

CAPITOLUL 5

ESTIMAREA SPECTRULUI DE PUTERE

Analiza spectrală a semnalelor deterministe a fost introdusă ca un mijloc de caracterizare a semnalelor în domeniul frecvență. Semnalele periodice sunt analizate în domeniul frecvență cu ajutorul seriei Fourier, iar cele aperiodice de energie finită, cu ajutorul transformatei Fourier.

În capitolul de față se urmărește estimarea caracteristicilor spectrale ale semnalelor considerate a fi procese aleatoare, pentru care, datorită fluctuațiilor aleatoare, nu este posibilă aplicarea directă a analizei Fourier, ci se adoptă o tratare statistică a lor. În particular, funcția de autocorelație a proceselor aleatoare staționare în sens larg este potrivită pentru caracterizarea lor statistică, iar transformata Fourier a acesteia, care reprezintă densitatea spectrală de putere, face legătura între domeniile timp și frecvență. În capitolul de față, problema estimării spectrale constă în determinarea componentelor spectrale ale procesului aleator staționar în sens larg, pe baza unei mulțimi finite de observații asupra procesului.

5.1. Estimarea spectrului semnalelor din observarea pe intervale de lungime finită

Lungimea finită a datelor de analizat reprezintă o limitare

esențială asupra calității estimatului spectrului de putere. Pentru semnale staționare, cu cât lungimea datelor este mai mare, cu atât va fi mai bun estimatul construit pe baza datelor. Pentru semnale nestaționare nu se poate selecta o înregistrare de lungime finită pentru estimarea spectrului, lungimea acesteia fiind determinată de parametrii statisticii semnalului. Se urmărește selectarea datelor de lungimea cea mai mică posibilă, care să permită obținerea caracteristicilor spectrale ale semnalului de date.

Una din problemele care poate apărea în metodele clasice de estimare a spectrului de putere, pe baza unor date de lungime finită, este distorsionarea spectrului datorită trunchierii datelor. Această problemă apare atât în calculul spectrului semnalelor deterministe, cât și în estimarea spectrului de putere al semnalelor aleatoare. Deoarece este mai ușor de observat efectul lungimii finite a datelor pentru un semnal determinist, se va analiza întâi acest caz, considerând ulterior semnalele aleatoare și estimarea spectrului lor de putere.

5.1.1. Calculul densității spectrale de energie

Se urmărește calculul spectrului unui semnal determinist dintr-o secvență finită de date. Secvența $x[n]$ este, de obicei, rezultatul eșantionării unui semnal continuu $x_a(t)$ cu o frecvență constantă F_s .

Se urmărește obținerea unui estimat al spectrului real dintr-o secvență de durată finită $x[n]$. Dacă $x_a(t)$ este un semnal de energie finită, adică

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt < \infty, \quad (5.1)$$

atunci transformata sa Fourier există și este dată de relația

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (5.2)$$

Conform teoremei lui Parseval, energia semnalului este

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)|^2 dF \quad (5.3)$$

Cantitatea $|X_a(F)|^2$ reprezintă distribuția de energie a semnalului funcție de frecvență și se numește *densitate spectrală de energie* $S_{xx}(F)$, adică se poate scrie:

$$S_{xx}(F) = |X_a(F)|^2 \quad (5.4)$$

Pe de altă parte, $S_{xx}(F)$ este transformata Fourier a funcției de autocorelație $R_{xx}(\tau)$ a semnalului de energie finită

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) x_a(t + \tau) dt \quad (5.5)$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} S_{xx}(F) &= F \{ R_{xx}(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) x_a(t + \tau) e^{-j2\pi F\tau} dt d\tau \end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabilă $t + \tau = p$, $d\tau = dp$, se obține

$$\begin{aligned} S_{xx}(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) x_a(p) e^{-j2\pi Fp} e^{j2\pi Ft} dt dp = \\ &= X_a(F) X_a^*(F) = |X_a(F)|^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

În continuare, se calculează densitatea spectrală de energie a semnalului $x_a(t)$ din eșantioanele sale, prelevate cu frecvența F_s . Pentru a evita eroarea alias, banda semnalului, B , se limitează prin prefiltrare, astfel încât $F_s > 2B$.

Spectrul semnalului eșantionat $x[n]$ este

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \text{ sau } X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \quad (5.7)$$

care se exprimă în funcție de spectrul semnalului analogic, în forma [70]

$$X(f) = X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \quad (5.8)$$

În absența erorii alias, în domeniul fundamental $|F| \leq \frac{F_s}{2}$ există relația

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2} \quad (5.9)$$

Densitatea spectrală de energie a semnalului eșantionat este

$$S_{xx}(f) = S_{xx}\left(\frac{F}{F_s}\right) = \left|X\left(\frac{F}{F_s}\right)\right|^2 = F_s^2 |X_a(F)|^2 \quad (5.10)$$

Se poate arăta ușor că, dacă funcția de autocorelație a semnalului eșantionat este

$$r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+k] \quad (5.11)$$

atunci, transformată sa Fourier este egală cu densitatea spectrală de energie, $S_{xx}(f)$, adică

$$S_{xx}(f) = F \{r_{xx}[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] e^{-j2\pi kf} \quad (5.12)$$

Din cele prezentate anterior rezultă două metode de calcul pentru densitatea spectrală de energie:

1) *metoda directă*, care implică calculul transformatei Fourier pentru $\{x[n]\}$ și apoi

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.13)$$

2) *metoda indirectă* sau *corelativă*, care necesită doi pași de calcul:

- a) calculul funcției de autocorelație $r_{xx}[k]$ din $x[n]$,
- b) transformata Fourier a funcției $r_{xx}[k]$, cu relația (5.12).

În practică, se poate calcula densitatea spectrală de energie numai pentru secvențe finite $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$. Limitarea duratei unei secvențe $x[n]$ la N puncte, echivalează cu multiplicarea lui $x[n]$ cu o fereastră rectangulară, astfel încât

$$\tilde{x}[n] = x[n]w_R[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (5.14)$$

Această multiplicare echivalează cu convoluția spectrelor [26], adică

$$\tilde{X}(f) = X(f) * W_R(f) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha)W_R(f - \alpha)d\alpha \quad (5.15)$$

Spectrul funcției $\tilde{X}(f)$ aproximează mai fidel spectrul $X(f)$, dacă spectrul $W_R(f)$ este “îngust” în comparație cu $X(f)$, fapt ce implică $w_R[n]$ de lungime suficient de mare [71]. Chiar dacă $W_R(f)$ este ”îngust” față de $X(f)$, convoluția dintre $X(f)$ și lobii laterali ai lui $W_R(f)$ are ca rezultat lobi laterali în $\tilde{X}(f)$ în benzi de frecvență în care spectrul semnalului $x[n]$ este nul. Această energie din lobii laterali se numește *reziduală* sau *scurgere spectrală* (leakage). Pentru a ilustra problema scurgerii spectrale, se consideră următorul exemplu.

Exemplul 5.1.

Se consideră un semnal cu spectrul $X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 0,1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

Să se efectueze convoluția dintre semnalul $X(f)$ și spectrul ferestrei rectangulare, cu lungimea $N=61$.

Soluție

Spectrul $W_R(f)$ al ferestrei rectangulare cu lungimea $N=61$ este prezentat în figura 5.1. Se observă că lățimea lobului principal al funcției fereastră este $\Delta\omega = 4\pi/61$ sau $\Delta f = 2/61$, care este

îngust comparativ cu $X(f)$. Convoluția dintre $X(f)$ și $W_R(f)$ este ilustrată în figura 5.2. Se observă că energia s-a “scurs” în domeniul de frecvență $0,1 < |f| \leq 0,5$, unde $X(f) = 0$. Acest lucru este determinat de lățimea lobului principal al lui $W_R(f)$, care cauzează o lățire a lui $X(f)$ în afara domeniului $|f| \leq 0,1$. Energia din lobi laterali ai lui $\tilde{X}(f)$ se datorează prezenței lobilor laterali în $W_R(f)$ cu care se efectuează convoluția lui $X(f)$.

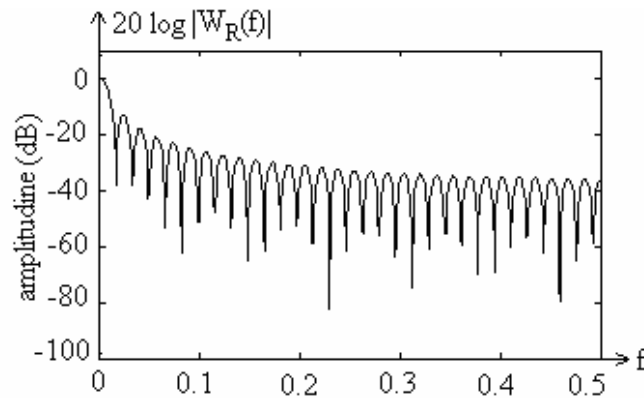


Fig. 5.1. Spectrul ferestrei rectangulare de lungime $M=61$

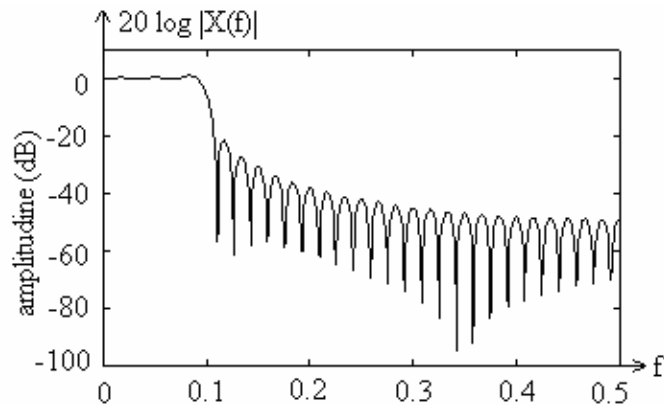


Fig.5.2. Spectrul obținut din convoluția ferestrei rectangulare de lungime $M=61$ cu spectrul filtrului ideal din exemplul 5.1.

Ca și în cazul proiectării filtrelor FIR prin metoda ferestrelor, scurgerea spectrală din cauza lobilor laterali poate fi redusă prin

selectarea ferestrelor cu lobi laterali reduși, fapt care determină o creștere a netezirii sau lățirii caracteristicilor spectrale ale lui $X(f)$ [71].

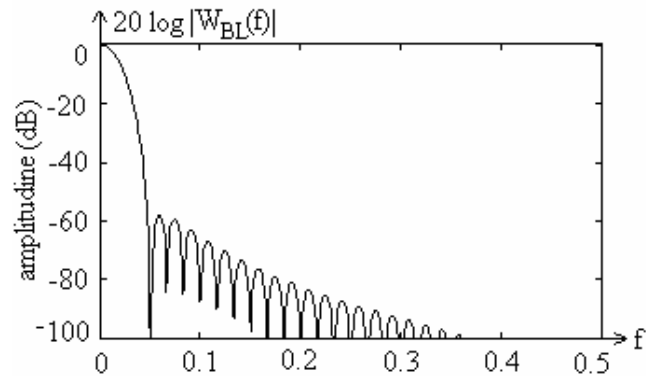


Fig. 5.3. Spectrul ferestrei Blackman de lungime $M=61$

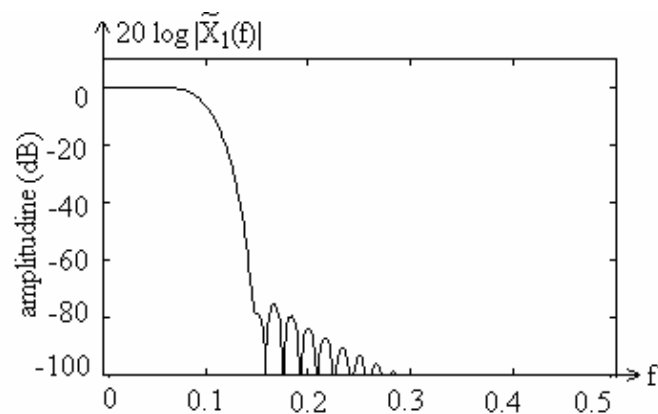


Fig.5.4. Spectrul obținut din convoluția ferestrei Blackman de lungime $M=61$ cu spectrul filtrului ideal din exemplul 5.1.

De exemplu, folosirea unei ferestre Blackman de aceeași lungime $N=61$, al cărui spectru este reprezentat în figura 5.3, pentru același semnal din exemplul 5.1, are ca rezultat caracteristica spectrală $\tilde{X}_1(f)$ din figura 5.4. Se observă că scurgerea spectrală s-a redus, dar lățimea lobului principal a crescut cu aproximativ 50%.

Lățirea spectrului ce urmează a fi estimat, ca urmare a trunchierii, reprezintă o problemă în cazul în care separația de frecvență între componentele unui semnal este mică, cum este cazul semnalului $X(f) = X_1(f) + X_2(f)$ reprezentat în figura 5.5.

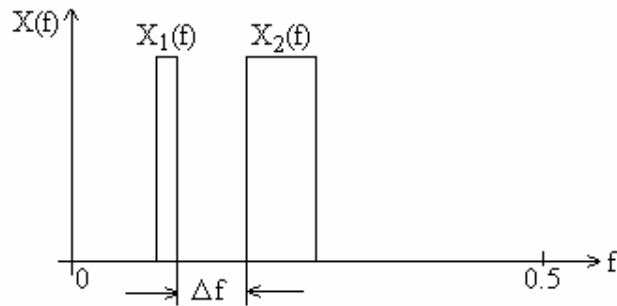


Fig. 5.5. Spectrul unui semnal cu două componente de bandă îngustă, apropiate

În cazul acestui semnal, pot apărea două probleme:

1- dacă lungimea datelor și, implicit, a ferestrei, scade, cei doi lobi spectrali principali rezultați în urma convoluției spectrului ferestrei cu $X(f)$ cresc în lățime,

2- dacă separația de frecvență Δf devine foarte mică, este posibil ca cei doi lobi principali ai spectrului să se unească.

În aceste cazuri există o limită la care cei doi lobi sunt încă distincți. Această limită se numește *rezoluție*. De obicei, rezoluția se definește ca fiind lățimea de bandă a lobului principal măsurată la jumătate din nivelul puterii maxime, adică banda corespunzătoare la -6dB a spectrului de putere sau, echivalent, lățimea lobului principal al spectrului de amplitudine la -3dB. În concluzie, componentele semnalului $X(f)$ nu pot fi identificate din semnalul $\tilde{X}(f) = X(f) * W(f)$, dacă lățimea lobului principal al ferestrei nu este semnificativ mai mică decât separația de frecvență Δf dintre $X_1(f)$ și $X_2(f)$.

Din cele prezentate anterior se observă ca densitatea spectrală de energie a secvenței multiplicată cu o fereastră este o aproximare a spectrului real al secvenței, adică

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = |\tilde{X}(f)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.16)$$

Spectrul $S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f)$ poate fi calculat cu ajutorul DFT în N puncte [70]:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (5.17)$$

$$|\tilde{X}[k]|^2 = S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) \Big|_{f=k/N} = S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) \quad (5.18)$$

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j2\pi nk/N} \right|^2 \quad (5.19)$$

care este o versiune distorsionată a spectrului real $S_{xx}(k/N)$.

5.1.2. Estimarea funcției de autocorelație și a densității spectrale de putere a semnalelor aleatoare. Periodograma

Semnalelor de energie finită considerate în paragraful precedent, li se poate aplica transformata Fourier, fiind caracterizate în domeniul frecvență de densitate spectrală de energie. Spre deosebire de acestea, semnalele caracterizate de procese aleatoare staționare nu au energie finită și, deci, nu li se poate aplica transformata Fourier. Astfel de semnale au, în general, putere medie finită, motiv pentru care acestea vor fi caracterizate de *densitatea spectrală de putere*.

Dacă $x(t)$ este un proces aleator, staționar în sens larg, funcția sa de autocorelație este

$$B_{xx}(\tau) = E[x(t_i)x(t_i + \tau)] \quad (5.20)$$

unde $E[\bullet]$ reprezintă media statistică.

Pentru simplificarea scrierii, uneori se renunță la indicele i , adică se va scrie $E\{x(t_i)\} = E\{x(t)\}$. Din acest motiv, prin abuz de limbaj, se spune valoarea medie statistică a procesului aleator $x(t)$ și nu valoarea medie statistică a variabilei aleatoare $x(t_i)$ obținută din procesul aleator $x(t)$.

Conform teoremei Wiener-Khintchine, densitatea spectrală de putere a unui proces aleator staționar este transformata Fourier a funcției de autocorelație, adică [48]:

$$S_{xx}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \quad (5.21)$$

În practică nu se dispune de toate realizările particulare ale procesului aleator din care să poate fi determinată funcția de autocorelație $B_{xx}(\tau)$, motiv pentru care se urmărește estimarea funcției de autocorelație a procesului pe baza unei singure realizări a acestuia. Pentru ca acest lucru să fie posibil, este necesar ca procesul aleator să fie ergodic. Pe baza unei singure realizări particulare se poate calcula funcția de autocorelație temporală

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t+\tau)dt, \quad (5.22)$$

unde $2T_0$ este intervalul de observare a realizării particulare a procesului aleator. Dacă procesul staționar este ergodic în medie și corelație, atunci

$$B_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.23)$$

Această relație justifică folosirea funcției de autocorelație temporale $R_{xx}(\tau)$ ca un estimat al funcției de autocorelație statistice $B_{xx}(\tau)$.

Mai mult, transformata Fourier a lui $R_{xx}(\tau)$ furnizează un estimat $P_{xx}(F)$ al spectrului densității de putere, adică

$$\begin{aligned}
P_{xx}(F) &= \int_{-T_0}^{T_0} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau = \\
&= \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \left[\int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t+\tau) dt \right] e^{-j2\pi F\tau} d\tau
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Dacă se consideră toate realizările particulare ale procesului, densitatea spectrală de putere se poate determina cu relația

$$S_{xx}(F) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} E[P_{xx}(F)] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T_0} \left| \int_{-T_0}^{T_0} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right|^2 \right\} \tag{5.25}$$

$P_{xx}(F)$ se poate calcula în două moduri: prin metoda directă, ca în relația (5.25) și prin metoda indirectă, în care se calculează întâi $R_{xx}(\tau)$ și apoi transformata sa Fourier.

Se va analiza în continuare estimarea densității spectrale de putere din eșantioanele unei singure realizări a procesului aleator. Se presupune că realizarea particulară $x_a(t)$ este eșantionată cu o frecvență $F_s > 2B$, unde B este cea mai mare frecvență din spectrul densității de putere, rezultând o secvență de durată finită $x[n]$; $0 \leq n \leq N-1$.

Din aceste eșantioane se poate calcula estimatul funcției de autocorelație, $r'_{xx}[m]$, cu relația

$$\begin{cases} r'_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m], m = 0, 1, \dots, N-1 \\ r'_{xx}[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=|m|}^{N-1} x[n]x[n+m], m = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \tag{5.26}$$

și apoi transformata sa Fourier

$$P'_{xx}(f) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} r'_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \tag{5.27}$$

Factorul de normalizare $N-|m|$ din (5.26) se impune pentru ca valoarea medie statistică a estimatului să fie egală cu funcția de

autocorelație statistică. Într-adevăr, considerând mulțimea realizărilor particulare trunchiate ale procesului, se poate scrie

$$E[r'_{xx}[m]] = \begin{cases} \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x[n]x[n+m]] = \gamma_{xx}[m], & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=|m|}^{N-1} E[x[n]x[n+m]] = \gamma_{xx}[m], & m = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \quad (5.28)$$

unde $\gamma_{xx}[m]$ este funcția de autocorelație statistică a lui $x[n]$.

Deoarece valoarea medie a estimatului funcției de autocorelație este egală cu funcția de autocorelație statistică, estimatul $r'_{xx}[m]$ se spune că este *nedeplasat*.

Dispersia acestuia se calculează după cum urmează:

$$\text{var}[r'_{xx}[m]] = E[r'^2_{xx}[m]] - (E[r'_{xx}[m]])^2 \quad (5.29)$$

Pentru calculul acestei mărimi se folosește relația [61]

$$E(x_1 x_2 x_3 x_4) = E(x_1 x_2)E(x_3 x_4) + E(x_1 x_3)E(x_2 x_4) + E(x_1 x_4)E(x_2 x_3) \quad (5.30)$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4 , sunt variabile aleatoare gaussiene, de medie zero, dependente.

Cu (5.30) și (5.26), relația (5.29) devine pentru $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{var}(r'_{xx}[m]) &= \frac{1}{(N-m)^2} E \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m]x[k]x[k+m] \right) - \\ &- \gamma_{xx}^2[m] = \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} E(x[n]x[n+m])E(x[k]x[k+m]) + \right. \\ &E(x[n]x[k])E(x[n+m]x[k+m]) + E(x[n]x[k+m])E(x[n+m]x[k]) \left. \right) - \\ &- \gamma_{xx}^2[m] = \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} \gamma_{xx}^2[m] + \gamma_{xx}^2[n-k] + \right. \\ &\left. \gamma_{xx}[n-k-m]\gamma_{xx}[n-k+m] \right) - \gamma_{xx}^2[m] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} \gamma_{xx}^2[n-k] + \gamma_{xx}[n-k-m] \gamma_{xx}[n-k+m] \right)$$

Cu schimbarea de variabilă $n-k=p$, relația devine

$$\begin{aligned} \text{var}(r'_{xx}[m]) &= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{k=0}^{N-m-1} \sum_{p=-k}^{N-m-1-k} \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m] \gamma_{xx}[p+m] \right) = \\ & \sum_{p=0}^{N-m-1} \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m] \gamma_{xx}[p+m] + \sum_{p=-1}^{N-m-2} \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m] \gamma_{xx}[p+m] \\ & + \dots + \sum_{p=-N+m+1}^0 \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m] \gamma_{xx}[p+m] = \\ & = \frac{1}{(N-m)^2} \left(\gamma_{xx}^2[0] + \gamma_{xx}^2[1] + \dots + \gamma_{xx}^2[N-m-1] + \gamma_{xx}[-m] \gamma_{xx}[m] + \right. \\ & + \gamma_{xx}[1-m] \gamma_{xx}[1+m] + \dots + \gamma_{xx}[N-m-1-m] \gamma_{xx}[N-m-1+m] + \\ & \vdots \\ & + \left. \left(\gamma_{xx}^2[-N+m+1] + \gamma_{xx}^2[-N+m] + \dots + \gamma_{xx}^2[-1] + \gamma_{xx}^2[0] + \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_{xx}[-N+m+1-m] \gamma_{xx}[-N+m+1+m] + \dots + \gamma_{xx}[-m] \gamma_{xx}[m] \right) \right) = \\ & = \frac{1}{(N-m)^2} \left((N-m)(\gamma_{xx}^2[0] + \gamma_{xx}[-m] \gamma_{xx}[m]) + (N-m-1) \cdot \right. \\ & \left. (\gamma_{xx}^2[1] + \gamma_{xx}[1-m] \gamma_{xx}[1+m]) + (N-m-2)(\gamma_{xx}^2[2] + \gamma_{xx}[2-m] \gamma_{xx}[2+m]) \right. \\ & \left. + \dots + (N-m-(N-m-1))(\gamma_{xx}^2[N-m-1] + \gamma_{xx}[N-m-1-m] \cdot \right. \\ & \left. \gamma_{xx}[N-m-1+m]) + \dots + (N-m-1)(\gamma_{xx}^2[-1] + \gamma_{xx}[-1-m] \gamma_{xx}[-1+m]) + \right. \\ & \left. + \dots + (N-m-(N-m-1))(\gamma_{xx}^2[-N+m+1] + \gamma_{xx}[-N+m+1-m] \cdot \right. \\ & \left. \gamma_{xx}[-N+m+1+m]) \right) = \\ & \frac{1}{(N-m)^2} \sum_{n=-N+m+1}^{N-m-1} (N-m-n) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m] \gamma_{xx}[n+m]) = \\ & \frac{N}{(N-m)^2} \sum_{n=-N+m+1}^{N-m-1} \left(1 - \frac{m+n}{N} \right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m] \gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \tag{5.31}$$

Efectuând un calcul similar, pentru $m < 0$, se obține:

$$\begin{aligned} \text{var}(r'_{xx}[m]) &= \\ &= \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-N-m+1}^{N+m-1} \left(1 - \frac{-m+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \quad (5.31')$$

Relațiile (5.31) și (5.31') pot fi combinate în una singură, și anume

$$\begin{aligned} \text{var}(r'_{xx}[m]) &= \\ &= \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-N+|m|+1}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \quad (5.31'')$$

Deoarece $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) = 1$ și dacă $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^2[n] < \infty$, atunci

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{r'_{xx}[m]\} &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-N+|m|+1}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Deoarece $E[r'_{xx}[m]] = \gamma_{xx}[m]$ și dispersia estimatului converge la 0 pentru $N \rightarrow \infty$, estimatul $r'_{xx}[m]$ se numește *consistent*.

În general, dacă N este finit, pentru valori mari ale parametrului m , estimatul $r'_{xx}[m]$ dat de (5.26) are o dispersie mare.

Dacă estimatul se calculează cu relația

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m], & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=|m|}^{N-1} x[n]x[n+m], & -N+1 \leq m < 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

atunci, valoarea medie statistică a acestuia calculată pe mulțimea realizărilor particulare rezultă

$$E[r_{xx}[m]] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x[n]x[n+m]] = \frac{N-m}{N} \gamma_{xx}[m], & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=|m|}^{N-1} E[x[n]x[n+m]] = \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}[m], & -N+1 \leq m < 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

sau, într-o singură relație

$$E[r_{xx}[m]] = \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}[m] \quad (5.34')$$

Valoarea medie statistică a estimatului prezintă o deplasare de $\frac{|m|}{N} \gamma_{xx}[m]$.

Estimatul $r_{xx}[m]$ se spune că este *asimptotic nedeplasat*, deoarece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[r_{xx}[m]] = \gamma_{xx}[m] \quad (5.35)$$

Dispersia acestui estimat este dată de relația

$$\begin{aligned} \text{var}(r_{xx}[m]) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N+|m|+1}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Deoarece $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) = 1$ și dacă $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^2[n] < \infty$, atunci

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{r_{xx}[m]\} = 0.$$

Deoarece estimatul $r_{xx}[m]$ este asimptotic nedeplasat și dispersia sa converge la 0 pentru $N \rightarrow \infty$, se spune că acesta este un *estimat consistent* pentru $\gamma_{xx}[m]$.

În estimarea spectrului de putere se va folosi estimatul $r_{xx}[m]$ dat de (5.33).

Estimatul corespunzător al densității spectrale de putere este

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \quad (5.37)$$

Înlocuind (5.33) în (5.37), se obține

$$\begin{aligned}
P_{xx}(f) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \sum_{m=-(N-1)}^{-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} + \sum_{m=0}^{N-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \\
&\sum_{m=1}^{N-1} r_{xx}[m]e^{j2\pi fm} + \sum_{m=0}^{N-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m]e^{j2\pi fm} + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m]e^{-j2\pi fm} \right] = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m-1} (x[n]x[n+m]e^{j2\pi fm} + x[n]x[n+m]e^{-j2\pi fm}) - \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n] \right] = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (x[n]x[n] + x[n]x[n]) + \sum_{n=0}^{N-2} (x[n]x[n+1]e^{j2\pi f1} + x[n]x[n+1]e^{-j2\pi f1}) + \right. \\
&+ \dots + \sum_{n=0}^0 (x[n]x[n+N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + x[n]x[n+N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}) - \\
&\left. - \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n] \right] = \frac{1}{N} [x[0]x[0] + x[1]x[1] + \dots + x[N-1]x[N-1] + x[0]x[1]e^{j2\pi f1} \\
&+ x[1]e^{-j2\pi f1}x[2]e^{j2\pi f2} + \dots + x[N-2]e^{-j2\pi f(N-2)}x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + \\
&x[1]e^{-j2\pi f1}x[0] + x[2]e^{-j2\pi f2}x[1]e^{j2\pi f1} \dots + x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}x[N-2]e^{j2\pi f(N-2)} \\
&+ \dots + x[0]x[2]e^{j2\pi f2} + \dots + x[N-3]e^{-j2\pi f(N-3)}x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + \\
&x[2]e^{-j2\pi f2}x[0] + \dots + x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}x[N-3]e^{j2\pi f(N-3)} + \dots \\
&x[0]x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}x[0]] = \\
&\frac{1}{N} [x[0](x[0] + x[1]e^{j2\pi f1} + \dots + x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)}) + \\
&+ x[1]e^{-j2\pi f1}(x[0] + x[1]e^{j2\pi f1} + \dots + x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)}) + \dots + \\
&x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}(x[0] + x[1]e^{j2\pi f1} + \dots + x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)})] = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi fn} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{j2\pi fk} \right] = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2
\end{aligned}$$

adică

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2, \quad (5.38)$$

Această formă a estimatului se numește *periodogramă*.

Din (5.37) se calculează valoarea medie a estimatului $P_{xx}(f)$

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f)] &= E \left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \right] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[r_{xx}[m]] e^{-j2\pi fm} = \\ &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N} \right) \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Interpretarea acestei relații este că media spectrului estimat este transformata Fourier a funcției de autocorelație înmulțită cu o fereastră, adică

$$\tilde{\gamma}_{xx}[m] = \left(1 - \frac{|m|}{N} \right) \gamma_{xx}[m] \quad (5.40)$$

unde funcția fereastră este fereastra triunghiulară Bartlett [71].

Media spectrului estimat este

$$E[P_{xx}(f)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}[m] e^{-j2\pi fm} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f - \alpha) d\alpha \quad (5.41)$$

unde $W_B(f)$ este transformata Fourier a ferestrei Bartlett, iar $\Gamma_{xx}(f)$ este densitatea spectrală de putere ce se dorește a fi estimată.

Relația (5.41) arată că media spectrului estimat este convoluția dintre densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(f)$ și transformata Fourier a ferestrei Bartlett. Această medie este o versiune netezită a spectrului real și suferă de aceleași inconveniente de scurgere spectrală, cauzate de lungimea finită a secvenței de date.

Spectrul estimat este asimptotic nedeplasat, deoarece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[P_{xx}(f)] = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \right] = \quad (5.42)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \Gamma_{xx}(f)$$

Calculul dispersiei periodogramei este, în general, relativ complicat și, tot în general, aceasta nu tinde la zero pentru $N \rightarrow \infty$. Când datele reprezintă un proces aleator gaussian, dispersia se calculează după cum urmează:

Fie $x[n]$ zgomot alb, gaussian, cu media nulă și dispersia σ_x^2 .

Folosind expresia momentului reunit de ordinul patru pentru variabile aleatoare gaussiene dată de relația (5.30), se poate scrie

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] &= \frac{1}{N^2} E[X(f_1)X(-f_1)X(f_2)X(-f_2)] = \\ &= \frac{1}{N^2} \{ E[X(f_1)X(-f_1)]E[X(f_2)X(-f_2)] + \\ &E[X(f_1)X(f_2)]E[X(-f_1)X(-f_2)] + \\ &E[X(f_1)X(-f_2)]E[X(-f_1)X(f_2)] \} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} E[X(f_1)X(f_2)] &= E\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi f_1 n} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j2\pi f_2 k} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x[n]x[k]e^{-j2\pi f_1 n} e^{-j2\pi f_2 k} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=n}^{N-1-N+1} \gamma_{xx}[v]e^{-j2\pi f_1 n} e^{-j2\pi f_2 (n-v)} = \\ &= \sum_{v=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}[v]e^{j2\pi f_2 v} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi (f_1+f_2)n} = \Gamma_{xx}(f_2) \frac{1 - e^{-j2\pi (f_1+f_2)N}}{1 - e^{-j2\pi (f_1+f_2)}} = \\ &= \Gamma_{xx}(f_2) e^{-j\pi (f_1+f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi (f_1+f_2)N}{\sin \pi (f_1+f_2)} = \\ &= \sigma_x^2 e^{-j\pi (f_1+f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi (f_1+f_2)N}{\sin \pi (f_1+f_2)} \end{aligned} \quad (5.44a)$$

Similar, se calculează expresiile

$$E[X(f_1)X(-f_1)] = \sigma_x^2 N \quad (5.44b)$$

$$E[X(f_2)X(-f_2)] = \sigma_x^2 N \quad (5.44c)$$

$$E[X(-f_1)X(-f_2)] = \sigma_x^2 e^{j\pi(f_1+f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1+f_2)N}{\sin \pi(f_1+f_2)} \quad (5.44d)$$

$$E[X(f_1)X(-f_2)] = \sigma_x^2 e^{-j\pi(f_1-f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1-f_2)N}{\sin \pi(f_1-f_2)} \quad (5.44e)$$

$$E[X(-f_1)X(f_2)] = \sigma_x^2 e^{j\pi(f_1-f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1-f_2)N}{\sin \pi(f_1-f_2)} \quad (5.44f)$$

Înlocuind relațiile (5.44a,b,c,d,e,f) în (5.43), se obține relația

$$E[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] = \sigma_x^4 \left\{ 1 + \left[\frac{\sin \pi(f_1+f_2)N}{N \sin \pi(f_1+f_2)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(f_1-f_2)N}{N \sin \pi(f_1-f_2)} \right]^2 \right\} \quad (5.45)$$

Particularizând (5.45) pentru $f_1 = f_2 = f$, în cazul unui proces alb, gaussian, de medie nulă, rezultă

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}(f)] &= E(P_{xx}^2(f)) - (E(P_{xx}(f)))^2 = \\ &= \Gamma_{xx}^2(f) \left\{ 1 + \left[\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

care, pentru $N \rightarrow \infty$ devine

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.47)$$

În concluzie, spre deosebire de funcția de autocorelație estimată, periodograma nu este un estimat consistent al densității spectrale de putere. $P_{xx}(f)$ este un estimat asimptotic nedeplasat pentru $\Gamma_{xx}(f)$, dar, pentru o secvență de durată finită, valoarea sa medie este deplasată. Spectrul estimat suferă de efecte de netezire și scurgere spectrală, cauzate de înmulțirea cu fereastra Bartlett.

5.1.2.1. Periodograma modificată

În cazul periodogramei, un proces aleator $x[n]$ de lungime finită este echivalent cu porțiunea din proces căreia i s-a aplicat

fereastra rectangulară. Pe lângă fereastra rectangulară, se pot folosi și alte ferestre, ca Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman, Kaiser.

Periodograma modificată este periodograma aplicată procesului aleator trunchiat cu o fereastră oarecare $w[n]$ și este dată de

$$P_{xx}^{\text{mod}}(f) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.48)$$

unde N este lungimea ferestrei și

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2 \quad (5.49)$$

este o constantă aleasă astfel încât $P_{xx}^{\text{mod}}(f)$ să fie asimptotic nedeplasată. Cele mai folosite ferestre și caracterizările lor sunt prezentate în Tabelul 5.1.

Acest tabel arată performanțele ferestrelor uzuale, cum ar fi nivelul lobilor secundari și rezoluția. Se observă că fereastra rectangulară are cea mai bună rezoluție (cel mai îngust lob principal), astfel încât creează cea mai redusă netezire spectrală, dar prezintă cei mai mari lobi secundari, care pot masca spectre ale semnalelor mai slabe. Fereastra Hamming are cel mai întins lob principal, dar lobul lateral este mai redus.

Tabelul 5.1

Tipul ferestrei	Definiția ferestrei cauzale $w[n]$ $0 \leq n \leq N-1$;	Lățimea lobului principal	Atenuarea primului lob secundar [dB]	Rezoluția $(\Delta f)_{3dB}$
Rectangulară	1	$\frac{4\pi}{N}$	-13	$\frac{0,89}{N}$
Triunghiulară	$1 - \frac{2}{N-1} \left n - \frac{N-1}{2} \right $	$\frac{8\pi}{N-1}$	-25	$\frac{1,28}{N}$

Hanning	$0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$\frac{8\pi}{N-1}$	-31	$\frac{1,44}{N}$
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$\frac{8\pi}{N-1}$	-41	$\frac{1,30}{N}$
Blackman	$0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} +$ $+0,08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$	$\frac{12\pi}{N-1}$	-58	$\frac{1,68}{N}$

Caracterizarea estimatului

Urmând o procedură similară celei folosite la analiza performanțelor periodogramei, se pot obține performanțele periodogramei modificate, adică valoarea medie, dispersia și rezoluția.

Valoarea medie este dată de relația

$$E\{P_{xx}^{\text{mod}}(f)\} = \frac{1}{N} \Gamma_{xx}(f) * |W(f)|^2 \quad (5.50)$$

Unde $W(f)$ este transformata Fourier a ferestrei folosite.

Urmând un mers de calcul similar celui folosit la periodograma simplă, în cazul variabilei aleatoare gaussiene, varianța estimatului este [62]

$$\text{var}[P_{xx}^{\text{mod}}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.51)$$

Rezoluția periodogramei modificate este egală cu lățimea de bandă la -3dB a lobului principal al ferestrei. Se observă că periodograma modificată este un estimat asimptotic nedeplasat, dar neconsistent al spectrului de putere $\Gamma_{xx}(f)$.

Problemele care apar din cauza scurgerii spectrale și a rezoluției de frecvență, ca și faptul că periodograma nu este un estimat consistent, au reprezentat un motiv pentru dezvoltarea altor metode de estimare a densității spectrale de putere, ce vor fi prezentate în paragraful 5.3.

5.1.3. Folosirea Transformatei Fourier Discrete în estimarea spectrului de putere

După cum se observă din (5.16) și (5.38), densitatea spectrală de energie estimată, $S_{xx}(f)$, și periodograma $P_{xx}(f)$ pot fi calculate cu ajutorul Transformatei Fourier Discrete (DFT) care, la rândul său, se poate calcula cu algoritmi FFT [53]. Dacă lungimea datelor este N , DFT se poate calcula în cel puțin N puncte. În acest caz, rezultă următoarele eșantioanele ale periodogramei

$$P_{xx}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n k / N} \right|^2 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.53)$$

la frecvențele $f_k = k/N$.

În practică, este posibil ca o astfel de eșantionare a spectrului să fie “rară” și să nu ofere o bună reprezentare grafică a estimatului spectrului continuu, lucru ce poate fi remediat prin evaluarea lui $P_{xx}(f)$ la unele frecvențe adiționale, prin creșterea lungimii secvenței prin adăugarea de zerouri până la o lungime a secvenței de $L > N$ puncte.

$$P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n k / L} \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.54)$$

Adăugarea de zerouri și evaluarea DFT în $L > N$ puncte nu îmbunătățește rezoluția de frecvență a estimatului, ci oferă numai o metodă de interpolare a valorilor spectrului calculat la mai multe frecvențe. Rezoluția de frecvență este determinată de lungimea N a datelor înregistrate.

Exemplul 5.2.

Secvența discretă de lungime $N=16$ eșantioane

$$x[n] = \sin 2\pi(0,135)n + \cos 2\pi(0,135 + \Delta f)n, \quad n = 0, 1, \dots, 15$$

se obține prin eșantionarea unui semnal analogic compus din două componente. Δf reprezintă separația de frecvență între aceste componente. Să se evalueze spectrul de putere $P(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2$, la frecvențele $f_k = \frac{k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, L-1$, pentru $L = 8, 16, 32$ și 128 , pentru valorile $\Delta f = 0,06$ și $\Delta f = 0,01$.

Soluție

Prin completarea cu zerouri s-a mărit lungimea datelor pentru care se calculează spectrul de putere $P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right)$.

Rezultatele pentru $\Delta f = 0,06$ sunt prezentate în figurile 5.6a, b, c, d pentru $L=8, 16, 32$ și, respectiv, 128 de puncte.

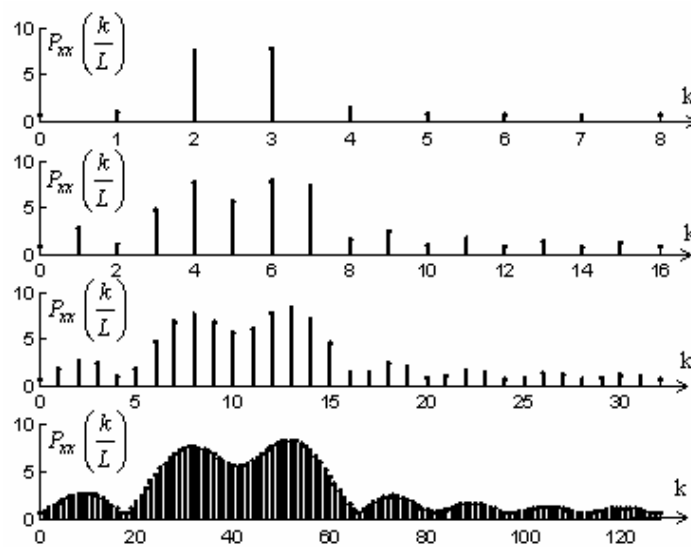


Fig. 5.6. Spectrul unui semnal cu două componente sinusoidale cu separația de frecvență $\Delta f = 0,06$

Se observă că adăugarea de zerouri nu a modificat rezoluția, dar are efect de interpolare a spectrului $P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right)$. În acest caz, separația de frecvență este suficient de mare, încât cele două componente spectrale pot fi identificate în semnal.

Estimații spectrale pentru $\Delta f = 0,01$ sunt prezentați în figura 5.7a, b, c, d pentru $L=8, 16, 32$ și, respectiv, 128 de puncte.

În acest caz cele două componente spectrale nu mai pot fi identificate. Efectul adăugării de zerouri constă în interpolarea valorilor spectrului, astfel încât se obține o imagine grafică mai bună a estimatului spectrului, fără, însă, a se îmbunătăți rezoluția de frecvență.

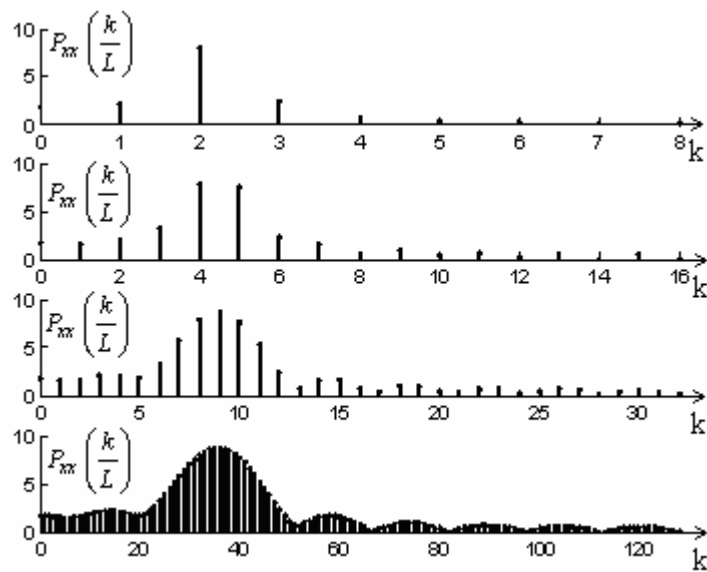


Fig. 5.7. Spectrul unui semnal cu două componente sinusoidale cu separația de frecvență $\Delta f = 0,01$

5.2. Metode neparametrice pentru estimarea densității spectrale de putere

Metodele neparametrice de estimare a spectrului sunt relativ simple și ușor de implementat cu ajutorul algoritmilor FFT. Ele necesită secvențe lungi de date pentru a produce rezoluția de frecvență necesară în unele aplicații. Aceste metode suferă de “scurgere spectrală” datorită folosirii ferestrelor și, implicit, a datelor de lungime finită, N . De multe ori scurgerea spectrală maschează semnalele slabe prezente în date.

Limitarea principală a metodelor neparametrice este presupunerea că estimatul funcției de autocorelație $r_{xx}[m]$ este zero pentru $m \geq N$, ceea ce limitează rezoluția în frecvență și calitatea estimatului spectrului de putere.

Metodele neparametrice descrise în acest paragraf nu țin seama de modul în care au fost generate datele. Deoarece obținerea estimațiilor se bazează complet pe date de lungime finită, rezoluția de frecvență obținută prin aceste metode este, în cel mai bun caz, egală cu lățimea spectrală a ferestrei rectangulare de lungime N , care este de aproximativ $1/N$ la -3dB [33]. Metodele neparametrice urmăresc obținerea unui estimat consistent al densității spectrale de putere prin operații de mediere și netezire efectuate direct asupra periodogramei și a funcției de autocorelație. După cum se va vedea, efectul acestora este de reducere a rezoluției de frecvență, odată cu scăderea dispersiei estimatului.

5.2.1. Metoda Bartlett. Periodograma mediată

Metoda Bartlett de reducere a dispersiei periodogramei, implică trei pași:

1. Secvența de date de lungime N se împarte în K segmente care nu se suprapun, fiecare de lungime M

$$x_i[n] = x[n + iM], \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \\ n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.55)$$

2. Pentru fiecare segment se calculează periodograma

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \quad (5.56)$$

3. Pentru a se obține estimatul Bartlett al densității spectrale de putere, se consideră media aritmetică a celor K periodograme, adică

$$P_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f) \quad (5.57)$$

Caracterizarea estimatului

Presupunând datele staționare și M suficient de mare,

$$E[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} E[P_{xx}^{(i)}(f)] = E[P_{xx}^{(i)}(f)] \quad (5.58)$$

Din (5.39) și (5.41) rezultă valoarea medie a fiecărei periodograme ca fiind

$$E[P_{xx}^{(i)}(f)] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) \gamma_{xx}[m] e^{-2j\pi fm} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f - \alpha) d\alpha \\ = \frac{1}{M} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \left(\frac{\sin \pi(f - \alpha)M}{\sin \pi(f - \alpha)} \right)^2 d\alpha \quad (5.59)$$

unde

$$W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi fM}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (5.60)$$

este transformata Fourier a ferestrei Bartlett, definită de relația

$$w_B[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{M}, & |m| \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (5.61)$$

Reducerea lungimii datelor de la N la $M=N/K$ are ca rezultat o fereastră care are o caracteristică de frecvență cu lățimea lobului principal crescută de K ori, așa încât rezoluția de frecvență s-a redus de K ori, $(\Delta f)_{3dB} = 0,89 \frac{K}{N}$. Admițând ipoteza anterioară asupra datelor și faptul că seturile de date sunt independente, dispersia estimatului Bartlett este

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] \quad (5.62)$$

Înlocuind (5.51) în (5.62), pentru un proces aleator gaussian, se obține

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.63)$$

adică dispersia s-a redus de K ori.

În realitate seturile de date nu sunt independente decât în unele cazuri particulare, cum este cel al zgomotului alb și, în consecință, reducerea dispersiei este mai mică decât K ori.

5.2.2. Metoda Welch. Periodograma mediată modificată

Welch a operat două modificări esențiale asupra metodei Bartlett:

1. Segmentele de date se pot suprapune

$$\begin{aligned} x_i[n] = x[n + iD] & \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \\ & \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (5.64)$$

unde iD este punctul de începere pentru secvența i . Dacă $D = M$, segmentele nu se suprapun și numărul L de segmente este egal cu K din metoda Bartlett. Dacă $D = M/2$, există 50% suprapunere peste segmente succesive și $L = 2K$ segmente. Se pot obține K segmente de lungime $2M$ fiecare. Ca urmare a suprapunerii blocurilor, se obține, așa cum se va vedea, o anumită reducere a dispersiei.

2. Înainte de a calcula periodograma, segmentele de date sunt ponderate cu o fereastră, ceea ce conduce la o periodogramă modificată

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.65)$$

unde U este un factor de normalizare a puterii funcției fereastră și este ales ca

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2[n] \quad (5.66)$$

Utilizarea funcției fereastră are drept efect reducerea lobilor laterali și, deci, a fenomenului de scurgere spectrală.

Estimatul Welch al densității spectrale de putere este media aritmetică a acestor periodograme modificate, adică

$$P_{xx}^w(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \quad (5.67)$$

Caracterizarea estimatului

Valoarea medie a estimatului Welch este

$$E[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \quad (5.68)$$

Valoarea medie a periodogramei modificate se determină astfel:

$$E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{MU} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w[n]w[m]E[x_i[n]x_i[m]]e^{-2j\pi f(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{MU} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w[n]w[m]\gamma_{xx}(n-m)e^{-2j\pi f(n-m)} \quad (5.69)$$

Dar

$$\gamma_{xx}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) e^{j2\pi\alpha n} d\alpha \quad (5.70)$$

Înlocuind relația (5.70) în (5.69), se obține

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MU} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w[n]w[m] e^{-j2\pi(n-m)(f-\alpha)} \right] d\alpha = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W(f-\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (5.71)$$

unde, prin definiție

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.72)$$

Factorul de normalizare asigură că

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(f) df = 1 \quad (5.73)$$

Dispersia estimatului Welch este

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)\tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{E[P_{xx}^w(f)]\}^2 \quad (5.74)$$

Estimatul acesta este, evident, echivalent cu periodograma, în cazul când $w[m]$ este o fereastră dreptunghiulară și $M=N-1$.

În cazul nesuprapunerii segmentelor succesive ($L=K$) și a folosirii ferestre triunghiulare, s-a arătat [62] că

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L} \text{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \approx \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.75)$$

În cazul suprapunerii cu 50% a segmentelor succesive și folosind fereastră triunghiulară, dispersia estimatului Welch a densității spectrale de putere, este [62]

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] \approx \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.76)$$

Estimatul Welch este asimptotic nedeplasat și consistent. Rezoluția acestuia depinde de fereastra folosită.

Deși s-a considerat numai fereastra triunghilară, în calculul dispersiei pot fi folosite și alte ferestre. În general, acestea vor determina dispersii diferite pentru estimați. În plus, segmentele de date pot fi suprapuse cu mai mult sau mai puțin de 50%, cât s-a considerat în acest paragraf, în scopul îmbunătățirii caracteristicilor relevante ale estimatului.

5.5.3. Metoda Blackman Tukey. Netezirea periodogramei

Autorii metodei au propus și analizat metoda în care secvența de autocorelație este întâi multiplicată cu o fereastră și apoi se calculează transformata Fourier pentru a estima densitatea spectrală de putere. Motivul pentru care funcția de autocorelație estimată se înmulțește cu o fereastră este că, pentru deplasări mari, estimații sunt de încredere mai mică deoarece sunt calculați dintr-un număr mai mic, $(N-m)$, de date. Pentru m apropiat de N , dispersia acestor estimați este foarte mare și, deci, aceștia ar putea interveni cu o pondere mai mică în densitatea spectrală de putere estimată.

Estimatul Blackman-Tukey este

$$P_{xx}^{BT}(f) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{xx}[m]w[m]e^{-j2\pi fm} \quad (5.77)$$

unde $w[n]$ este o fereastră aplicată estimatorului funcției de autocorelație, cu proprietatea că are lungimea $2M-1$, $0 \leq w[m] \leq 1$, $w[0] = 1$, $w[-m] = w[m]$ și este zero pentru $|m| \geq M$.

Cu această definiție pentru $w[n]$, limitele sumei din (5.77) pot fi extinse la $(-\infty, \infty)$. Expresia echivalentă în domeniul frecvență a relației (5.77) este

$$P_{xx}^{BT}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} P_{xx}(\alpha)W(f - \alpha)d\alpha \quad (5.78)$$

unde $P_{xx}(\alpha)$ este periodograma. Efectul înmulțirii cu o fereastră a secvenței de autocorelație este de netezire a estimatului periodogramei, deci descreșterea dispersiei estimatului se face cu prețul reducerii rezoluției. Ca urmare, rezoluția sau capacitatea de a identifica două componente spectrale apropiate este dependentă de lățimea lobului principal al caracteristicii de frecvență a ferestrei. În principiu, ar putea fi folosite toate ferestrele utilizate la sinteza filtrelor FIR [72]. Trebuie avut însă în vedere ca estimatul să fie real și nenegativ ($P_{xx}^{BT}(f) \geq 0, |f| \leq 1/2$), deziderate asigurate de proprietatea ca fereastra considerată să fie o funcție pară, iar spectrul său să fie nenegativ:

$$W(f) \geq 0, |f| \leq 1/2 \quad (5.79)$$

Unele ferestre nu satisfac această condiție, de exemplu, în ciuda nivelului scăzut al lobilor laterali, ferestrele Hamming și Hanning pot avea ca rezultat estimări negativi ai spectrului în unele domenii de frecvență.

Caracterizarea estimatului

Valoarea medie a estimatului densității spectrale de putere Blackman-Tukey este

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)]W(f - \alpha)d\alpha \quad (5.80)$$

unde, din (5.41), rezultă

$$E[P_{xx}(\alpha)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W_B(\alpha - \theta)d\theta \quad (5.81)$$

unde $W_B(f)$ este transformata Fourier a ferestrei Bartlett. Înlocuind (5.81) în (5.80), se obține

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha d\theta \quad (5.82)$$

Echivalent, în domeniul timp, valoarea medie a estimatului Blackman-Tukey este

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{BT}(f)] &= \sum_{m=-M+1}^{M-1} E[r_{xx}[m]] w[m] e^{-j2\pi fm} = \\ &= \sum_{m=-M+1}^{M-1} \gamma_{xx}[m] w_B[m] w[m] e^{-j2\pi fm} \end{aligned} \quad (5.83)$$

unde

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| < N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (5.84)$$

Lungimea ferestrei pentru $w[n]$ trebuie aleasă astfel încât $M \ll N$, adică fereastra $w[n]$ să fie de lungime mai mică decât fereastra $w_B[m]$ pentru a produce o netezire suplimentară a periodogramei. În aceste condiții (5.82) devine

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f - \theta) d\theta \quad (5.85)$$

deoarece

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha &= \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\alpha) W(f - \theta - \alpha) d\alpha \\ &\approx W(f - \theta) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Dispersia estimatului Blackman-Tukey al spectrului este

$$\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] = E\{[P_{xx}^{BT}(f)]^2\} - \{E[P_{xx}^{BT}(f)]\}^2 \quad (5.87)$$

unde valoarea medie poate fi aproximată de relația (5.85), iar valoarea pătratică medie este

$$\begin{aligned}
E\{[P_{xx}^{BT}(f)]^2\} &= \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)]W(f-\alpha)W(f-\theta)d\alpha d\theta \quad (5.88)
\end{aligned}$$

În ipoteza că procesul aleator este gaussian, folosind rezultatul din exemplul 5.2, se obține

$$\begin{aligned}
E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)] &= \\
&= \Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta) \left\{ 1 + \left[\frac{\sin \pi(\theta + \alpha)N}{N \sin \pi(\theta + \alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(\theta - \alpha)N}{N \sin \pi(\theta - \alpha)} \right]^2 \right\} \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Înlocuind (5.89) în (5.88), se obține

$$\begin{aligned}
E\{[P_{xx}^{BT}(f)]^2\} &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)d\theta \right]^2 + \\
&+ \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\alpha)W(f-\theta) \times \\
&\times \left\{ \left[\frac{\sin \pi(\theta + \alpha)N}{N \sin \pi(\theta + \alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(\theta - \alpha)N}{N \sin \pi(\theta - \alpha)} \right]^2 \right\} d\alpha d\theta \quad (5.90)
\end{aligned}$$

Primul termen din (5.90) este pătratul valorii medii a lui $P_{xx}^{BT}(f)$, astfel încât al doilea termen din (5.90) reprezintă dispersia.

În cazul în care $N \gg M$, funcțiile $\sin \pi(\theta + \alpha)N/N \sin \pi(\theta + \alpha)$ și $\sin \pi(\theta - \alpha)N/N \sin \pi(\theta - \alpha)$ sunt relativ “înguste” în comparație cu $W(f)$ în apropiere de $\theta = -\alpha$ și, respectiv $\theta = \alpha$. Prin urmare

$$\begin{aligned}
&\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta) \left\{ \left[\frac{\sin \pi(\theta + \alpha)N}{N \sin \pi(\theta + \alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(\theta - \alpha)N}{N \sin \pi(\theta - \alpha)} \right]^2 \right\} d\theta \approx \\
&\approx \frac{\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha) + \Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)}{N} \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Cu această aproximare, dispersia lui $P_{xx}^{BT}(f)$ devine

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] &\approx \\ \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W(f-\alpha) [\Gamma_{xx}(-\alpha) W(f+\alpha) + \Gamma_{xx}(\alpha) W(f-\alpha)] d\alpha \\ &\approx \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}^2(\alpha) W^2(f-\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (5.92)$$

în care, s-a efectuat aproximarea

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \Gamma_{xx}(-\alpha) W(f-\alpha) W(f+\alpha) d\alpha \approx 0 \quad (5.93)$$

În relația (5.92) mai poate fi făcută o aproximare. Dacă $W(f)$ este “îngust”, comparativ cu spectrul real $\Gamma_{xx}(f)$, (5.92) se poate aproxima ca

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} W^2(\theta) d\theta \right] \approx \\ &\Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-M+1}^{M-1} w^2[m] \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

Și în acest caz se evidențiază cerințe contradictorii în obținerea unor estimatori de bună calitate:

- pentru o deplasare mică este necesar M mare,
- pentru o dispersie mică, M trebuie să fie cât mai mic.

De obicei se recomandă o valoare de cel mult $M=N/5$.

5.2.4. Caracteristici de performanță ai estimatorilor densității spectrale de putere neparametrici

Pentru a compara calitatea estimațiilor periodogramă, Bartlett, Welch, Blackman-Tukey, s-a introdus ca măsură a calității, raportul dintre pătratul valorii medii și dispersia estimatului, numit factor de calitate, adică

$$Q_A = \frac{\{E[P_{xx}^A(f)]\}^2}{\text{var}[P_{xx}^A(f)]} \quad (5.95)$$

unde A = P, B, W sau BT pentru cei patru estimați.

Inversul acestei mărimi se numește *variabilitate* și poate fi, de asemenea, folosit ca o măsură a performanței.

a) Periodograma

Valoarea medie a periodogramei este

$$E[P_{xx}^P(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (5.96)$$

unde

$$W_B(f) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (5.97)$$

și dispersia

$$\text{var}[P_{xx}^P(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \quad (5.98)$$

Pentru $N \rightarrow \infty$

$$E[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\theta) d\theta = w_B[0] \Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f) \quad (5.99)$$

$$\text{var}[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}^2(f)$$

adică, așa cum s-a precizat anterior, periodograma este un estimat asimptotic nedepășat al spectrului de putere, dar nu este consistent.

Asimptotic, periodograma este caracterizată de factorul de calitate

$$Q_P = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1 \quad (5.100)$$

Faptul că Q_p este fix și independent de lungimea datelor arată calitatea scăzută a acestui estimat.

b) Estimatul Bartlett

Media și dispersia estimatului Bartlett al spectrului de putere sunt

$$E[P_{xx}^B(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (5.101)$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \quad (5.102)$$

unde

$$W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi f M}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (5.103)$$

Pentru $N \rightarrow \infty$ și $M \rightarrow \infty$, astfel încât $K = \frac{N}{M}$ rămâne fix

$$E[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f) df = \Gamma_{xx}(f) w_B(0) = \Gamma_{xx}(f) \quad (5.104)$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

Se observă că estimatul Bartlett este asimptotic nedeplasat și dacă K crește odată cu N , estimatul este consistent. Asimptotic, factorul de calitate al estimatului devine

$$Q_B = K = \frac{N}{M} \quad (5.105)$$

Rezoluția în frecvență a estimatului Bartlett, măsurată prin considerarea lățimii de bandă la 3dB a lobului principal al ferestrei rectangulare, este [62]

$$\Delta f = \frac{0,9}{M} \quad (5.106)$$

Înlocuind (5.106) în (5.105) rezultă

$$Q_B = \frac{N}{0,9/\Delta f} = 1,1N\Delta f \quad (5.107)$$

c) Estimatul Welch

Media și dispersia estimatului Welch al spectrului de putere sunt

$$E[P_{xx}^W(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f - \theta) d\theta \quad (5.108)$$

unde

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad (5.109)$$

respectiv

$$\text{var}[P_{xx}^W(f)] = \begin{cases} \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) & \text{fără suprapunere} \\ \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f) & \text{pentru suprapunere 50\%} \\ & \text{și fereastră triunghiulară} \end{cases} \quad (5.110)$$

Pentru $N \rightarrow \infty$ și $M \rightarrow \infty$

$$E[P_{xx}^W(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \quad (5.111)$$

Dacă L crește odată cu N , dispersia $\rightarrow 0$, deci estimatul este consistent.

În condițiile (5.110), factorul de calitate devine

$$Q_W = \begin{cases} L = \frac{N}{M} & \text{fără suprapunere} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M} & \text{50\% suprapunere și} \\ & \text{fereastră tringhiulară} \end{cases} \quad (5.112)$$

Lățimea de bandă a ferestrei triunghiulare la 3 dB este [71]

$$\Delta f = \frac{1,28}{M} \quad (5.113)$$

În consecință, factorul de calitate, exprimat în funcție de Δf și N este

$$Q_w = \begin{cases} 0,78N\Delta f & \text{fără suprapunere} \\ 1,39N\Delta f & \text{50\% suprapunere și} \\ & \text{fereastră triunghiulară} \end{cases} \quad (5.114)$$

d) Estimatul Blackman -Tukey

Media și dispersia acestui estimat sunt date aproximativ de

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)d\theta$$

$$\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-M+1}^{M-1} w^2[m] \right] \quad (5.115)$$

unde $w[m]$ este secvența fereastră cu care se înmulțește funcția de autocorelație estimată.

Pentru ferestrele triunghiulară și rectangulară, avem

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-M+1}^{M-1} w^2[n] = \begin{cases} 2M/N & \text{fereastră dreptunghiulară} \\ 2M/3N & \text{fereastră triunghiulară} \end{cases} \quad (5.116)$$

Valoarea medie a estimatului este asimptotic nedeplasată. Factorul de calitate al estimatului, pentru fereastră triunghiulară este

$$Q_{BT} = 1,5 \frac{N}{M} \quad (5.117)$$

Deoarece lungimea ferestrei este $2M - 1$, rezoluția în frecvență măsurată la 3dB este

$$\Delta f = \frac{1,28}{2M} = \frac{0,64}{M} \quad (5.118)$$

și, deci

$$Q_{BT} = \frac{1,5}{0,64} N \Delta f = 2,34 N \Delta f \quad (5.119)$$

Din analiza factorului de calitate se observă că estimății Welch și Blackman-Tukey sunt relativ mai buni decât cel Bartlett. Oricum, însă, diferențele de performanțe între estimatori sunt mici. Factorul de calitate crește odată cu creșterea lungimii datelor, ceea ce nu se întâmplă pentru periodogramă. Mai mult, factorul de calitate depinde de produsul dintre lungimea datelor și rezoluția în frecvență. Pentru un nivel de calitate dorit, rezoluția în frecvență poate fi îmbunătățită prin creșterea lungimii datelor.

5.3. Metode parametrice pentru estimarea spectrului de putere

Metodele parametrice nu necesită presupunerile semnalate în paragraful 5.2, ele extrapolând valorile funcției de autocorelație pentru deplasări $m \geq N$. Acest lucru este posibil dacă există informații despre modul cum au fost generate datele. În acest caz se poate construi un model de generare a semnalului cu un număr de parametri ce poate fi estimat din datele observate. Drept urmare, aproximarea prin modelare elimină necesitatea funcțiilor fereastră și presupunerea că secvența de autocorelație este zero pentru $|m| \geq N$, ceea ce conduce la situația că metodele parametrice de estimare spectrală oferă rezoluție în frecvență mai bună decât cele neparametrice.

Metodele parametrice se bazează pe modelarea secvenței de date $x[n]$ ca fiind ieșirea unui sistem liniar caracterizat de o funcție de sistem rațională, de forma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (5.120)$$

căreia îi corespunde ecuația cu diferențe

$$x[n] = -\sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^q b_k w[n-k], \quad (5.121)$$

unde $w[n]$ este secvența de intrare în sistem.

În estimarea spectrului de putere, secvența de intrare nu este observabilă, dar dacă ieșirea $x[n]$ este un proces aleator staționar, atunci și secvența de intrare este, de asemenea, un proces aleator staționar.

Într-un astfel de caz, densitatea spectrală de putere a datelor (ieșirii $x[n]$) este

$$\Gamma_{xx}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{ww}(f) \quad (5.122)$$

unde $\Gamma_{ww}(f)$ este densitatea spectrală de putere a secvenței de intrare și $H(f)$ este răspunsul în frecvență al modelului.

Deoarece obiectivul este estimarea spectrului $\Gamma_{xx}(f)$, este convenabil a presupune că secvența de intrare $w[n]$ este o secvență de zgomot alb, de medie zero, cu funcția de autocorelație

$$\gamma_{ww}[m] = \sigma_w^2 \delta[m] \quad (5.123)$$

unde σ_w^2 este dispersia ($\sigma_w^2 = E[|w[n]|^2]$). Rezultă atunci

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \sigma_w^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} \quad (5.124)$$

În secțiunea 1.22 a fost descrisă reprezentarea unui proces aleator staționar în forma (5.124). În abordarea pe bază de model, estimarea spectrului se efectuează în doi pași. Dată fiind secvența finită $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, se estimează întâi funcția de autocorelație

dintr-o sumă finită, apoi, pe baza acestor estimări, se estimează parametrii $\{\hat{a}_k\}$ și $\{\hat{b}_k\}$ ai modelului. Pe baza acestora, se estimează spectrul de putere conform relației

$$P_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{|\hat{B}(f)|^2}{|\hat{A}(f)|^2} \quad (5.124')$$

Relația (5.124') reprezintă cazul general al metodelor parametrice de estimare spectrală, care arată că în acest demers trebuie determinați estimările parametrilor sistemului, $\{\hat{a}_k\}$ și $\{\hat{b}_k\}$.

Se reamintește că procesul aleator $x[n]$ generat de modelul poli-zerouri dat de (5.120) sau (5.121) se numește proces *autoregresiv cu medie alunecătoare* (ARMA) de ordin (p, q) .

Dacă $q=0$ și $b_0=1$, modelul rezultat are o funcție de sistem

$H(z) = \frac{1}{A(z)}$ și ieșirea sa, $x[n]$, se numește *proces autoregresiv de ordin p* și se notează *AR(p)*.

Al treilea model posibil se obține impunând $A(z)=1$, astfel încât $H(z)=B(z)$. Ieșirea $x[n]$ se numește proces cu *medie alunecătoare* (MA) de ordin q , notat *MA(q)*.

Dintre acestea, modelul AR este de departe cel mai folosit, din două motive:

1- este potrivit pentru reprezentarea spectrelor de bandă îngustă;

2- are ca rezultat ecuații liniare foarte simple pentru determinarea parametrilor AR.

Față de acesta, modelul MA necesită mult mai mulți coeficienți pentru reprezentarea spectrelor de bandă îngustă și este rareori folosit singur ca model pentru estimarea spectrului.

Combinând polii și zerourile, modelul ARMA produce o reprezentare mai eficientă din punct de vedere al numărului parametrilor modelului pentru reprezentarea spectrului procesului aleator, cu dezavantajul complicării calculelor pentru parametrii MA, care rezultă din rezolvarea unor ecuații neliniare.

Estimatorii parametrici au deplasări și dispersii mai mici decât cei neparametrici. Folosind metodele parametrice de estimare, se poate îmbunătăți semnificativ rezoluția în frecvență, cu condiția ca modelul să fie adecvat procesului. În caz contrar, pot rezulta estimatori neconformi cu realitatea, care conduc la decizii eronate.

5.3.1. Relații între funcția de autocorelație și parametrii modelului

În paragraful 1.24 s-au stabilit relațiile dintre funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ și parametrii $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ ai modelului ARMA adoptat pentru proces. Pentru un proces ARMA(p,q), aceste relații sunt

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.125)$$

Prin restricționarea lui $m > q$, relațiile (5.125) conduc la un sistem de ecuații liniare din care se pot determina parametrii $\{a_k\}$. Acestea sunt

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[q] & \gamma_{xx}[q-1] & \dots & \gamma_{xx}[q-p+1] \\ \gamma_{xx}[q+1] & \gamma_{xx}[q] & \dots & \gamma_{xx}[q-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[q+p-1] & \gamma_{xx}[q+p-2] & \dots & \gamma_{xx}[q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \\
& = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[q+1] \\ \gamma_{xx}[q+2] \\ \dots \\ \gamma_{xx}[q+p] \end{bmatrix} \quad (5.126)
\end{aligned}$$

În practică se cunoaște numai un interval finit dintr-o realizare particulară a procesului, din care se estimează valorile funcției de autocorelație. Folosind aceste valori estimate în loc de $\gamma_{xx}[m]$, din sistemul de ecuații (5.126) se determină parametrii \hat{a}_k .

Din relația (5.126) se observă că dacă se cunosc parametrii $\{a_k\}$ și funcția de autocorelație pentru valori ale argumentului din intervalul $0 \leq m \leq p$, atunci valoarea funcției de autocorelației se poate determina în mod unic și pentru $m > q$. În consecință, modelul sistemului linear extinde valorile funcției de autocorelație pentru $m > p$.

Parametrii $\{a_k\}$ sunt obținuți din (5.126), dar aceștia nu pot fi folosiți în determinarea facilă a parametrilor MA, deoarece în ecuația

$$\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} = \gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k], \quad 0 \leq m \leq q \quad (5.127)$$

intervine răspunsul la impuls $h[k]$ al sistemului. Acesta poate fi exprimat în funcție de parametrii $\{b_k\}$ și $\{a_k\}$ prin împărțirea lui $B(z)$ la $A(z)$, dar aceasta conduce la un set de ecuații neliniare pentru parametrii MA.

5.3.2. Estimarea spectrului de putere pe baza modelului autoregresiv (AR)

Dacă se adoptă un model $AR(p)$ pentru datele observate, relația dintre parametrii modelului și secvența de autocorelație se obține din (5.125), pentru $q=0$, adică

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.128)$$

În acest caz parametrii $\{a_k\}$ se obțin din soluția sistemului de ecuații

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \dots & \gamma_{xx}[-p+1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[2] \\ \dots \\ \gamma_{xx}[p] \end{bmatrix} \quad (5.129)$$

care reprezintă ecuațiile Yule-Walker sau normale.

Dispersia σ_w^2 poate fi obținută din ecuația

$$\sigma_w^2 = \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[-k] \quad (5.130)$$

Ecuațiile (5.129) și (5.130) sunt de obicei combinate în una singură, de forma

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \dots & \gamma_{xx}[-p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[-p+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Matricea de corelație din (5.129) sau (5.131) este Toeplitz, motiv pentru care ecuațiile Yule Walker pot fi rezolvate eficient cu algoritmul Levinson-Durbin. Toți parametrii modelului $AR(p)$ pot fi determinați din secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$, pentru $0 \leq m \leq p$. Mai mult, din (5.128), după ce s-au determinat coeficienții $\{a_k\}$, se poate calcula funcția de autocorelație pentru $m > p$. Dacă procesul aleator este cunoscut numai pentru un interval finit, $0 \leq n \leq N-1$, în determinarea parametrilor modelului vor interveni estimații ai funcției de autocorelație. Există mai multe posibilități de a estima funcția de autocorelație a procesului, lucru care conduce la diferite metode de estimare a spectrului de putere pentru semnale modelate AR.

5.3.3. Estimarea spectrului de putere a semnalelor modelate AR folosind metoda autocorelației sau Yule-Walker

În această metodă se estimează secvența de autocorelație din date și apoi estimații se folosesc în relațiile Yule-Walker (5.129) pentru a determina parametrii modelului AR.

Funcția de autocorelație se determină cu relația

$$r_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m], m \geq 0 \quad (5.132)$$

Din paragraful 3.5 se reamintește că parametrii a_k ai procesului $AR(p)$ sunt egali cu coeficienții predictorului $\{a_p[k]\}$ de ordin p și eroarea pătratică medie minimă a predictorului de ordinul p este egală cu dispersia zgomotului alb care se aplică modelului pentru a forma datele.

Datorită egalității semnalate anterior, parametrii AR se determină cu ajutorul algoritmului Levinson-Durbin în care $\gamma_{xx}[m]$ se înlocuiește cu $r_{xx}[m]$.

Estimatul corespunzător al spectrului de putere este

$$P_{xx}^{YW}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{wp}^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k] e^{-j2\pi kf} \right|^2} \quad (5.133)$$

unde $\hat{a}_p[k]$ sunt estimările parametrilor AR rezultați din ecuațiile recursive Levinson-Durbin, iar

$$\hat{\sigma}_{wp}^2 = \hat{E}_p^f = r_{xx}[0] \prod_{k=1}^p [1 - (\hat{a}_k[k])^2] \quad (5.134)$$

este valoarea pătratică medie minimă a erorii de predicție estimate pentru predictorul de ordin p .

Un exemplu care ilustrează performanțele acestui estimator din punct de vedere al rezoluției în frecvență, comparativ cu alte metode, este prezentat în paragraful 5.3.9.

5.3.4. Estimarea spectrului de putere a semnalelor modelate AR folosind metoda Burg

Metoda propusă de Burg pentru estimarea parametrilor modelului AR poate fi asimilată cu o metodă lattice recursivă în care coeficienții de reflexie se estimează pe baza minimizării erorilor din predicția liniară înainte și înapoi, exprimate în formă compusă, cu constrângerea că parametrii AR să satisfacă ecuațiile recursive Levinson-Durbin.

Pentru a obține estimatul, fie datele $x[n]$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ și fie estimările predicției liniare înainte și înapoi, de ordin m , dați de relațiile

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= -\sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k] \\ \hat{x}[n-m] &= -\sum_{k=1}^m a_m[k]x[n+k-m]\end{aligned}\tag{5.135}$$

și erorile de predicție corespunzătoare $f_m[n]$ și respectiv, $g_m[n]$, date de

$$\begin{aligned}f_m[n] &= x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k] \\ g_m[n] &= x[n-m] - \hat{x}[n-m] = \\ &= x[n-m] + \sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-m+k]\end{aligned}\tag{5.136}$$

unde $a_m[k]$, $0 \leq k \leq m-1$, $m = 1, 2, \dots, p$, sunt coeficienții de predicție.

Eroarea pătratică globală se determină cu relația

$$\sum_{n=m}^{N-1} [|f_m[n]|^2 + |g_m[n]|^2] = \xi_m\tag{5.137}$$

Această eroare urmează a fi minimizată prin alegerea coeficienților de predicție, supuși constrângerii de a satisface ecuațiile recursive Levison-Durbin, date de

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}[m-k], 1 \leq k \leq m-1, 1 \leq m \leq p\tag{5.138}$$

unde $K_m = a_m[m]$ este al m -lea coeficient de reflexie din realizarea lattice a predictorului.

Se reamintește că prin înlocuirea relației (5.138) în (5.136) rezultă perechea de ecuații recursive pentru erorile de predicție înainte și înapoi, de forma

$$\begin{aligned}f_m[n] &= f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \\ g_m[n] &= g_{m-1}[n-1] + K_m f_{m-1}[n]\end{aligned}\tag{5.139}$$

Înlocuind (5.139) în (5.137) și minimizând în raport cu K_m , rezultă

$$\begin{aligned}
\xi_m &= \sum_{n=m}^{N-1} \left[(f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1])^2 + (g_{m-1}[n-1] + K_m f_{m-1}[n])^2 \right] = \\
&= \sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}^2[n] + 2K_m f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1] + K_m^2 g_{m-1}^2[n-1] + \\
&\quad + g_{m-1}^2[n-1] + 2K_m f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1] + K_m f_{m-1}[n] \quad (5.140)
\end{aligned}$$

Condiția necesară de extrem este

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial K_m} = 4 \sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1] + 2\hat{K}_m (g_{m-1}^2[n-1] + f_{m-1}^2[n]) = 0 \quad (5.141)$$

de unde rezultă

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} \left[(f_{m-1}[n])^2 + (g_{m-1}[n-1])^2 \right]} \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (5.142)$$

Numărătorul relației (5.142) este un estimat al coeficientului de corelație dintre erorile de predicție înainte și înapoi. Se observă că $|\hat{K}_m| < 1$, astfel încât modelul numai cu poli obținut din date este stabil. De asemenea, se observă similitudinea dintre (5.142) cu corespondentul K_m statistic dat de (3.61). Numitorul relației (5.142) este estimatul pe baza celor mai mici pătrate a erorilor înainte și înapoi E_{m-1}^f și E_{m-1}^b , așa că se poate scrie

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} [\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b]} \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (5.143)$$

unde $\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b$ este un estimat al erorii pătratice globale ξ_m .

În concluzie, algoritmul Burg calculează coeficienții de reflexie ai structurii lattice echivalente cu relația (5.143), iar parametrii modelului AR sunt obținuți apoi cu ajutorul algoritmului Levison -Durbin.

Din estimății astfel obținuți rezultă estimatul spectrului de putere

$$P_{xx}^{BU}(f) = \frac{\hat{E}_p}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k] e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (5.144)$$

unde \hat{E}_p este valoarea pătratică medie a erorii globale de predicție estimate pentru predictorul de ordin p .

Avantajele majore ale metodei Burg sunt:

- 1- are rezoluție bună în frecvență;
- 2- determină un model AR stabil;
- 3- este eficient din punct de vedere al calculelor.

Dezavantaje:

Algoritmul prezintă o *scindare a liniilor sau componentelor (vârfurilor) spectrale* pentru raporturi semnal zgomot ridicate [39]. Aceasta înseamnă că, dacă spectrul semnalului $x[n]$ are o singură componentă spectrală la o anumită frecvență, în spectrul estimat cu ajutorul metodei Burg pot apărea două sau mai multe componente apropiate în imediata vecinătate a frecvenței respective. Această situație este ilustrată în figura 5.15. Pentru ordine mari, metoda poate introduce *vârfuri (componente) false*, de nivel scăzut, în spectrul estimat la frecvențe la care spectrul semnalului este nul. Mai mult, pentru semnale sinusoidale de durată mică, afectate de zgomot, rezultă o deplasare de frecvență față de frecvența adevărată, funcție de faza semnalului sinusoidal [15] [72].

În literatura de specialitate se tratează modificări ale metodei Burg pentru surmontarea acestor dezavantaje, modificări care, în esență, constau în introducerea unei ferestre de ponderare a erorilor pătratice înainte și înapoi. În felul acesta se optimizează eroarea pătratică ponderată

$$\xi_m^{WB} = \sum_{n=m}^{N-1} w_m[n] \left[|f_m[m]|^2 + |g_m[n]|^2 \right] \quad (5.145)$$

Înlocuind (5.139) în (5.145) și minimizând în raport cu coeficienții de reflexie, rezultă, prin parcurgerea unei proceduri similare celei folosite la optimizarea erorii neponderate

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}[n] f_{m-1}[n] g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}[n] \left[|f_{m-1}[n]|^2 + |g_{m-1}[n-1]|^2 \right]} \quad (5.146)$$

Rezultate bune au fost obținute prin folosirea ferestrelor Hamming și parabolică [61].

Un exemplu care ilustrează performanțele metodei Burg este prezentat în paragraful 5.3.9.

5.3.5. Estimarea spectrului de putere a semnalelor modelate AR folosind metoda covarianței modificate sau a celor mai mici pătrate fără constrângeri

După cum s-a prezentat anterior, metoda Burg constă în folosirea unui algoritm lattice utilizând metoda celor mai mici pătrate cu constângerea pentru coeficienții predictorului de a satisface ecuațiile Levison-Durbin.

Ca urmare a acestei constrângeri, creșterea ordinului modelului AR necesită numai o singură optimizare a parametrilor la fiecare etapă. Spre deosebire de această abordare, se poate folosi algoritmul celor mai mici pătrate fără această constrângere.

Pentru a detalia, se construiește estimatul predicției liniare înainte și înapoi și erorile corespunzătoare ca în relațiile (5.135) și (5.136).

Se minimizează suma pătratelor ambelor erori, adică

$$\xi_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[|f_p[n]|^2 + |g_p[n]|^2 \right] = \sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \right|^2 + \left| x[n-p] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n+k-p] \right|^2 \right] \quad (5.148)$$

ca în metoda Burg.

În (5.148) nu se mai impune ca parametrii AR să satisfacă relațiile Levison-Durbin. Minimizarea fără constrângeri a lui ξ_p în raport cu coeficienții de predicție determină setul de ecuații liniare

$$\sum_{k=1}^p a_p[k]r_{xx}[l, k] = -r_{xx}[l, 0] \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (5.149)$$

unde, prin definiție, secvența $r_{xx}[l, k]$ este

$$r_{xx}[l, k] = \sum_{n=p}^{N-1} [x[n-k]x[n-l] + x[n-p+l]x[n-p+k]] \quad (5.150)$$

Eroarea rezultată utilizând metoda celor mai mici pătrate (LS) este

$$\xi_p^{LS} = r_{xx}[0, 0] + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k]r_{xx}[0, k] \quad (5.151)$$

Estimatul spectrului de putere rezultat în urma folosirii algoritmului LS fără constrângeri este

$$P_{xx}^{LS} = \frac{\xi_p^{LS}}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k]e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (5.152)$$

Matricea de corelație din (5.150) nu este Toeplitz, așa că algoritmul Levison-Durbin nu poate fi aplicat, dar pot fi dezvoltati alți algoritmi pentru eficientizarea calculelor, de complexitate $O(p^2)$.

Caracteristicile acestei metode sunt superioare metodei Burg, în sensul că nu prezintă aceeași sensibilitate la apariția scindării liniilor spectrale, a vârfurilor false și a deplasării de frecvență. Această metodă, în schimb, nu garantează că parametrii AR astfel estimați determină un model AR stabil.

Un exemplu care ilustrează această metodă este prezentat în paragraful 5.3.9.

5.3.6. Alegerea ordinului modelului AR

Ca regulă generală, dacă se adoptă un ordin prea mic pentru modelul AR, se obține un spectru puternic netezit. Dacă ordinul p este prea mare, există riscul introducerii de vârfuri false de nivel scăzut în spectru.

Un indicator de performanță al modelului AR este valoarea pătratică medie a erorii care, în general, este diferită pentru fiecare din estimatorii prezentați. Valoarea pătratică medie a erorii descrește cu creșterea ordinului modelului. Se poate observa viteza de descreștere și apoi să se decidă încetarea creșterii ordinului, când eroarea devine mică. Aceasta abordare este, de obicei, imprecisă și necontrolabilă.

Două din cele mai bune criterii pentru selectarea ordinului modelului au fost propuse de Akaike [34]:

1-Criteriul erorii de predicție finale *FPE (Final Prediction Error)* în care ordinul este selectat astfel încât să se minimizeze indicele de performanță

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left(\frac{N + p + 1}{N - p - 1} \right) \quad (5.153)$$

unde $\hat{\sigma}_{wp}^2$ este dispersia estimată a erorii de predicție liniară.

2-Criteriul informației Akaike *AIC(p), (Akaike Information Criterion)* se bazează pe alegerea ordinului care minimizează cantitatea

$$AIC(p) = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p / N \quad (5.154)$$

Cu creșterea ordinului, descrește $\ln \hat{\sigma}_{wp}^2$, în timp ce termenul $2p/N$ crește.

3- O formă alternativă pentru criteriul AIC este criteriul care minimizează lungimea de descriere (MDL) (*Minimize Description Length*)

$$MDL(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N \quad (5.155)$$

4- Criteriul de transfer autoregresiv (CAT) (*Criterion Autoregressive Transfer*)

$$CAT(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{N-k}{N \hat{\sigma}_{wk}^2} - \frac{N-p}{N \hat{\sigma}_{wp}^2} \quad (5.156)$$

Ordinul p se alege să minimizeze cantitatea $CAT(p)$.

Exemple privind alegerea ordinului și influența ordinului asupra estimatului spectrului de putere sunt prezentate în paragraful 5.3.9.

Trebuie precizat faptul că pentru aplicarea criteriilor prezentate, din date trebuie înlăturată valoarea medie. În general, ordinul modelului depinde de criteriul folosit. Criteriul de selecție al ordinului nu conduce totdeauna la rezultate definitive. În absența oricărei informații asupra procesului care are ca rezultat datele observate, trebuie încercate diferite ordine pentru model și diferite criterii, care, însă, pot conduce la rezultate diferite.

5.3.7. Estimarea spectrului de putere pe baza modelului cu medie alunecătoare (MA)

În modelul $MA(q)$, pentru datele observate, legătura dintre secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ și parametrii MA ai modelului este dată de sistemul de ecuații

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ 0 & m > q \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.157)$$

obținut din (5.125), prin impunerea $a_k = 0$, pentru $k = 1, 2, \dots, p$ și înlocuirea $h[k]$ cu $\{b_k\}$.

Pentru modelul considerat, din (5.124) rezultă

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1}) \quad (5.158)$$

Ținând cont că

$$B(z)B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^q d_m z^{-m} \quad (5.159)$$

unde coeficienții $\{d_m\}$ sunt legați de parametrii MA prin relația

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m}, |m| \leq q \quad (5.160)$$

rezultă atunci

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} \sigma_w^2 d_m & |m| \leq q \\ 0 & |m| > q \end{cases} \quad (5.161)$$

Spectrul de putere pentru procesul MA(q) este

$$\Gamma_{xx}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} = \sigma_w^2 \sum_{m=-q}^q d_m e^{-j2\pi fm} \quad (5.162)$$

Se observă că nu este necesar a determina parametrii MA pentru a estima spectrul de putere, ci sunt suficienți estimații secvenței de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ pentru $|m| \leq q$, adică

$$P_{xx}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm}, \quad (5.163)$$

exact ca estimatul spectrului de putere neparametric.

Deoarece $\gamma_{xx}[m]=0$ pentru $|m|>q$, spectrul are aceeași formă ca și periodograma estimată. Ordinul procesului MA se determină, de obicei, empiric. De exemplu, criteriul AIC pentru modelul MA are aceeași formă ca pentru modelul AR

$$AIC(q) = \ln \hat{\sigma}_{wq}^2 + 2q / N \quad (5.164)$$

unde $\hat{\sigma}_{wq}^2$ este un estimat al dispersiei zgomotului alb.

Un alt mod de a verifica modelul este de a filtra datele prin inversul modelului MA(q) și de a testa dacă ieșirea se apropie de zgomotul alb. De asemenea, se poate urmări dacă valoarea estimațiilor nedeplasați ai secvenței de autocorelație sunt apropiați de zero pentru deplasări mari. Dacă nu se întâmplă astfel, modelul MA va avea rezultate slabe referitor la rezoluția în frecvență și va fi abandonat în favoarea modelului AR sau ARMA.

12.3.8. Estimarea spectrului de putere pentru semnale modelate ARMA

Algoritmul Burg și variantele sale, precum și metoda celor mai mici pătrate descrise anterior, furnizează estimări ai spectrului de putere robuști, de rezoluție ridicată, pe baza modelului AR.

Modelul ARMA oferă posibilitatea îmbunătățirii estimatului spectrului AR, prin folosirea a mai puțini parametri pentru sistem. Modelul ARMA este potrivit în special când datele sunt afectate de zgomot, deoarece în acest caz semnalul rezultat conduce la un proces ARMA. Într-adevăr, se presupune că datele $x[n]$ sunt generate de un sistem AR, a cărui ieșire este afectată de zgomot alb, aditiv.

Transformata Z a funcției de autocorelație a semnalului rezultat poate fi exprimată ca

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{\sigma_w^2}{A(z)A(z^{-1})} + \sigma_n^2 = \frac{\sigma_w^2 + \sigma_n^2 A(z)A(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \quad (5.165)$$

unde σ_n^2 este dispersia zgomotului aditiv. Procesul $x[n]$ este ARMA(p,p), unde p este ordinul procesului.

După cum s-a arătat, parametrii modelului ARMA sunt legați de secvența de autocorelație prin relația

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > q \quad (a) \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \quad (b) \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \quad (c) \end{cases} \quad (5.166)$$

Pentru deplasări $|m| > q$, ecuația implică numai parametrii $\{a_k\}$. Cu estimății funcției de autocorelație înlocuiți în locul lui $\gamma_{xx}[m]$, se pot rezolva cele p ecuații din (5.166a) pentru a afla $\{\hat{a}_k\}$.

Pentru modele de ordin superior, este posibil ca această abordare să conducă la estimăți modești pentru parametrii AR, motiv pentru care aceasta nu este recomandată.

O metodă mult mai demnă de încredere este de a construi un sistem de ecuații liniare cu mai multe ecuații decât necunoscute pentru $m > q$ și a folosi metoda celor mai mici pătrate în optimizarea coeficienților modelului.

Pentru a detalia, se presupune că secvența de autocorelație poate fi estimată fidel până la deplasarea M , unde $M > p+q$. În acest caz, se poate scrie

$$\hat{r}_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[m-k],$$

$$m = q+1, q+2, \dots, M < N, M > p+q \quad (5.167)$$

Parametrii $\{a_k\}$ se selectează astfel încât să minimizeze eroarea pătratică

$$\xi = \sum_{m=q+1}^M |e[m]|^2 = \sum_{m=q+1}^M \left| r_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[m-k] \right|^2 \quad (5.168)$$

Minimizarea lui ξ conduce la setul de ecuații liniare pentru parametrii $\{a_k\}$

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[M-1] & r_{xx}[M-2] & \dots & r_{xx}[M-p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \dots \\ r_{xx}[M] \end{bmatrix} \quad (5.169)$$

Această relație poate fi scrisă matriceal în forma

$$[R_{xx}][a] = -[r_{xx}] \quad (5.169')$$

unde

$$[R_{xx}] = \begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[M-1] & r_{xx}[M-2] & \dots & r_{xx}[M-p] \end{bmatrix}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad [r_{xx}] = - \begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \dots \\ r_{xx}[M] \end{bmatrix}$$

Deoarece $[R_{xx}]$ este o matrice de dimensiune $(M-q) \times p$ și $(M-q) > p$, vectorul coeficienților estimați se obține cu relația

$$[\hat{a}] = -([R_{xx}'][R_{xx}])^{-1}[R_{xx}'] [r_{xx}] \quad (5.170)$$

Procedura se numește *metoda Yule-Walker modificată a celor mai mici pătrate*.

Secvenței de autocorelație i se poate aplica o fereastră de ponderare, pentru a scădea ponderea estimațiilor mai puțin demni de încredere pentru deplasări mari. Odată estimați parametrii părții AR ai modelului, se poate construi sistemul a cărui funcție de sistem este

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k z^{-k} \quad (5.171)$$

Secvența $x[n]$ poate fi apoi filtrată prin filtrul de tip FIR, cu funcția de sistem $\hat{A}(z)$, obținându-se secvența

$$v[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x[n-k], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.172)$$

Cascada dintre modelul ARMA(p, q) și modelul $\hat{A}(z)$ este aproximativ procesul MA(q) generat de modelul $B(z)$. Astfel se poate folosi estimatul MA pentru a obține spectrul MA. În particular, secvența filtrată $v[n]$ pentru $p \leq n \leq N-1$ este folosită pentru a forma secvența de corelație estimată $r_{vv}[m]$, din care se obține spectrul MA

$$P_{vv}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{vv}[m] e^{-j2\pi fm} \quad (5.173)$$

Se observă că parametrii $\{b_k\}$ nu sunt necesari în determinarea spectrului de putere și că $r_{vv}[m]$ este un estimat al autocorelației pentru modelul MA din (5.157).

În formarea estimatului $r_{vv}[m]$ se poate folosi ponderarea cu o fereastră Bartlett, pentru dezaccentuarea estimațiilor corelației pentru deplasări mari.

În final rezultă

$$\hat{P}_{xx}^{ARMA}(f) = \frac{P_{vv}^{MA}(f)}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (5.174)$$

Problema selecției ordinului modelului ARMA(p,q) se rezolvă prin minimizarea indicelui AIC [62].

$$AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{wpq}^2 + \frac{2(p+q)}{N} \quad (5.175)$$

unde $\hat{\sigma}_{wpq}^2$ este un estimat al dispersiei erorii zgomotului alb aplicat la intrarea modelului. Un test suplimentar asupra adecvării unui model particular ARMA(p,q) este de a filtra datele prin model și de a testa dacă la ieșire se furnizează o secvență de zgomot alb. Aceasta ar putea necesita ca parametrii modelului MA, să fie calculați din secvența de autocorelație estimată, folosind factorizarea spectrală pentru a determina $B(z)$ din $D(z) = B(z)B(z^{-1})$.

5.3.9. Rezultate experimentale

În acest paragraf sunt prezentate câteva rezultate experimentale privind performanțele estimațiilor AR și ARMA ai spectrelor de putere, folosind date generale artificial. Scopul acestor simulări constă în compararea metodelor de estimare spectrală, din punct de vedere al rezoluției de frecvență, deplasării și robusteții în prezența zgomotului aditiv. În aceste experimente, datele sunt compuse din una sau două sinusoides și zgomot aditiv. Cele două sinusoides sunt distanțate în frecvență cu Δf . În acest caz, procesul real este de tip ARMA(4,4). În experimente se folosește un model AR(p). Pentru raporturi semnal/zgomot mari, este de așteptat ca modelul AR(4) să fie adecvat. Pentru raporturi semnal/zgomot scăzute este necesar un model AR de ordin mai mare pentru a aproxima procesul ARMA (4,4). Rezultatele experimentale sunt în concordanță cu aceste aspecte. Raportul semnal/zgomot se definește

ca $SNR = 10 \log_{10} A^2 / 2\sigma^2$, unde σ^2 este dispersia zgomotului aditiv, considerat alb, iar A, amplitudinea sinusoidei.

Frecvența sinusoidelor componente ale semnalului, nivelul zgomotului, faza inițială și lungimea datelor sunt trecute pe fiecare grafic.

În figura 5.8 sunt prezentați estimații spectrului de putere obținuți prin metodele Yule-Walker, Burg și a celor mai mici pătrate (LS), pentru o lungime a datelor de $N=20$, $SNR=20\text{dB}$ și $\Delta f = 0,13$.

Se observă că metoda Yule-Walker furnizează un estimat puternic netezit, cu vârfuri mici. Dacă distanțarea în frecvență descrește la $\Delta f = 0,07$, metoda Yule-Walker nu mai poate decela între cele două vârfuri, situație ilustrată în figura 5.9.

De asemenea, se observă o deplasare în cazul metodei Burg. Prin creșterea lungimii datelor, metoda Yule-Walker poate decide prezența celor două componente spectrale. Din compararea acestor trei metode se remarcă faptul că metodele Burg și a celor mai mici pătrate sunt superioare pentru înregistrări de lungime mică.

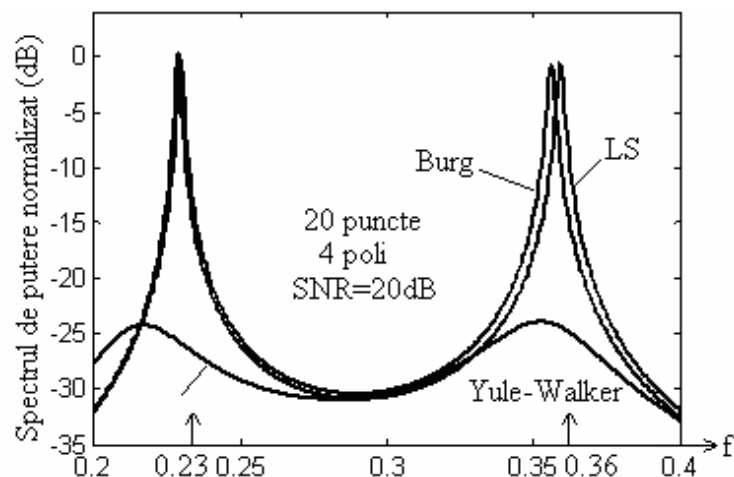


Fig. 5.8. Comparație între metodele AR de estimare spectrală

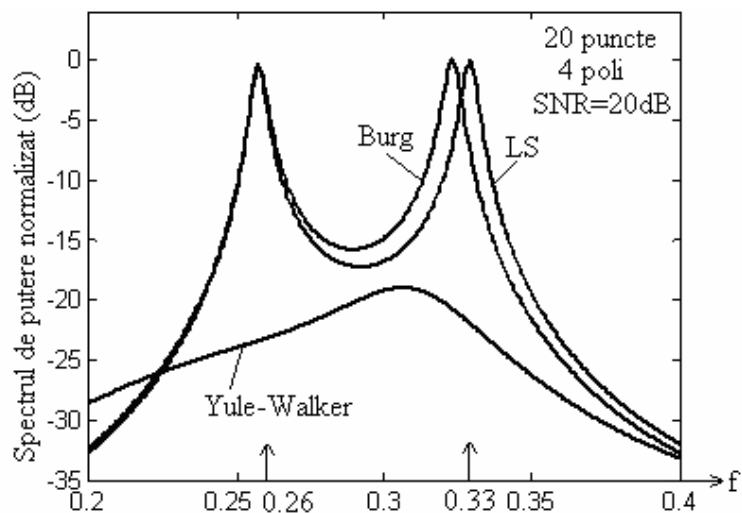


Fig. 5.9. Comparație între metodele AR de estimare spectrală

Efectul zgomotului aditiv asupra estimațiilor este ilustrat în figura 5.10 pentru metoda celor mai mici pătrate.

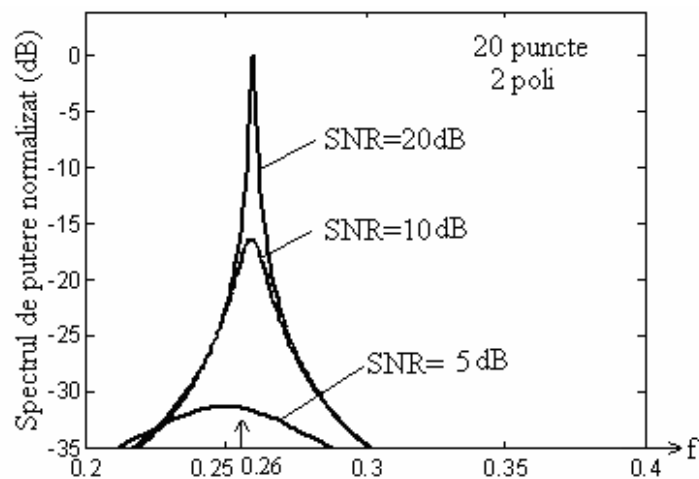


Fig. 5.10. Efectul zgomotului aditiv asupra estimatului prin metoda LS

Efectul ordinului filtrului asupra metodelor Burg și LS este prezentat în figurile 5.11, respectiv 5.12. Ambele metode arată vârfuri false când ordinul filtrului este crescut la $p=12$.

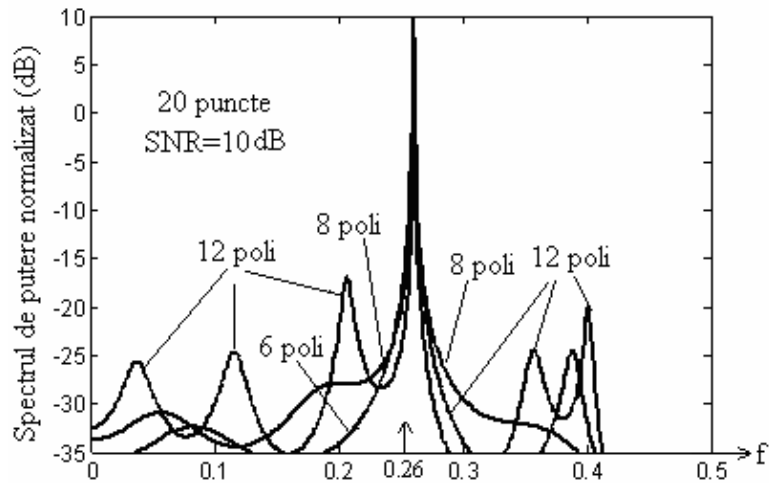


Fig. 5.11. Efectul ordinului filtrului asupra metodei Burg

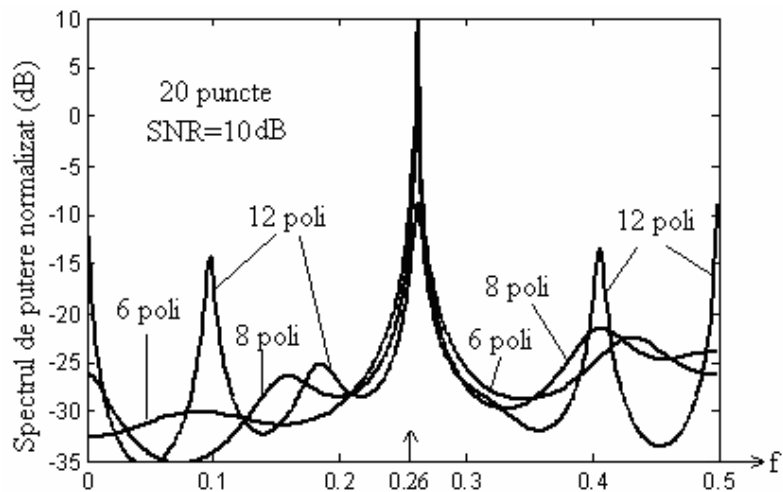


Fig. 5.12. Efectul ordinului filtrului asupra metodei LS

Efectul fazei inițiale este ilustrat în figurile 5.13 și 5.14 pentru metoda Burg și, respectiv, metoda LS. Se observă că metoda LS este mai puțin sensibilă la faza inițială decât metoda Burg.

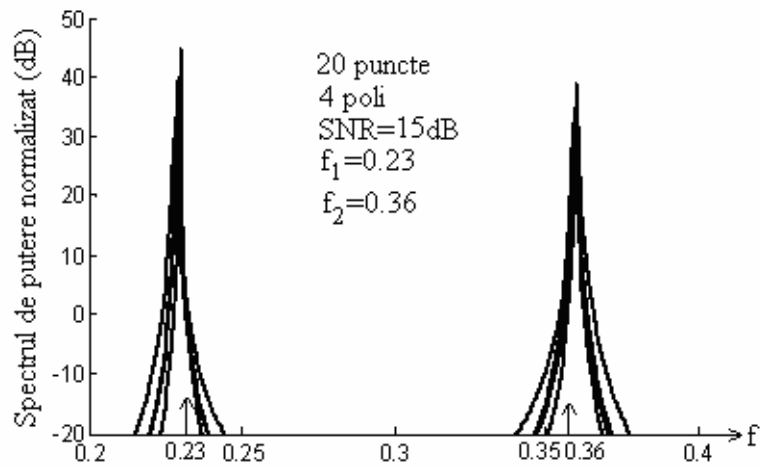


Fig. 5.13. Efectul fazei inițiale asupra metodei Burg

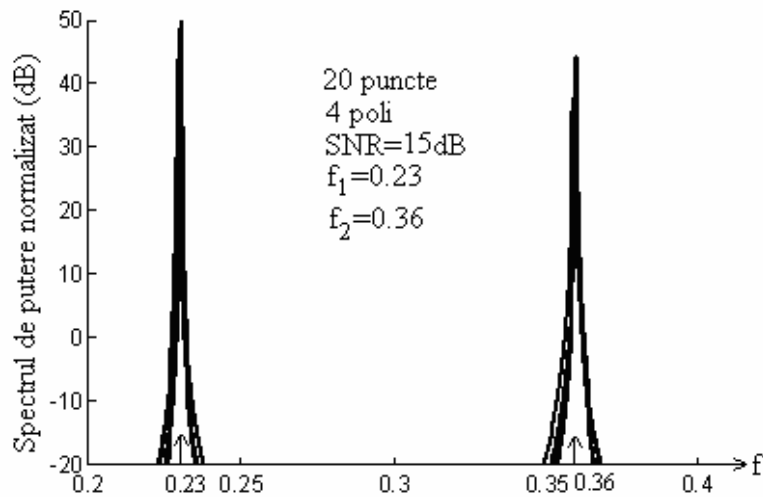


Fig. 5.14. Efectul fazei inițiale asupra metodei LS

În figura 5.15 este arătată scindarea liniilor spectrale în cazul metodei Burg, pentru $p=12$. Se observă că pentru un model de ordinul 8, acest lucru nu se produce. Metoda LS nu prezintă scindarea liniilor spectrale pentru aceleași condiții folosite în simularea precedentă. Această scindare din cazul metodei Burg dispare cu creșterea lungimii datelor.

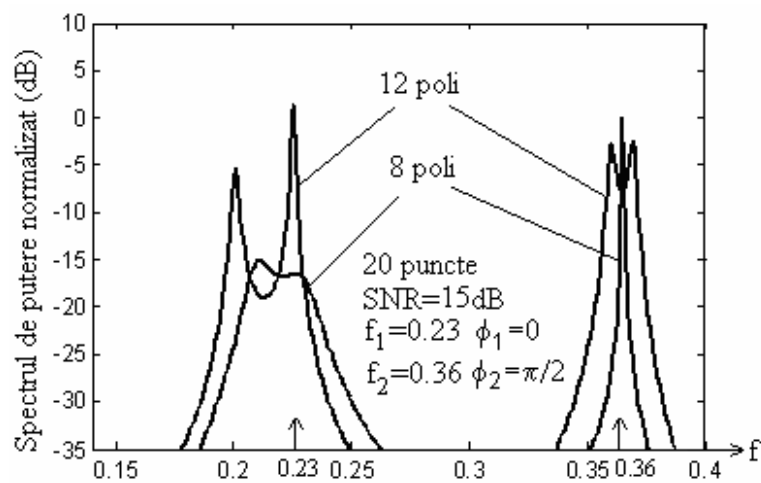


Fig. 5.15. Scindarea liniilor spectrale în metoda Burg

În figurile 5. 16 și 5. 17 sunt prezentate proprietățile de rezoluție ale metodelor Burg și LS pentru $\Delta f = 0,07$ și $N = 20$, pentru un SNR scăzut (3dB). Deoarece procesul care conține zgomot aditiv este ARMA, este necesar un model AR de ordin înalt pentru o aproximare adecvată la SNR scăzut. Se observă că rezoluția de frecvență se îmbunătățește cu creșterea ordinului.

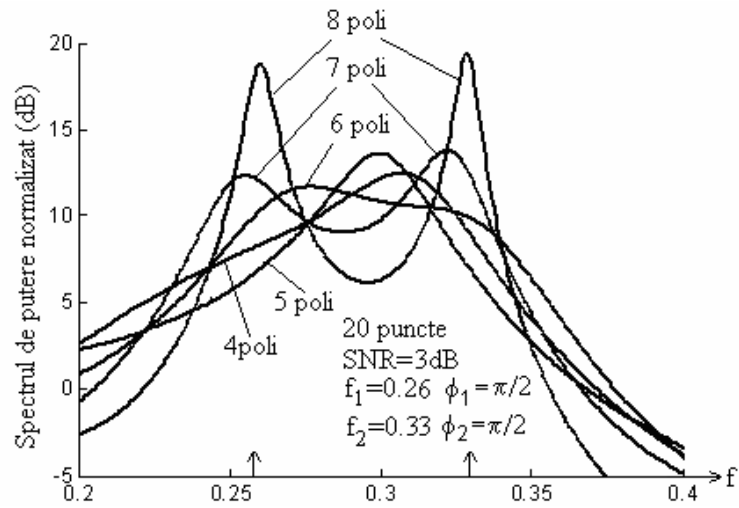


Fig. 5.16. Rezoluția de frecvență în metoda Burg cu N=20

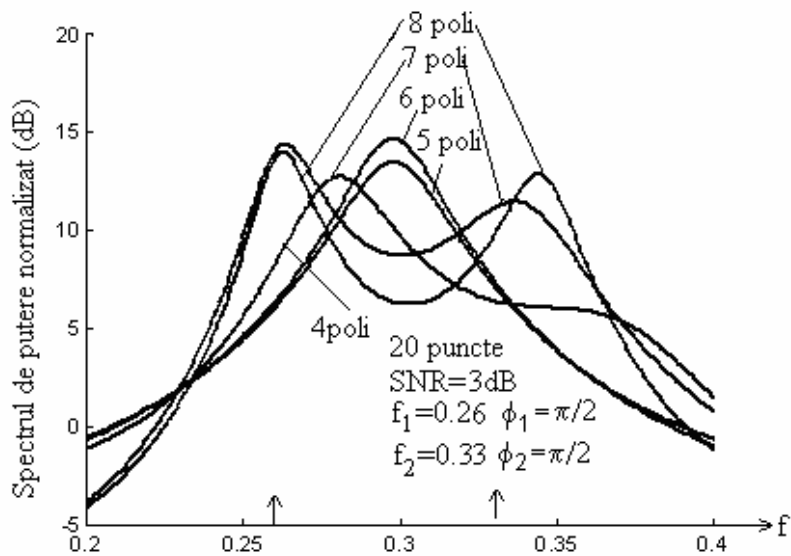


Fig. 5.17. Rezoluția de frecvență în metoda LS cu N=20

În figura 5.18 se prezintă eroarea de predicție finală pentru metoda Burg și un SNR =3dB. Pentru această valoare a raportului

semnal /zgomot, valoarea optimă a ordinului modelului este $p=12$, conform criteriului erorii de predicție finale (FPE).

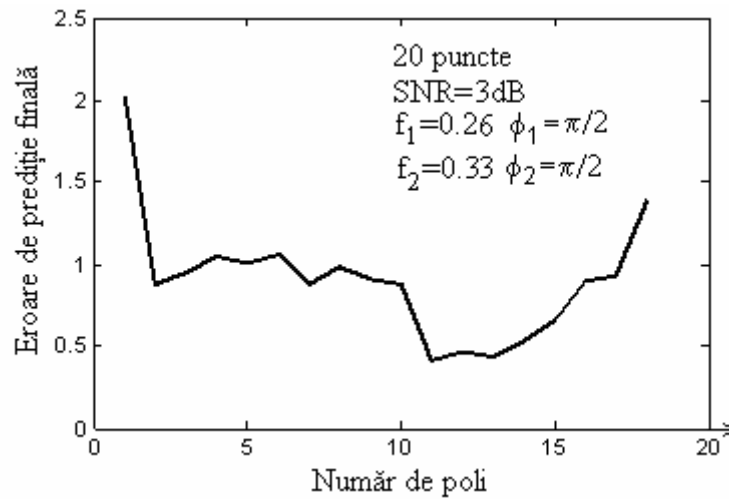


Fig. 5.18. Eroarea de predicție finală pentru estimatul Burg

În figura 5.19 este prezentat estimatul spectrului de putere pentru două sinusoidă neafectate de zgomot, folosind un model ARMA(10,10).

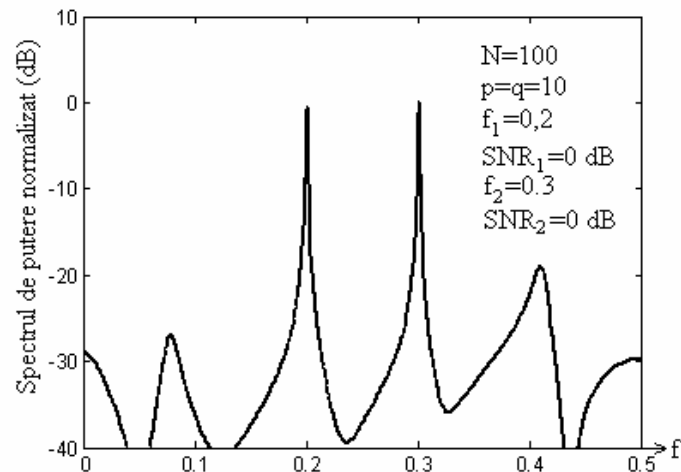


Fig. 5.19. Estimatul spectrului de putere pentru două sinusoidă neafectate de zgomot, folosind modelul ARMA (10,10)

În figura 5.20 este prezentat estimatul spectrului de putere pentru două sinusoidă afectate de zgomot, folosind un model ARMA(10,10). Se observă calitatea bună a estimațiilor obținute prin această metodă. Condițiile în care au fost obținute acești estimații sunt prezentate în figură.

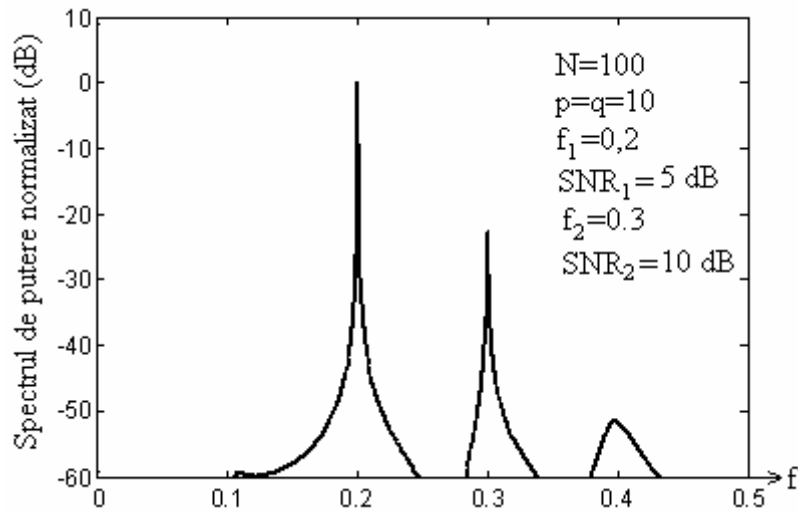


Fig. 5.20. Estimatul spectrului de putere pentru două sinusoidă în zgomot, folosind modelul ARMA (10,10)

5.4. Probleme rezolvate

1. Fie procesul AR(3) generat de ecuația cu diferențe

$$x[n] = \frac{14}{24}x[n-1] + \frac{9}{24}x[n-2] - \frac{1}{24}x[n-3] + w[n]$$

unde $w[n]$ este zgomot alb de dispersie σ_w^2

a) Să se determine coeficienții predictorului liniar optim pentru $p = 3$.

b) Să se determine funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq 5$.

c) Să se determine coeficienții de reflexie corespunzători predictorului liniar anterior.

Soluție

$$a) H(z) = \frac{1}{1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}}$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}$$

Coeficienții predictorului optim sunt:

$$a_3[0] = 1; a_3[1] = -\frac{14}{24}; a_3[2] = -\frac{9}{24}; a_3[3] = \frac{1}{24}$$

b) Particularizând relația (5.131) pentru datele problemei, rezultă sistemul

$$\begin{cases} \gamma_{xx}[0] - \frac{14}{24}\gamma_{xx}[1] - \frac{9}{24}\gamma_{xx}[2] + \frac{1}{24}\gamma_{xx}[3] = \sigma_w^2 \\ -\frac{14}{24}\gamma_{xx}[0] + \frac{15}{24}\gamma_{xx}[1] + \frac{1}{24}\gamma_{xx}[2] = 0 \\ -\frac{9}{24}\gamma_{xx}[0] - \frac{13}{24}\gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[2] = 0 \\ \frac{1}{24}\gamma_{xx}[0] - \frac{9}{24}\gamma_{xx}[1] - \frac{14}{24}\gamma_{xx}[2] + \gamma_{xx}[3] = 0 \end{cases}$$

cu soluția:

$$\gamma_{xx}[0] = 1,47\sigma_w^2; \gamma_{xx}[1] = 1,29\sigma_w^2; \gamma_{xx}[2] = 1,25\sigma_w^2; \gamma_{xx}[3] = 1,15\sigma_w^2.$$

Pentru a determina valorile funcției de autocorelație pentru $m > 3$, se folosește relația

$$\gamma_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^3 a_k \gamma_{xx}[m-k]$$

de unde rezultă

$$\gamma_{xx}[4] = 1,091; \gamma_{xx}[5] = 0,964.$$

c) Coeficienții de reflexie se determină cu relația $K_m = a_m[m]$, $1 \leq m \leq p$, unde $a_m[m]$ se determină din polinoamele

corespunzătoare structurii lattice cu m trepte.

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = 3, 2, 1.$$

$$K_3 = a_3[3] = 0,042$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}$$

$$B_3(z) = \frac{1}{24} - \frac{9}{24}z^{-1} - \frac{14}{24}z^{-2} + z^{-3}$$

$$A_2(z) = 1 + \frac{327}{575}z^{-1} - \frac{202}{575}z^{-2} \rightarrow K_2 = a_2[2] = -\frac{202}{575} = 0,351$$

$$B_2(z) = -\frac{202}{575} + \frac{327}{575}z^{-1} + z^{-2}$$

$$A_1(z) = 1 + 0,452z^{-1} \rightarrow K_1 = a_1[1] = 0,452.$$

2. Secvența de autocorelație a unui proces aleator este

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ -0,5, & m = \pm 1 \\ 0,625, & m = \pm 2 \\ -0,6875, & m = \pm 3 \end{cases}$$

Să se determine funcțiile de sistem $A_m(z)$ pentru filtrele erorii de predicție pentru $m = 1, 2, 3$, coeficienții de reflexie K_m și erorile pătratice medii de predicție corespunzătoare.

Soluție

Particularizând relațiile (5.129) pentru datele problemei, rezultă

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] \\ \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[-2] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[2] \\ \gamma_{xx}[3] \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,625 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0,625 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,625 \\ -0,6875 \end{bmatrix}$$

cu soluția

$$a_3[1] = 0; a_3[2] = -\frac{3}{8}; a_3[3] = \frac{1}{2}.$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{3}{8}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}, K_3 = a_3[3] = \frac{1}{2}$$

Funcțiile de sistem ale predictorului de ordin inferior se determină recursiv din relația

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = 3, 2, 1,$$

care conduce la soluțiile

$$A_2(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}, K_2 = a_2[2] = -\frac{1}{2}$$

$$A_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}, K_1 = a_1[1] = \frac{1}{2}$$

Eroarea de predicție a predictorului cu m trepte se determină cu relația

$$E_m^f = E_{m-1}^f (1 - K_m^2), \text{ cu } E_0^f = \gamma_{xx}[0].$$

Rezultă atunci:

$$E_1^f = E_0^f (1 - K_1^2) = \gamma_{xx}[0] \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} E_2^f &= E_1^f (1 - K_2^2) = \gamma_{xx}[0] (1 - K_1^2) (1 - K_2^2) = \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$E_3^f = E_2^f (1 - K_3^2) = \gamma_{xx}[0](1 - K_1^2)(1 - K_2^2)(1 - K_3^2) = \\ = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{27}{64}$$

3. a) Să se determine spectrele de putere pentru procesele aleatoare generate de următoarele ecuații cu diferențe:

1) $x[n] = -0,81x[n-2] + w[n] + w[n-1]$

2) $x[n] = w[n] - w[n-2]$

3) $x[n] = -0,81x[n-2] + w[n]$

b) pentru procesele (2) și (3), să se determine funcțiile de autocorelație.

Soluție

a1. $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,81z^{-2}}$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) = \sigma_w^2 \frac{(1 - z^{-1})(1 - z)}{(1 + 0,81z^{-2})(1 + 0,81z^2)} = \\ = \sigma_w^2 \frac{2 - (z + z^{-1})}{1,6561 + 0,81(z^2 + z^{-2})}$$

Evaluând $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate, se obține

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{2(1 - \cos 2\pi f)}{1,6561 + 1,62 \cdot \cos 4\pi f}$$

a2. $H(z) = 1 - z^{-2}$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) = \sigma_w^2 (1 - z^{-2})(1 - z^2) = \sigma_w^2 (2 - z^{-2} - z^2)$$

Evaluând $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate, se obține

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 (2 - 2 \cos 4\pi f)$$

$$\text{a3. } H(z) = \frac{1}{1 + 0,81z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(z) &= \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) = \sigma_w^2 \frac{1}{(1 + 0,81z^{-2})(1 + 0,81z^2)} = \\ &= \sigma_w^2 \frac{1}{1,6561 + 0,81(z^2 + z^{-2})} \end{aligned}$$

Evaluând $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate, se obține

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{1}{1,6561 + 1,62 \cdot \cos 4\pi f}$$

b2.

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}[m] &= Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\} = Z^{-1}\{\sigma_w^2(2 - z^{-2} - z^2)\} = \\ &= \sigma_w^2(-\delta[n+2] + 2\delta[n] - \delta[n-2]) \end{aligned}$$

b3.

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}[m] &= Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\} = Z^{-1}\left\{\sigma_w^2 \frac{1}{(1 + 0,81z^{-2})(1 + 0,81z^2)}\right\} = \\ &= \sigma_w^2 Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1 + j0,9z^{-1})(1 - j0,9z^{-1})(1 + j0,9z)(1 - j0,9z)}\right\} = \\ &= 2,9 \cdot \sigma_w^2 \cdot (0,9)^{|m|} \cos \frac{\pi n}{2} \end{aligned}$$

4. Să se arate că un filtru trece tot, cu funcția de sistem

$$H(z) = \prod_{i=1}^N \frac{zz_i^* - 1}{z - z_i}, |z_i| < 1, \text{ are proprietatea că}$$

$$|H(z)| > 1, \text{ pentru } |z| < 1$$

$$|H(z)| < 1, \text{ pentru } |z| > 1$$

$$|H(z)| = 1, \text{ pentru } |z| = 1$$

(p4.1)

Soluție

Exprimând z și z_i^* în forma polară $z = r \cdot e^{j\omega}$, $z_i = r_i \cdot e^{j\omega_i}$, pentru fiecare factor al produsului din enunț se poate scrie

$$|H_i(z)| = \left| \frac{zz_i^* - 1}{z - z_i} \right| = \left| \frac{rr_i e^{j(\omega - \omega_i)} - 1}{re^{j\omega} - re^{j\omega_i}} \right| = \left(\frac{r^2 r_i^2 + 1 - 2rr_i \cos(\omega - \omega_i)}{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\omega - \omega_i)} \right)^{1/2}$$

Ținând cont că $r_i < 1$, rezultă

$$|H_i(z)| > 1, \quad \text{pentru } |z| < 1$$

$$|H_i(z)| < 1, \quad \text{pentru } |z| > 1$$

$$|H_i(z)| = 1, \quad \text{pentru } |z| = 1$$

Prin înmulțirea factorilor $H_i(z)$, rezultă relația (p4.1).

5. Să se arate că dacă coeficienții de reflexie $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p$, atunci $|z_{p,i}| < 1$ pentru toți $i \leq p$, unde $z_{p,i}$ sunt rădăcinile polinomului $A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k]z^{-k}$.

Soluție

Se folosește metoda inducției. Pentru $p=1$, dacă $|K_1| < 1$, polinomul $A_1(z) = 1 + a_1[1]z^{-1} = 1 + K_1 z^{-1}$ are rădăcina $z_{1,1} = -K_1$, deci, într-adevăr, $|z_{1,1}| < 1$.

În continuare, se presupune că dacă $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p-1$, $|z_{p-1,j}| < 1$ pentru toți $j \leq p-1$, unde $z_{p-1,j}$ sunt rădăcinile polinomului $A_{p-1}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_p[k]z^{-k}$ și se arată că $|z_{p,i}| < 1$.

Între polinoamele $A_{p-1}(z)$ și $A_p(z)$ există relația recursivă

$$A_p(z) = A_{p-1}(z) + K_p z^{-p} A_{p-1}(z^{-1}) \quad (\text{p5.1})$$

$z_{p,i}$ este o rădăcină a polinomului $A_p(z)$, astfel încât înlocuind această rădăcină în (p5.1), rezultă

$$A_p(z_{p,i}) = A_{p-1}(z_{p,i}) + K_p z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1}) = 0 \quad (\text{p5.2})$$

Expresia

$$Q_{p-1}(z) = \frac{z^{-p} A_{p-1}(z^{-1})}{A_{p-1}(z)} \quad (\text{p5.3})$$

este de tip trece tot. Din (p5.2) rezultă că expresia

$$-\frac{1}{K_p} = \frac{z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1})}{A_{p-1}(z_{p,i})} = Q_{p-1}(z_{p,i}) \quad (\text{p5.4})$$

care caracterizează un sistem de tip trece tot. Deoarece $|K_p| < 1$,

rezultă $|Q_{p-1}(z_{p,i})| = \frac{1}{|K_p|} > 1$. Ținând cont de rezultatul din problema

4, rezultă $|z_{p,i}| < 1$.

6. Dacă $|z_{p,i}| < 1$ pentru toți $i \leq p$, atunci

$$|K_m| < 1 \quad (\text{p6.1})$$

pentru toți $m \leq p$, unde $z_{p,i}$ sunt rădăcinile polinomului

$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k] z^{-k}$, iar K_m sunt coeficienții de reflexie corespunzători polinomului $A_p(z)$.

Soluție

Produsul rădăcinilor polinomului $A_p(z)$ este egal cu $a_p[p]$, adică $K_p = a_p[p] = z_{p,1} \cdot z_{p,2} \cdot \dots \cdot z_{p,p}$. Cum modulul tuturor polilor este subunitar, rezultă $|K_p| < 1$, adică relația (p6.1) este adevărată pentru $m = p$.

Pentru a arăta că relația (p6.1) este adevărată pentru $m = p - 1$, este suficient a arăta că $|z_{p-1,j}| < 1$ pentru $j \leq p - 1$. Pentru aceasta se formează funcțiile trece tot

$$Q_p(z) = \frac{z^{-p} A_p(z^{-1})}{A_p(z)}$$

De asemenea, se folosește relația de recurență

$$A_{p-1}(z) = \frac{A_p(z) - K_p z^{-p} A_p(z^{-1})}{1 - K_p^2} \quad (\text{p6.2})$$

Deoarece $A_{p-1}(z_{p-1,j}) = 0$, din (p6.2) rezultă

$$A_p(z_{p-1,j}) - K_p z_{p-1,j}^{-p} A_p(z_{p-1,j}^{-1}) = 0, \text{ adică}$$

$$|Q_p(z_{p-1,j})| = \left| \frac{z_{p-1,j}^{-p} A_p(z_{p-1,j}^{-1})}{A_p(z_{p-1,j})} \right| = \frac{1}{|K_p|} > 1, \text{ deci } |z_{p-1,j}| < 1 \text{ și}$$

$$|K_{p-1}| = |a_{p-1}[p-1]| = |z_{p-1,1} \cdot z_{p-1,1} \cdot \dots \cdot z_{p-1,p-1}| < 1.$$

Continuând în același mod, se decide că $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p$.

7. Dacă $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p - 1$ și $|K_p| = 1$, atunci polinomul $A_p(z)$ are toate rădăcinile pe cercul unitate, adică $|z_{p,i}| = 1$ pentru toți $i \leq p$.

Soluție

Din problema 6 rezultă că $|z_{p-1,j}| < 1$, deoarece $|K_k| < 1$ pentru toți $m \leq p - 1$.

Expresia

$$Q_{p-1}(z) = \frac{z^{-p} A_{p-1}(z^{-1})}{A_{p-1}(z)}$$

este de tip trece tot. Din (p5.2) rezultă că expresia

$|Q_{p-1}(z_{p,i})| = \left| \frac{z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1})}{A_{p-1}(z_{p,i})} \right| = \frac{1}{|K_p|} = 1$, ceea ce, conform relației (p4.1), conduce la concluzia că $|z_{p,i}| = 1$.

8. Dacă $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p-1$ și $|K_p| > 1$, atunci polinomul $A_p(z)$ are toate rădăcinile în exteriorul cercului unitate, adică $|z_{p,i}| > 1$ pentru toți $i \leq p$.

Soluție

În acest caz

$|Q_{p-1}(z_{p,i})| = \left| \frac{z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1})}{A_{p-1}(z_{p,i})} \right| = \frac{1}{|K_p|} < 1$, ceea ce, conform relației (p4.1), conduce la concluzia că $|z_{p,i}| > 1$.

9. Un proces aleator staționar AR(p) satisface ecuațiile

$$\gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[m-k] = \begin{cases} \sigma_w^2, & m = 0 \\ 0, & 1 \leq m \leq p \end{cases}$$

unde $a_p[k]$ sunt coeficienții predictorului liniar de ordin p și σ_w^2 este eroarea pătratică medie minimă de predicție. Dacă matricea de autocorelație

$$\mathbf{\Gamma}_{p+1} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[p-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix}$$

este pozitiv definită, să se arată că pentru $1 \leq m \leq p$, coeficienții de reflexie satisfac relația $|K_m| < 1$.

Soluție

Relația din enunț poate fi scrisă matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[p-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_p[0] \\ a_p[1] \\ \dots \\ a_p[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Din acest sistem de ecuații, rezultă

$$a_p[0] = \frac{\sigma_w^2 \Delta_{\Gamma_p}}{\Delta_{\Gamma_{p+1}}}, \text{ unde } \Delta_{\Gamma_p} \text{ este determinantul matricei } \Gamma_p, \text{ iar}$$

$\Delta_{\Gamma_{p+1}}$, determinantul matricei Γ_{p+1} .

Dar $a_p[0] = 1$, fapt ce conduce la $\sigma_w^2 = \frac{\Delta_{\Gamma_{p+1}}}{\Delta_{\Gamma_p}}$. Cum matricea

de autocorelație este pozitiv definită, ambii determinanți din relația precedentă sunt pozitivi, de unde rezultă că $\sigma_w^2 > 0$. Folosind

recursiv relația (3.83), rezultă $\sigma_w^2 = \prod_{m=1}^p (1 - K_m^2) \gamma_{xx}[0] > 0$, unde K_m

reprezintă coeficienții lattice corespunzători predictorului liniar.

Relația precedentă implică $|K_m| < 1$.