3.153}$$

pentru a elimina zgomotul, producând un răspuns $y[n]$ care să aproximeze $s[n+D]$. Filtrul optimal va fi de întârziere, dacă $D < 0$ şi de anticipare, dacă $D > 0$.

Dacă semnalul $s[n]$ şi zgomotul $w[n]$ sunt necorelate, cum este de obicei cazul în practică, atunci

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}[k] &= \gamma_{ss}[k] + \gamma_{ww}[k] \\ \gamma_{xd}[m] &= \gamma_{ss}[m+D] \end{aligned} \tag{3.154}$$

iar ecuațiile Wiener Hopf sunt de forma

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{M-1} h_o[k]\left[\gamma_{ss}[m-k] + \gamma_{ww}[m-k]\right] = \\ &= \gamma_{ss}[m+D], m = 0, \ldots, M-1 \end{aligned} \tag{3.155}$$

3.9.2. Proprietatea de ortogonalitate a filtrului optimal

Filtrul liniar optimal ce satisface ecuația Wiener-Hopf (3.146) are o proprietate statistică importantă, şi anume, aceea că eroarea pătratică medie este minimă, dacă coeficienții filtrului

$\{h[n]\}$ au fost aleşi astfel încât eroarea de estimare şi datele $x[n]$ sunt ortogonale, adică:

$$E\{x[n_i - m]e[n_i]\} = 0, 0 \le m \le M - 1 \qquad (3.156)$$

unde

$$e[n] = d[n] - y[n] = d[n] - \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m] \qquad (3.157)$$

Într-adevăr, egalând cu zero derivata erorii pătratice medii în raport cu $h[m]$, rezultă

$$\frac{\partial E\left[e^2[n_i]\right]}{\partial h[m]} = 2E\left\{\frac{\partial e[n_i]}{\partial h[m]} e[n_i]\right\} = 0 \qquad (3.158)$$

În (3.158) ordinea operaţiilor de mediere şi derivare a fost interschimbată.

Din (3.157) se observă că

$$\frac{\partial e[n]}{\partial h[m]} = -\frac{\partial}{\partial h[m]} \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m] = -x[n-m] \qquad (3.159)$$

Înlocuind (3.159) în (3.158) rezultă $E\{x[n_i - m]e[n_i]\} = 0$, $m = 0,...,M - 1$, adică (3.156).

3.9.3. Determinarea funcţiei pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepţionarea secvenţei de zgomot alb

În paragraful precedent s-a impus constrângerea ca filtrul să fie de lungime finită, obţinându-se un sistem de *M* ecuaţii liniare din care să rezulte coeficienţii optimi ai filtrului. In paragraful de faţă, filtrele, ca şi datele se consideră infinite ca durată. Ieşirea filtrului IIR se calculează cu relaţia

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k] \tag{3.160}$$

Coeficienţii filtrului rezultă din minimizarea erorii pătratice medii dintre semnalul de ieşire dorit $d[n]$ şi $y[n]$, adică

$$\xi_{\infty}=E\left\{(e[n_i])^2\right\}=E\left\{(d[n_i]-\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n_i-k])^2\right\} \tag{3.161}$$

Aplicând principiul ortogonalităţii, se obţin ecuaţiile Wiener-Hopf

$$\sum_{k=0}^{\infty}h_o[k]\gamma_{xx}[m-k]=\gamma_{xd}[m], m\geq 0 \tag{3.162}$$

Eroarea pătratică medie minimă se obţine din relaţia (3.150) pentru $M\to\infty$, adică

$$EPMM_{\infty}=\min_{h}\xi_{\infty}=\gamma_{dd}[0]-\sum_{m=0}^{\infty}h_o[m]\gamma_{xd}[m] \tag{3.163}$$

Ecuaţiile Wiener-Hopf (3.162) nu pot fi rezolvate direct cu ajutorul tehnicilor oferite de transformata Z, deoarece ecuaţiile sunt valabile numai pentru $m\geq 0$. Filtrul optimal Wiener-Hopf IIR va fi determinat cu ajutorul unui filtru de albire căruia i se aplică procesul stationar $\{x[n]\}$.

În cazul filtrelor discrete optimale IIR cauzale, ecuaţia Wiener-Hopf este dată de relaţia (3.162). În cazul recepţionării unei secvenţe de zgomot alb, notată cu $w[n]$, fie $\gamma_{ww}[m]$ funcţia de autocorelaţie a acesteia, $\gamma_{wd}[m]$ funcţia de corelaţie dintre secvenţa recepţionată $w[n]$ şi secvenţa dorită a fi estimată $d[n]$ şi $h_{ow}[k]$ funcţia pondere a unui filtru optimal IIR ce satisface ecuaţia Wiener-Hopf la recepţionarea secvenţei $w[n]$. În cazul secvenţei recepţionate de tip zgomot alb, ecuaţia (3.162) devine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{oa}[k]\,\gamma_{ww}[m-k] = \gamma_{wd}[m],\quad m \geq 0 \tag{3.164}$$

Dar

$$\gamma_{ww}[m-k] = \sigma_w^2\,\delta[m-k] \tag{3.165}$$

Ținând cont de (3.165), ecuația (3.164) devine:

$$\sigma_w^2 h_{ow}[m] = \gamma_{wd}[m],\quad m \geq 0 \tag{3.166}$$

Fie ${}^{+}\gamma_{wd}[m]$ partea lui $\gamma_{wd}[m]$ pentru $m\geq0$ și ${}^{-}\gamma_{wd}[m]$ pentru $m<0$.

Rezultă atunci:

$$h_{ow}[m] = \begin{cases} \dfrac{{}^{+}\gamma_{wd}[m]}{\sigma_w^2}, \text{pentru } m \geq 0 \\ 0, \text{pentru } m < 0 \end{cases} \tag{3.167}$$

Aplicând transformata Z relației (3.167), rezultă:

$$\begin{aligned} Z\{h_{ow}[m]\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{ow}[m] z^{-m} = H_{ow}(z) = \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{m=0}^{\infty} {}^{+}\gamma_{wd}[m] z^{-m} = \frac{1}{\sigma_w^2}\cdot {}^{+}\Gamma_{wd}(z) \end{aligned} \tag{3.168}$$

3.9.4. Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

Se reamintește că un proces aleator stationar $x[n]$, cu funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[k]$ și densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(f)$ poate fi obținut la ieșirea unui filtru cu funcția de sistem $G(z)$ și răspunsul la impuls $g[n]$, la intrarea căruia se aplică zgomot alb $w[n]$. Procesul $x[n]$ este albit de filtrul cu funcția de sistem $\dfrac{1}{G(z)}$.

Funcția $G(z)$ este partea de fază minimă obținută din factorizarea spectrală a lui $\Gamma_{xx}(z)$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z) G(z^{-1}), \tag{3.169}$$

regiunea de convergență pentru $G(z)$ fiind $|z| > r_1$ cu $r_1 < 1$.

Pentru a putea folosi rezultatul din paragraful precedent, filtrul optimal Wiener $H_o(z)$ se consideră a fi o cascadă formată dintr-un filtru de albire caracterizat de funcția de sistem $\dfrac{1}{G(z)}$ și un alt filtru caracterizat de funcția de sistem $H_{ow}(z)$, a cărui ieșire $y[n]$ este identică cu ieșirea filtrului Wiener optimal.

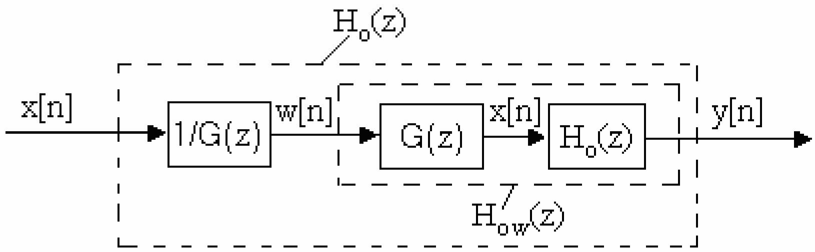


Figura 3.12. Filtru optimal Wiener

Deoarece

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] w[n-k] \tag{3.170}$$

și $e[n] = d[n] - y[n]$, aplicarea principiului ortogonalității determină următoarele ecuații Wiener-Hopf pentru filtrul $H_{ow}(z)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] \gamma_{ww}[m-k] = \gamma_{wd}[m], m \geq 0 \tag{3.171}$$

Optimalitatea filtrului $H_{ow}(z)$ asigură și optimalitatea filtrului $H_o(z)$, deoarece

$$E\{x[n_i]e[n_i+m]\} =$$

$$= E\left\{\sum_{p=0}^{\infty} g[p]w[n_i-p]\left(d[n_i+m]-\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n_i+m-k]\right)\right\} =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} g[p]\left[E\left\{(w[n_i-p]d[n_i+m])-\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n_i-p][w[n_i+m-k]\right\}\right] =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} g[p]\left[\gamma_{wd}[m+p]-\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]\gamma_{ww}[m+p-k]\right] = 0 \tag{3.172}$$

Deoarece $w[n]$ este zgomot alb, rezultă că $\gamma_{ww}\left[m-k\right]=0$, cu excepția cazului în care $m=k$. Din (3.171) se obține

$$h_{ow}\left[m\right]=\frac{\gamma_{wd}\left[m\right]}{\gamma_{ww}\left[0\right]}=\frac{\gamma_{wd}\left[m\right]}{\sigma_w^2}, m \geq 0 \tag{3.173}$$

Transformata Z, a secvenței $h_{ow}\left[m\right]$ se determină cu relația

$$H_{ow}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}\left[k\right]z^{-k}=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{wd}\left[k\right]z^{-k} \tag{3.174}$$

Transformata Z bilaterală a secvenței $\gamma_{wd}\left[k\right]$ se notează cu $\Gamma_{wd}\left(z\right)$ şi se calculează cu relația

$$\Gamma_{wd}\left(z\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{wd}\left[k\right]z^{-k} \tag{3.175}$$

iar partea sa cauzală se notează cu

$$^{+}\left[\Gamma_{wd}\left(z\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{wd}\left[k\right]z^{-k} \tag{3.176}$$

Cu relația (3.176), relația (3.174) devine

$$H_{ow}\left(z\right)=\frac{1}{\sigma_w^2}\,^{+}\left[\Gamma_{wd}\left(z\right)\right] \tag{3.177}$$

Pentru a determina $^{+}\left[\Gamma_{wd}\left(z\right)\right]$ se exprimă ieşirea filtrului de albire în forma

$$w[n]=\sum_{k=0}^{\infty} v[k]x[n-k] \tag{3.174}$$

unde $\{v[k], k\geq 0\}$ este răspunsul la impuls al filtrului de albire

$$\frac{1}{G(z)}=V(z)=\sum_{k=0}^{\infty} v[k]z^{-k} \tag{3.179}$$

Atunci

$$\begin{aligned}\gamma_{wd}[k]&=E\{w[n_i]d[n_i+k]\}=\\&=\sum_{m=0}^{\infty} v[m]E\{x[n_i-m]d[n_i+k]\}=\sum_{m=0}^{\infty} v[m]\gamma_{xd}[k+m]\end{aligned} \tag{3.180}$$

Transformata Z a funcției de corelație $\gamma_{wd}[k]$ este

$$\begin{aligned}\Gamma_{wd}(z)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty} v[m]\gamma_{xd}[k+m]\right]z^{-k}=\\&=\sum_{m=0}^{\infty} v[m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{xd}[k+m]z^{-k}=\sum_{m=0}^{\infty} v[m]z^{m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{xd}[k]z^{-k}=\\&=V\left(z^{-1}\right)\Gamma_{xd}(z)=\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G\left(z^{-1}\right)}\end{aligned} \tag{3.181}$$

Rezultă astfel

$$H_{ow}(z)=\frac{1}{\sigma_w^2}\left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G\left(z^{-1}\right)}\right]^{+} \tag{3.182}$$

Filtrul optimal Wiener are funcția de sistem

$$H_o(z)=\frac{H_{0w}(z)}{G(z)}=\frac{1}{\sigma_w^2 G(z)}\left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G\left(z^{-1}\right)}\right]^{+} \tag{3.183}$$

În continuare se exprimă EPMM dată de (3.163) în funcție de caracteristicile în frecvență ale filtrului. Valoarea $\gamma_{dd}\left[0\right]$ a funcției de autocorelație $\gamma_{dd}\left[k\right]$ în origine se determină astfel:

Deoarece

$$\gamma_{dd}\left[k\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \Gamma_{dd}(z)z^{k-1}dz \qquad (3.184)$$

rezultă că

$$\gamma_{dd}\left[0\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{\Gamma_{dd}\left(z\right)}{z}dz=\sigma_d^2 \qquad (3.185)$$

unde C este un contur din regiunea de convergență al lui $\Gamma_{dd}\left(z\right)$ care conține originea, parcurs în sens antiorar.

Al doilea termen al relației (3.163) se transformă uşor în domeniul frecvență, aplicând teorema lui Parseval [72]. Deoarece $h_o\left[k\right]=0, k<0$ rezultă

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_o\left[k\right]\gamma_{xd}\left[k\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C H_o(z)\Gamma_{xd}(z^{-1})z^{-1}dz \qquad (3.186)$$

unde C este un contur care înconjoară originea, plasat în regiunea de convergență a lui $H_o\left(z\right)$şi $\Gamma_{xd}\left(z^{-1}\right)$. Înlocuind relațiile (3.185) şi (3.186) în)3.163), rezultă

$$EPMM_\infty=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\left[\Gamma_{dd}\left(z\right)-H_o\left(z\right)\Gamma_{xd}\left(z^{-1}\right)\right]z^{-1}dz \qquad (3.187)$$

3.9.5. Filtru Wiener IIR necauzal

Dacă se renunță la constrângerea impusă filtrului Wiener IIR de a fi cauzal, ieşirea acestuia devine

$$y\left[n\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h\left[n\right]x\left[n-k\right] \qquad (3.188)$$

Acest filtru este nerealizabil. El poate fi văzut ca un filtru de netezire în care sunt folosite valorile semnalului din viitorul infinit pentru a furniza estimatul $\hat{d}[n]=y[n]$ al semnalului dorit $d[n]$. Aplicând principiul ortogonalității, rezultă ecuațiile Wiener-Hopf pentru filtrul necauzal

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\gamma_{xx}[l-k]=\gamma_{xd}[l], -\infty < l < \infty \tag{3.189}$$

Aplicând transformata Z relației (3.189) se obține

$$H_{nc}(z)=\frac{\Gamma_{xd}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} \tag{3.190}$$

EPMM rezultată este

$$EPMM_{nc}=\gamma_{dd}[0]-\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\gamma_{xd}[k] \tag{3.191}$$

iar în domeniul Z

$$EPMM_{nc}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\left[\Gamma_{dd}(z)-H_{nc}(z)\Gamma_{xd}\left(z^{-1}\right)\right]z^{-1}dz \tag{3.192}$$

3.10. Probleme rezolvate

1. Funcția de autocorelație a unui proces aleator este

$$\gamma_{xx}[m]=\begin{cases}1, m=0\\ -1/2, m=\pm 1\\ 5/8, m=\pm 2\\ -11/16, m=\pm 3\\ 0, \text{în rest}\end{cases}$$

Să se determine funcția de sistem $A_m(z)$ a filtrului de predicție, coeficienții de reflexie K_m și eroarea pătratică medie de predicție E_m^f, pentru $m = 1,2,3.$

Soluție

Coeficienții filtrului predictor se determină cu ajutorul algoritmului Levison Durbin.

Se inițializează pentru $m = 1,\ a_1[1] = -\dfrac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]},\ E_1^f = (1-|a_1[1]|^2)\gamma_{xx}[0]$

La pasul *m* se calculează

$$a_m[m] = -\frac{\gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1}[k]\gamma_{xx}[m-k]}{E_{m-1}^f},\ E_m^f = (1-|a_m[m]|^2)E_{m-1}^f$$

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + a_m[m]a_{m-1}[m-k], \quad 1 \le k \le m-1$$

$$m = 1,\ a_1[1] = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]} = \frac{1}{2},\ E_1^f = (1-(1/2)^2)1 = 3/4$$

$$A\ (z) = 1 + a_1[1]z^{-1} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}; \quad K_1 = a_1[1] = \frac{1}{2}$$

$$m = 2,\ a_2[2] = -\frac{\gamma_{xx}[2] + \sum_{k=1}^{1} a_1[k]\gamma_{xx}[2-k]}{E_1^f} = -\frac{\gamma_{xx}[2] + a_1[1]\gamma_{xx}[1]}{E_1^f} = -\frac{1}{2},$$

$$K_2 = a_2[2],\ E_2^f = (1-(-1/2)^2)E_1^f = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$a_2[k] = a_1[k] + a_2[2]a_1[2-k], \quad k = 1$$

$$a_2[1] = a_1[1] + a_2[2]a_1[1] = \frac{1}{4}$$

$$A_2(z) = 1 + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]z^{-2} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$m=3,\ a_3[3]=-\frac{\gamma_{xx}[3]+\sum_{k=1}^{2}a_2[k]\gamma_{xx}[3-k]}{E_2^f}=$$

$$=-\frac{\gamma_{xx}[3]+a_2[1]\gamma_{xx}[2]+a_2[2]\gamma_{xx}[1]}{E_2^f}=-\frac{1}{2},$$

$$K_3=a_3[3],\ E_3^f=(1-(-1/2)^2)E_2^f=\frac{27}{64}=\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$a_3[k]=a_2[k]+a_3[3]a_2[3-k],\quad 1\le k\le 2$$

$$k=1,\ a_3[1]=a_2[1]+a_3[3]a_2[2]=\frac{1}{2}$$

$$k=2,\ a_3[2]=a_2[2]+a_3[3]a_2[1]=-\frac{5}{8}$$

$$A_3(z)=1+a_2[1]z^{-1}+a_2[2]z^{-2}+a_3[3]z^{-3}=1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{5}{8}z^{-2}-\frac{1}{2}z^{-3}$$

2. Un proces AR(2) este caracterizat de coeficienții filtrului de predicție $a_2[1]=\frac{3}{8},\ a_2[2]=\frac{1}{2}$.

Dacă procesul AR(2) s-a obținut prin filtrarea unui zgomot alb cu dispersia σ_w^2, să se determine:

a) $\gamma_{xx}[m],\ 0\le m\le 2$

b) coeficienții de reflexie K_m, $1\le m\le 2$

c) eroarea de predicție E_2^f.

Soluție

a) Ecuațiile Yule – Walker sunt

$$\gamma_{xx}[m]+\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}[m-k]=\begin{cases}\sigma_w^2, m=0\\ 0, 1\le m\le p\end{cases}$$

unde p=2 este ordinul predicției.

$m=0 \quad \gamma_{xx}[0]+a_2[1]\gamma_{xx}[-1]+a_2[2]\gamma_{xx}[-2]=\sigma_w^2$

$m=1 \quad \gamma_{xx}[1]+a_2[1]\gamma_{xx}[0]+a_2[2]\gamma_{xx}[-1]=0$

$m=2 \quad \gamma_{xx}[2]+a_2[1]\gamma_{xx}[1]+a_2[2]\gamma_{xx}[0]=0$

Cum funcția de autocorelație este pară, rezultă

$$\gamma_{xx}[0]+\frac{3}{8}\gamma_{xx}[1]+\frac{1}{2}\gamma_{xx}[2]=\sigma_w^2$$

$$\gamma_{xx}[1]+\frac{3}{8}\gamma_{xx}[0]+\frac{1}{2}\gamma_{xx}[1]=0$$

$$\gamma_{xx}[2]+\frac{3}{8}\gamma_{xx}[1]+\frac{1}{2}\gamma_{xx}[0]=0$$

de unde rezultă $\gamma_{xx}[0]=\frac{64}{45}\sigma_w^2,\ \gamma_{xx}[1]=-\frac{16}{45}\sigma_w^2,\ \gamma_{xx}[2]=-\frac{26}{45}\sigma_w^2$

b) Folosind relația (3.56), cu $K_2=a_2[2]$, se poate scrie

$A_1(z)=\dfrac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}$, unde

$A_2(z)=1+a_2[1]z^{-1}+a_2[2]z^{-2}$

$B_2(z)=z^{-2}+a_2[1]z^{-1}+a_2[2]$

Înlocuind datele problemei în relațiile precente şi pe acestea în relația pentru $A_1(z)$, rezultă $A_1(z)=1+\frac{1}{4}z^{-1},\ K_1=a_1[1]=\frac{1}{4}$.

c) $E_m^f=(1-a_m^2[m])E_{m-1}^f=\gamma_{xx}[0]\prod_{k=1}^{m}(1-a_k^2[k])$

$$m=2,\ a_1[1]=\frac{1}{4},\ a_2[2]=\frac{1}{2}$$

$$E_2^f=\gamma_{xx}[0]\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\sigma_w^2$$

3. Fie semnalul $x[n]=s[n]+v[n]$, unde $s[n]$ este un proces AR(1) caracterizat de ecuația cu diferențe

$$s[n]=as[n-1]+v[n], \ ,$$

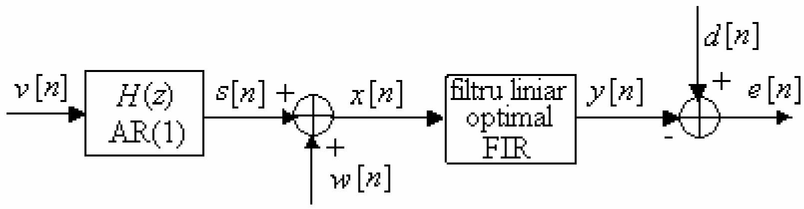
unde $a=0,6$, $v[n]$ este zgomot alb cu dispersia $\sigma_v^2=0,64$, iar $w[n]$ este zgomot alb cu dispersia $\sigma_w^2=1$. Procesele $v[n]$ și $w[n]$ sunt necorelate.

a) Să se determine funcțiile de autocorelație $\gamma_{ss}[m]$ și $\gamma_{xx}[m]$;

b) Să se determine răspunsul la impuls al filtrului Wiener FIR, de lungime M=2, pentru estimarea semnalului $s[n]$ din $x[n]$.

c) Să se determine eroarea pătratică medie minimă de estimare, pentru M=2.

Soluție



a) $$\Gamma_{ss}(z)=V(z)V(z^{-1})H(z)H(z^{-1})=\sigma_v^2\frac{1}{(1-az^{-1})(1-az)}=$$

$$=\sigma_v^2\frac{-\frac{1}{a}z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}=\sigma_v^2\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-\frac{1}{a}}\right)$$

$$\gamma_{ss}[m]=Z^{-1}\{\Gamma_{ss}(z)\}=\frac{\sigma_v^2}{1-a^2}\left(a^m u[m]+\left(\frac{1}{a}\right)^m u[-m-1]\right)=\frac{\sigma_v^2}{1-a^2}a^{|m|}$$

Înlocuind $a=0,6$ și $\sigma_v^2=0,64$, rezultă $\gamma_{ss}[m]=0,6^{|m|}$

Ținând cont de (3.154), rezultă

$$\gamma_{xx}[m]=\gamma_{ss}[m]+\gamma_{ww}[m]=0,6^{|m|}+\sigma_w^2\delta[m]=0,6^{|m|}+\delta[m]$$

b) $$M=2,\quad \sum_{k=0}^{1} h_o[k]\gamma_{xx}[l-k]=\gamma_{dx}[l],\quad l=0,1$$

Folosind (3.154), relația precedentă devine

$$\sum_{k=0}^{1} h_o[k][\gamma_{ss}[l-k]+\gamma_{ww}[l-k]]=\gamma_{ss}[l],\quad l=0,1$$

Matriceal, aceasta se scrie

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_o[0] \\ h_o[1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma_{ss}[0] \\ \gamma_{ss}[1] \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \gamma_{xx}[0]=2, \gamma_{xx}[-1]=\gamma_{xx}[1]=0,6 \\ \gamma_{ss}[0]=1, \gamma_{ss}[1]=0,6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} h_o[0]=0,4505 \\ h_o[1]=0,1648 \end{cases}$$

c) Cu relația (3.150) rezultă

$$EPMM_2=\gamma_{ss}[0]-\gamma_{ss}[0]h[0]-\gamma_{ss}[1]h[1]=$$
$$=1-0,4505-(0,1648)(0,6)=0,45$$

Eroarea poate fi redusă prin mărirea ordinului filtrului, M.

4. În condițiile problemei precedente să se determine funcția de sistem, funcția pondere şi eroarea pătratică medie minimă a filtrului optimal IIR cauzal.

Soluție

Conform relației (3.183), funcția de sistem a filtrului IIR optimal cauzal se determină cu relația

$$H_o(z)=\frac{1}{\sigma_w^2 G(z)}\left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})}\right]^{+}$$

Conform figurilor (3.11) şi (3.12),

$$\Gamma_{xx}(z)=\sigma_w^2 G(z)G(z^{-1}),\quad \Gamma_{xd}(z)=\Gamma_{ss}(z),\quad X(z)=S(z)+W(z)$$

$$\Gamma_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}) = (S(z)+W(z))(S(z^{-1})+W(z^{-1})) =$$
$$S(z)S(z^{-1}) + W(z)W(z^{-1}) = \Gamma_{ss}(z) + \sigma_w^2,$$

deoarece $\gamma_{sw}[m] = \gamma_{ws}[m] = 0$

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} + 1 = 1,8\frac{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}$$

de unde rezultă $\sigma_w^2 = 1,8$ şi $G(z) = \dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-0,6z^{-1}}$

$$\Gamma_{xd}(z) = \Gamma_{ss}(z)$$

$$\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \cdot \frac{1-0,6z}{1-\frac{1}{3}z} =$$

$$= \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z\right)} = \frac{0,8z}{z-0,6} + \frac{\frac{0,8}{3}z}{1-\frac{1}{3}z}$$

$$\left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G\left(z^{-1}\right)}\right]_+ = \frac{0,8z}{z-0,6}$$

$$H_o(z) = \frac{1}{1,8\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-0,6z^{-1}}}\frac{0,8z}{z-0,6} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$h_o[n] = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$EPMM_{\infty} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\Gamma_{dd}(z) - H_o(z)\Gamma_{xd}(z^{-1})\right] z^{-1} dz =$$

$$= \sum_{toți\ polii\ din\ C} \mathrm{Rez}\left\{\left[\Gamma_{dd}(z) - H_o(z)\Gamma_{xd}(z^{-1})\right] z^{-1}\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \left(\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} - \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \right) z^{-1} dz =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{0,356 z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-0,6z)} dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{-\frac{0,356}{0,6}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{0,6}\right)} dz =$$

$$\mathrm{Re}\, z \left. \frac{-\frac{0,356}{0,6}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{0,6}\right)} \right|_{z=\frac{1}{3}} = 0,445$$

5. În condițiile problemei 3, să se determine funcția de sistem, funcția pondere și eroarea pătratică medie minimă a filtrului optimal IIR necauzal.

Soluție

Conform relației (3.190), funcția de sistem a filtrului Wiener IIR necauzal este

$$H_{nc}(z) = \frac{\Gamma_{xd}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} = \frac{\Gamma_{ss}(z)}{\Gamma_{ss}(z)+1} = \frac{\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}}{1,8\frac{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}} =$$

$$= \frac{0,64}{2(1-0,3z^{-1}-0,3z)} = \frac{0,3555}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$$

care, evident este necauzal.

Eroarea pătratică medie minimă se determină cu relația (3.192)

$$EPMM_{nc} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\Gamma_{dd}(z) - H_{nc}(z)\Gamma_{xd}\left(z^{-1}\right)\right] z^{-1}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\Gamma_{ss}(z) - H_{nc}(z)\Gamma_{ss}\left(z^{-1}\right)\right] z^{-1}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\Gamma_{ss}(z)(1 - H_{nc}(z))\right] z^{-1}dz =$$

Integrandul expresiei de mai sus este

$$\left[\Gamma_{ss}(z)(1-H_{nc}(z))\right]z^{-1} =$$

$$= \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}\left(1-\frac{0,32}{1-0,3z^{-1}-0,3z}\right)z^{-1} =$$

$$\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}\cdot\frac{0,68-0,3z^{-1}-0,3z}{1-0,3z^{-1}-0,3z}z^{-1} =$$

$$\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}\frac{\left(z-\frac{1}{0,6}\right)(z-0,6)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-3)}z^{-1} = \frac{0,64}{(-0,6)\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-3)}$$

Cum singurul pol din interiorul cercului unitate este $z = \frac{1}{3}$, reziduul corespunzător este

$$\left.\frac{0,64}{(-0,6)(z-3)}\right|_{z=\frac{1}{3}} = 0,4\text{, adică } EPMM_{nc} = 0,4.$$

Se observă, așa cum era de așteptat, că

$$EPMM_{nc} < EPMM_{\infty} < EPMM_2$$