

CAPITOLUL 7

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

Transformata Fourier discretă joacă un rol foarte important în multe aplicații ale prelucrării numerice de semnal, cum ar fi filtrarea liniară, analiza și estimarea spectrală. Motivul esențial al importanței sale rezidă în existența unor algoritmi eficienți de calcul ai acestei transformate.

7.1. Transformata Fourier discretă pentru secvențe de durată finită

Transformata Fourier a unei secvențe $x[n]$ de durată finită L se calculează cu relația

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad 0 \leq \omega < 2\pi \quad (7.1)$$

Se presupune că $x[n] = 0$ în afara domeniului $0 \leq n \leq L-1$. Dacă se eșantionează $X(\omega)$ la frecvențele $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, unde

$N \geq L$, eșantioanele rezultate sunt

$$X[k] = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.2)$$

Limita superioară a sumei s-a considerat $N-1$, deoarece $x[n] = 0$ pentru $n \geq L$.

Relația (7.2) este cunoscută sub denumirea de *transformata Fourier discretă* (DFT) a semnalului $x[n]$.

$$\text{Relația} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.3)$$

definește *transformată Fourier discretă inversă* (IDFT) și permite refacerea semnalului $x[n]$ din eșantioanele spectrului. Dacă $L < N$, IDFT în N puncte va determina $x[n] = 0$ pentru $L \leq n \leq N-1$.

Transformata Fourier discretă este definită pe o submulțime a mulțimii numerelor întregi cu valori în mulțimea numerelor complexe.

$$X[k] = |X[k]| e^{j\angle X[k]} \quad (7.4)$$

unde $|X[k]|$ reprezintă modulul transformatei Fourier discrete, iar $\angle X[k]$, faza sa. Relațiile (7.2) și (7.4) pot fi considerate ca transformări liniare ale secvențelor $x[n]$, respectiv, $X[k]$.

Se definesc vectorii coloană

$$x_N = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

și matricea

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (7.6)$$

unde $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ este o rădăcină de ordin N a unității, numită *nucleul transformatei Fourier discrete*.

Cu aceste definiții, DFT în N puncte se exprimă în formă matriceală

$$X_N = W_N \cdot x_N \quad (7.7)$$

unde W_N este *matricea transformării liniare*.

Se observă că W_N este simetrică. Presupunând că W_N admite inversă, se poate scrie

$$x_N = W_N^{-1} X_N \quad (7.8)$$

care este IDFT.

Cu (7.5) și (7.6), relația (7.3) poate fi scrisă compact sub forma

$$x_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N \quad (7.9)$$

unde W_N^* este conjugata lui W_N . Comparând (7.9) cu (7.8) rezultă

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^* \quad (7.10)$$

care implică

$$W_N \cdot W_N^* = N \cdot I_N \quad (7.11)$$

unde I_N este matricea unitate de ordin N . Prin urmare, matricea W_N din transformare este ortogonală și, mai mult, inversa sa există și este $\frac{W_N^*}{N}$.

Se observă că pentru calculul DFT, în fiecare punct sunt necesare N multiplicări complexe și $(N-1)$ adunări complexe, astfel încât pentru calculul DFT în N puncte sunt necesare N^2 multiplicări complexe și $N(N-1)$ adunări complexe. Datorită proprietăților de simetrie și periodicitate ale DFT s-au putut dezvolta algoritmi rapizi de calcul, cunoscuți ca algoritmi pentru transformata Fourier rapidă (FFT, Fast Fourier Transform) utilizați în calculul DFT și IDFT. Din acest motiv DFT și IDFT joacă un rol foarte important în procesarea digitală de semnal, cum ar fi analiza de frecvență, estimarea spectrală și filtrarea liniară.

7.1.1. Câteva proprietăți ale DFT

- 1) **Periodicitatea** Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[n+N] = x[n], \quad \forall n \in Z \quad (7.12)$$

și

$$X[k+N] = X[k], \quad \forall k \in Z \quad (7.12')$$

- 2) **Liniaritatea** Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$\sum_j a_j x_j[n] \xrightarrow{\text{DFT în } N \text{ puncte}} \sum_j X_j[k] \quad (7.13)$$

Această proprietate decurge direct din definiția transformatei Fourier discrete directe.

3) Deplasarea și simetria circulară în timp

Datorită proprietății de periodicitate, transformata Fourier discretă în N puncte a unei secvențe $x[n]$, de durată finită, $L \leq N$, este echivalentă cu transformata Fourier discretă în N puncte a unei secvențe periodice $x_p[n]$, de perioadă N , obținută prin repetarea periodică a lui $x[n]$

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \quad (7.14)$$

Prin deplasarea lui $x_p[n]$ cu k unități spre dreapta ($k>0$), se obține secvența periodică

$$x_p'[n] = x_p[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-k-mN], k>0 \quad (7.15)$$

Secvența aperiodică de lungime finită

$$x'[n] = \begin{cases} x_p'[n], & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (7.16)$$

se obține din secvența originală $x[n]$ prin deplasare circulară. Relația între cele două secvențe este ilustrată în figura 7.1 pentru $N=4$ și $k=2$.

Deplasarea circulară cu k unități a unei secvențe poate fi reprezentată cu indexul modulo N

$$x'[n] = x[(n-k) \text{ modulo } N] = x[(n-k)_N] \quad (7.17)$$

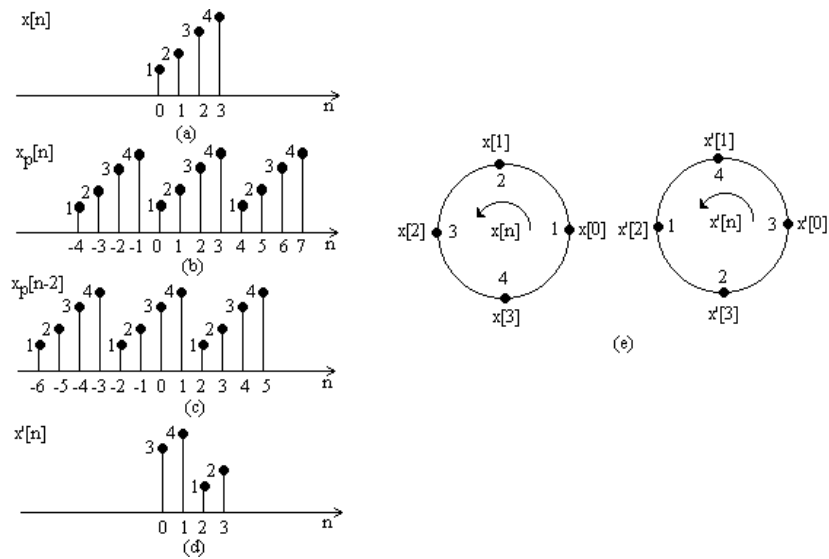


Figura 7.1. Deplasarea circulară a unei secvențe de lungime $N=4$. (a) secvența aperiodică $x[n]$, (b) repetarea periodică a secvenței $x[n]$, (c) deplasarea cu două unități spre dreapta a secvenței $x_p[n]$, (d) deplasarea circulară cu două unități spre dreapta a secvenței aperiodice $x[n]$, (e) deplasarea circulară ilustrată prin plasarea eșantioanelor secvenței pe circumferința unui cerc.

Pentru exemplul considerat,

$x'[0] = x[-2, (\text{mod } 4)] = x[2]$, $x'[1] = x[-1, (\text{mod } 4)] = x[3]$,
 $x'[2] = x[0, (\text{mod } 4)] = x[0]$, $x'[3] = x[1, (\text{mod } 4)] = x[1]$. Se observă că
 $x'[n]$ este chiar $x[n]$ deplasat circular cu două unități de timp, unde
 sensul trigonometric a fost ales arbitrar drept direcția pozitivă de
 deplasare. Deplasarea circulară a unei secvențe de lungime N este
 echivalentă cu deplasarea liniară a extensiei sale periodice, obținute prin
 repetarea periodică, cu perioada N , a secvenței $x[n]$, și invers.
 Periodicitatea ce rezultă din aranjarea celor N puncte ale secvenței pe
 circumferința unui cerc determină definiții echivalente ale simetriei pare,
 impare și refectării în timp a unei secvențe.

O secvență de lungime N este *circular pară* dacă este simetrică față de punctul 0 de pe cerc, adică $x[N - n] = x[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$.

O secvență de lungime N este *circular impară* dacă este antisimetrică față de punctul 0 de pe cerc, adică $x[N - n] = -x[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$.

Reflectarea sau inversarea în timp se realizează prin reflectarea eșantioanelor față de punctul 0.

$$x[(-n)_N] = x[N - n], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (7.18)$$

4) Multiplicarea a două DFT și convoluția circulară Se presupun două secvențe de durată finită N , $x_1[n]$ și $x_2[n]$ ale căror transformate Fourier discrete sunt

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (7.19)$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (7.20)$$

Prin multiplicarea lor se obține o secvență $X_3[k]$, al cărei original este o secvență $x_3[n]$, tot de lungime N . În continuare, se va stabili o relație între $x_1[n]$, $x_2[n]$ și $x_3[n]$.

$$X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k], \quad k = \overline{0, N-1} \quad (7.21)$$

Aplicând IDFT relației (7.21), se obține

$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3[k] e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] X_2[k] e^{j2\pi km/N} \quad (7.22)$$

Înlocuind (7.19) și (7.20) în (7.22), rezultă

$$\begin{aligned}
x_3[m] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi kn/N} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] e^{-j2\pi kl/N} \right] e^{j2\pi km/N} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} \right]
\end{aligned} \tag{7.23}$$

În evaluarea relației (7.23) se folosește formula

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & \text{dacă } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & \text{dacă } a \neq 1. \end{cases} \tag{7.24}$$

Dacă se notează $e^{j2\pi k(m-n-l)/N} = a$ (7.25) se observă că $a = 1$ când $m-n-l$ este multiplu de N și $a^N = 1$. Rezultă atunci

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} = \begin{cases} N, & \text{pentru } l = m-n + pN = ((m-n)_N) \quad p - \text{întreg} \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{7.26}$$

Înlocuind (7.26) în (7.23), se obține

$$x_3[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2((m-n)_N), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \tag{7.27}$$

Relația (7.27) este o sumă de convoluție, numită *convoluție circulară*, datorită indexului $(m-n)_N$. Convoluția circulară a două secvențe de lungime N se mai notează cu \textcircled{N}

5) Translația circulară în timp a unei secvențe

Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[(n-m)_N] \xrightarrow{\text{DFT în } N \text{ puncte}} e^{-j2\pi km/N} X[k] \tag{7.28}$$

Demonstrație

$$\begin{aligned}
\text{DFT}\{x[(n-m)_N]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x[(n-m)_N] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{m-1} x[(n-m)_N] e^{-j2\pi kn/N} + \\
&+ \sum_{n=m}^{N-1} x[(n-m)_N] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{p=-m}^{-1} x[p] e^{-j2\pi k(m+p)/N} + \sum_{p=0}^{N-m-1} x[p] e^{-j2\pi k(m+p)/N} = \\
&= e^{-j2\pi km/N} \left[\sum_{p=N-m}^{N-1} x[p] e^{-j2\pi kp/N} + \sum_{p=0}^{N-m-1} x[p] e^{-j2\pi kp/N} \right] = e^{-j2\pi km/N} X[k]
\end{aligned}$$

6) Translația circulară în frecvență a unei secvențe

Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[n] e^{j2\pi nm/N} \xrightarrow{\text{DFT în } N \text{ puncte}} X[(k-m)_N] \tag{7.29}$$

Demonstrație

$$DFT\{x[n]e^{j2\pi mn/N}\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j2\pi mn/N} e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k-m)n/N} = X[(k-m)_N]$$

7) Inversarea circulară în timp a unei secvențe Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[-n] = x[N-n] \xrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} X[(-k)_N] = X[N-k] \quad (7.30)$$

Demonstrație

$$DFT\{x[N-n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[N-n]e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{m=N}^1 x[m]e^{-j2\pi k(N-m)/N} = \sum_{m=1}^N x[m]e^{-j2\pi k(N-m)/N}$$

dar $e^{-j2\pi k(N-m)/N} = e^{-j2\pi k(-m)/N} = e^{-j2\pi m(-k)/N} = e^{-j2\pi m(N-k)/N}$, astfel încât

$$DFT\{x[N-n]\} = \sum_{m=1}^N x[m]e^{-j2\pi k(N-m)/N} = X[N-k]$$

8) Conjugarea complexă Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x^*[n] \xrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} X^*[(-k)_N] = X^*[N-k] \quad (7.31)$$

Demonstrație

$$DFT\{x^*[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]e^{-j2\pi kn/N} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j2\pi kn/N} \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(N-k)n/N} \right)^* = X^*[(-k)_N]$$

9) Convoluția circulară Dacă $x_1[n]$ și $X_1[k]$, $x_2[n]$ și $X_2[k]$, sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \xrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} X_1[k]X_2[k] \quad (7.32)$$

Demonstrația acestei proprietăți a fost dată în paragraful 4.2.3, la proprietățile seriei Fourier discrete.

10) Proprietăți de simetrie Proprietățile de simetrie se obțin aplicând metodologia folosită în paragraful 4.2.9. Dacă un semnal prezintă proprietăți de simetrie în domeniul timp, este posibilă deducerea unor caracteristici ale semnalului în domeniul frecvență.

Secvența $x[n]$ și transformata sa Fourier discretă $X[k]$ se presupun complexe, adică

$$x[n] = x_R[n] + jx_I[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.33)$$

$$X[k] = X_R[k] + jX_I[k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.34)$$

unde indicii R și I specifică partea reală, respectiv imaginară.

înlocuind (7.33) și $e^{-j2\pi kn/N} = \cos 2\pi kn/N - j \sin 2\pi kn/N$ în expresia DFT dată de (7.2) și separând părțile reale și imaginare, se obține

$$X_R[k] = \sum_{n=0}^{N-1} [x_R[n] \cos 2\pi kn/N + x_I[n] \sin 2\pi kn/N] \quad (7.35)$$

$$X_I[k] = -\sum_{n=0}^{N-1} [x_R[k] \sin 2\pi kn/N - x_I[n] \cos 2\pi kn/N] \quad (7.36)$$

Similar, înlocuind (7.34) în expresia IDFT dată de (7.3), se obține

$$x_R[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_R[k] \cos 2\pi kn/N - X_I[k] \sin 2\pi kn/N] \quad (7.37)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_R[k] \sin 2\pi kn/N + X_I[k] \cos 2\pi kn/N] \quad (7.38)$$

În continuare, se vor considera câteva cazuri particulare:

a) Secvențe cu valori reale Dacă $x[n]$ este real, din (7.2) rezultă

$$X[N-k] = X^*[k] = X[-k] \quad (7.39)$$

În consecință, $|X[N-k]| = |X[k]|$ și $\angle X[N-k] = -\angle X[k]$. Deoarece $x_I[n] = 0$, $x_R[n] = x[n]$, (7.37) fiind o altă formă pentru IDFT.

b) Secvențe reale pare Dacă $x[n]$ este real și par, adică $x[N-n] = x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, din (7.36) rezultă $X_I[k] = 0$ și DFT se reduce la relația

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos 2\pi kn/N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.40)$$

care este reală și pară. IDFT se reduce la

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cos 2\pi kn/N, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.41)$$

c) Secvențe reale impare Dacă $x[n]$ este real și impar, adică $x[n] = -x[N-n]$, $0 \leq n \leq N-1$, din (7.35) rezultă $X_R[k] = 0$ și DFT devine

$$X[k] = -j \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin 2\pi kn/N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.42)$$

care este pur imaginară și impară. IDFT se reduce la forma

$$x[n] = j \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sin 2\pi kn/N, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.43)$$

d) Secvențe pur imaginare În acest caz $x[n] = jx_I[n]$ și relațiile (7.35) și (7.36) devin

$$X_R[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_I[n] \sin 2\pi kn / N \quad (7.44)$$

$$X_I[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_I[n] \cos 2\pi kn / N \quad (4.45)$$

Se observă că $X_R[k]$ este funcție pară și $X_I[k]$ impară. Dacă $x_I[n]$ este impar, atunci $X_I[k]=0$ și $X[k]$ este real. Dacă $x_I[n]$ este par, atunci $X_R[k]=0$ și $X[k]$ este pur imaginar.

Exemplul 7.1.

Să se efectueze convoluția circulară a secvențelor

$$x_1[n] = \{2, 1, 2, 1\} \text{ și } x_2[n] = \{1, 2, 3, 4\}$$

Soluție. Convoluția circulară poate fi efectuată grafic, plasând eșantioanele secvențelor

pe un cerc. Înlocuind $N=4$ în (7.27) și ținând cont de figura 7.2 rezultă

$$x_3[0]=14, \quad x_3[1]=16, \quad x_3[2]=14, \quad x_3[3]=16, \text{ adică}$$

$$x_3[n] = \{14, 16, 14, 16\}.$$

Din exemplul considerat se observă că și convoluția circulară implică aceleași operații ca și cea liniară: reflectarea unei secvențe, deplasarea, multiplicarea și în final sumarea produselor. Diferența față de convoluția liniară constă în faptul că reflectarea și deplasarea se efectuează circular, prin calcularea indexului uneia din secvențe modulo N .

Convoluția circulară este comutativă, deci oricare din secvențe poate fi reflectată și deplasată modulo N față de cealaltă, fără modificarea rezultatului.

Exemplul 7.2.

Să se determine convoluția circulară $x_3[n] = x_1[n] \textcircled{4} x_2[n]$ din exemplul precedent, cu ajutorul DFT și IDFT.

Soluție.

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^3 x_1[n] e^{-j2\pi kn/4} = 2 + e^{-j\pi k/2} + 2 \cdot e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$X_1[0] = 6; \quad X_1[1] = 0; \quad X_1[2] = 2; \quad X_1[3] = 0.$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^3 x_2[n] e^{-j2\pi kn/4} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 3 \cdot e^{-j\pi k} + 4 \cdot e^{-j3\pi k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$X_2[0] = 10; \quad X_2[1] = -2 + j \cdot 2; \quad X_2[2] = -2; \quad X_2[3] = -2 - j \cdot 2.$$

$$X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k],$$

$$X_3[0] = 60; \quad X_3[1] = 0; \quad X_3[2] = -4; \quad X_3[3] = 0.$$

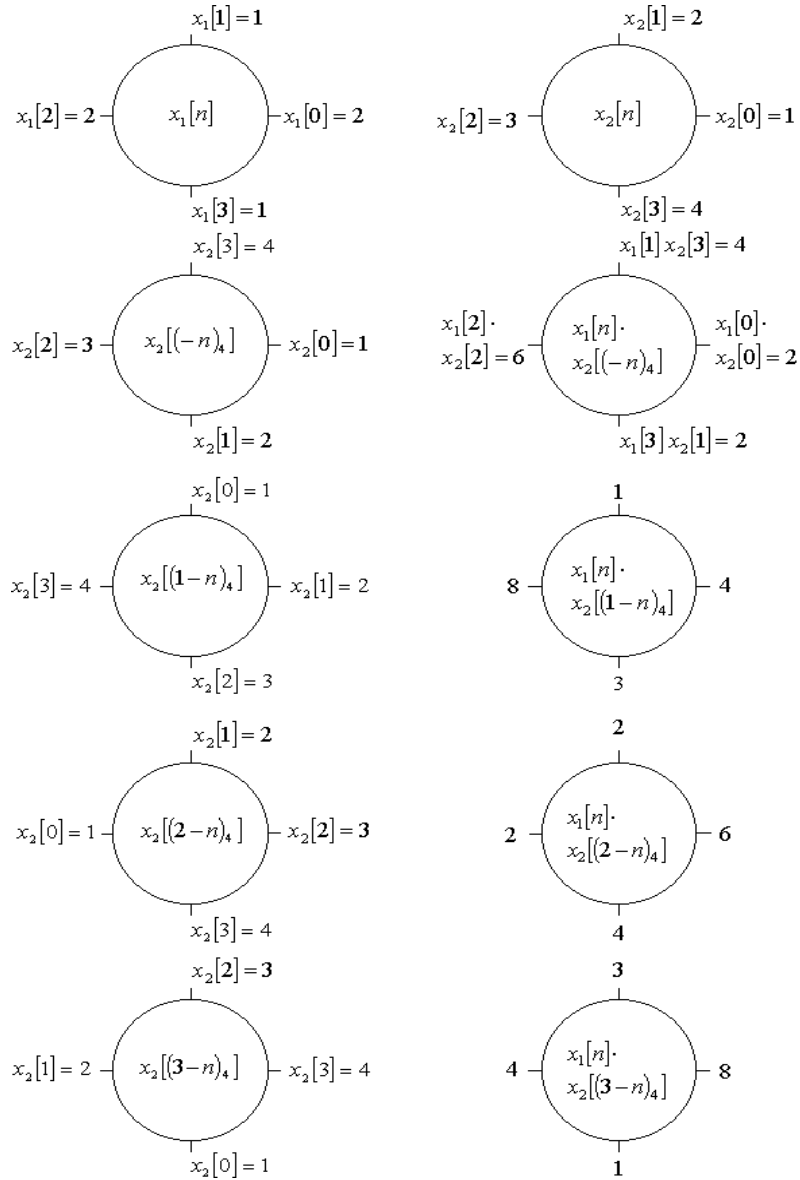


Figura 7.2 Convoluția circulară calculată grafic

$$x_3[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_3[k] e^{j2\pi kn/4} = \frac{1}{4} (60 - 4 \cdot e^{j\pi n}); \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

$$x_3[0] = 14; \quad x_3[1] = 16; \quad x_3[2] = 14; \quad x_3[3] = 16 \text{ sau}$$

$$x_3[n] = \{14, 16, 14, 16\}, \text{ așa cum era de așteptat.}$$

↑

7.2. Relațiile transformatei Fourier discrete cu alte transformate

Transformata Fourier discretă (DFT) și inversa sa (IDFT) reprezintă mijloace importante utilizate în diverse aplicații de prelucrarea numerică a semnalelor. Importanța lor este dată și de multitudinea de algoritmi eficienți de calcul, cunoscuți sub numele de transformate Fourier rapide. Prin urmare, este important a se stabili relațiile care există între transformata Fourier discretă și celelalte modalități de prelucrare a semnalelor numerice.

7.2.1. Relația dintre transformata Fourier discretă și seria Fourier a unei secvențe periodice

Pentru comoditate se reamintesc relațiile pentru DFT și IDFT, și anume

$$\text{DFT: } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.46)$$

$$\text{IDFT: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.47)$$

Un semnal periodic $x_p[n]$ de perioadă N poate fi descompus în serie Fourier

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.48)$$

unde coeficienții seriei Fourier sunt dați de relația

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.49)$$

Din compararea relațiilor (7.46) și (7.47) cu (7.48) și (7.49) se observă că relația (7.49) care dă coeficienții seriei Fourier are forma unei

DFT. De fapt, dacă se definește o secvență $x[n]$, identică cu $x_p[n]$ pe o perioadă, DFT a acestei secvențe este

$$X[k] = N c_k \quad (7.50)$$

În plus, (7.48) are forma unei IDFT. Astfel, DFT furnizează o legătură importantă între caracterizarea în domeniul frecvență a secvențelor periodice și secvențelor aperiodice de durată finită. Relațiile anterioare sugerează că DFT poate fi văzută ca fiind spectrul discret al semnalului periodic $x_p[n]$. Într-o astfel de interpretare, o secvență de durată finită $x[n]$ de lungime N este văzută ca o singură perioadă a unei secvențe periodice

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \quad (7.51)$$

Spectrul discret al semnalului $x_p[n]$ este

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi kn/N} = N c_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.52)$$

și IDFT devine

$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.53)$$

7.2.2. Relația dintre transformata Fourier discretă și transformata Fourier a unei secvențe aperiodice

Fie $x[n]$ o secvență aperiodică, de energie finită, cu transformata Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (7.54)$$

Aceasta este eșantionată în N puncte echidistante din întreg intervalul fundamental de pe axa frecvenței $\omega \in [-\pi, \pi]$, obținându-se eșantioanele spectrului

$$X[k] \equiv X(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.55)$$

Componentele spectrale $X[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, sunt chiar coeficienții transformatei Fourier discrete ai secvenței periodice $x_p[n]$ obținute prin repetarea periodică a lui $x[n]$, cu perioada N , adică (7.51).

Astfel, $x_p[n]$ se obține din toate alias-urile lui $x[n]$ adunate în intervalul de la 0 la $N-1$.

Dacă $x[n]$ este de durată finită și de lungime $L \leq N$, atunci nu există eroare alias în domeniul timp și

$$x[n] = x_p[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.56)$$

În această situație se obține, într-adevăr, $x[n]$ prin aplicarea transformatei Fourier discrete inverse asupra eșantioanelor $X[k]$, unde $k = 0, 1, \dots, N-1$.

7.2.3. Relația dintre transformata Fourier discretă și transformata Z

Fie $x[n]$ o secvență care are transformata Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.57)$$

și regiunea sa de convergență include cercul unitate.

Dacă $X(z)$ este eșantionată în puncte echidistante pe cercul unitate, astfel încât punctele de prelevare sunt $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, atunci

$$X[k] \equiv X(z) \Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.58)$$

Membrul drept al ecuației (7.58) este chiar transformata Fourier $X(\omega)$ evaluată la cele N frecvențe echidistante din intervalul fundamental.

Prin urmare, dacă $x[n]$ are o durată N sau mai mică, atunci secvența poate fi reconstituită cu ajutorul DFT în N puncte. În această situație favorabilă se poate determina în mod unic și transformata sa Z, exprimând $x[n]$ cu ajutorul IDFT

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \right] z^{-n} \quad (7.59)$$

Schimbând ordinea de sumare, rezultă

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi kn}{N}} z^{-n} \right] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j \frac{2\pi k}{N}} z^{-1} \right)^n \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j \frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}
\end{aligned} \tag{7.60}$$

Astfel, $X(z)$ devine

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{1 - e^{j \frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \tag{7.61}$$

Prin urmare, dacă secvența $x[n]$ este de durată finită, atunci transformata sa Z poate fi calculată cu ajutorul eșantioanelor transformatei Z evaluate pe cercul unitate. O formulă analogă se poate obține și pentru transformata Fourier discretă, prin evaluarea transformatei Z pe cercul unitate

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{1 - e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}} \tag{7.62}$$

Egalitățile (7.61) și (7.62) sunt formule de interpolare de tip Lagrange și ele exprimă pe $X(\omega)$ în funcție de eșantioanele $X[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, egal distanțate în frecvență.

7.2.4. Relația dintre transformata Fourier discretă și coeficienții seriei Fourier a unui semnal analogic periodic

Fie $x_a(t)$ un semnal periodic definit în timp continuu. Dacă $T_p = \frac{1}{F_0}$ este perioada sa, atunci semnalul se descompune în serie Fourier

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}, \tag{7.63}$$

unde

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_a(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \tag{7.64}$$

sunt coeficienții seriei Fourier.

Eșantionând $x_a(t)$ cu o frecvență de eșantionare F_s de N ori mai mare decât fundamentală semnalului periodic

$$F_s = \frac{N}{T_p} = \frac{1}{T} \quad (7.65)$$

se obține semnalul discret

$$x[n] \equiv x_a(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 n T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \quad (7.66)$$

Dar

$$e^{j\frac{2\pi}{N} kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k-mN)n}, \quad (7.67)$$

pentru orice $m \in \mathbf{Z}$.

Relația (7.66) poate fi descompusă într-o sumă infinită de sume de câte N termeni

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} = \dots + \sum_{k=-2N}^{-N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=N}^{2N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \\ &+ \sum_{k=2N}^{3N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \dots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=mN}^{mN+N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=mN}^{mN+N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} n(k-mN)} \right] \end{aligned} \quad (7.68)$$

În membrul drept al ultimei egalități se face schimbarea de variabilă $k - mN = p$, apoi se schimbă ordinea de sumare și, în final, se revine la indicele k . Rezultă astfel

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{N-1} c_{p+mN} e^{j\frac{2\pi}{N}(p+mN)n} \right] = \sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{p+mN} \right] e^{j\frac{2\pi}{N} pn} = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{p+mN} \right] e^{j\frac{2\pi}{N} pn} = \sum_{k=0}^{N-1} c'_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned} \quad (7.69)$$

unde

$$c'_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k-mN} \quad (7.70)$$

este spectrul obținut prin repetarea periodică a spectrului c_k la fiecare N eșantioane, adică este chiar o secvență alias a spectrului c_k .

Pe de altă parte

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.71)$$

În consecință, aplicând transformata Fourier inversă se obține

$$X[k] = N \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k-mN} = N c'_k, \quad (7.72)$$

altfel spus, transformata Fourier discretă furnizează liniile spectrale ale spectrului, afectate însă de efectul alias.

7.2.5. Relația dintre transformata Fourier discretă și transformata Fourier a unui semnal analogic aperiodic

Se consideră un semnal aperiodic $x_a(t)$, de energie finită, a cărui transformată Fourier este $X_a(F)$. Prin eșantionarea sa cu frecvența de eșantionare F_s , se obține semnalul discret

$$x[n] \equiv x_a(nT), \quad (7.73)$$

a cărui transformată Fourier este

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(F - mF_s) \quad (7.74)$$

sau, echivalent

$$X(f) = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a((f - m)F_s); \quad (7.75)$$

$$X(\omega) = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a((\omega - 2\pi m)F_s) \quad (7.75')$$

Inevitabil, apar efecte alias care pot fi reduse prin prefiltrarea semnalului analogic înainte de eșantionare sau prin eșantionarea cu o frecvență mai înaltă. Dacă spectrul $X(\omega)$ este la rândul său eșantionat la N intervale de frecvență egal distanțate

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.76)$$

atunci

$$\begin{aligned} X[k] &\equiv X(\omega) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}} = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(\left(\frac{2\pi k}{N} - 2\pi m\right)F_s\right) = \\ &= F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(\left(\frac{kF_s}{N} - mF_s\right)\right), \end{aligned} \quad (7.77)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Prin urmare, eșantioanele $\{X[k]\}_{k=0,1,\dots,N-1}$ pot fi văzute ca DFT a unei secvențe periodice $x_p[n]$, date de

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(nT - mNT) \quad (7.78)$$

Din relațiile anterioare rezultă că legătura dintre semnalul în timp discret obținut prin eșantionarea unui semnal analogic $x_a(t)$ cu frecvența de eșantionare F_s și spectrul corespunzător eșantionat cu $\frac{F_s}{N}$ este o transformată Fourier discretă în N puncta

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(nT - mNT) \xleftrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(\left(\frac{kF_s}{N} - mF_s\right)\right) \quad (7.79)$$

Această pereche DFT indică prezența efectelor alias atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență. De asemenea, sugerează eventualele dificultăți ce pot apărea când se dorește calcularea spectrului unui semnal analogic cu ajutorul transformatei Fourier discrete, în funcție de alegerea mărimilor F_s și N .

7.3. Metode de filtrare liniară bazate pe DFT

În paragraful 7.1 s-a definit transformata Fourier discretă ca versiunea eșantionată a transformatei Fourier $X(\omega)$ pentru secvența de durată finită $x[n]$. Eșantionarea a fost realizată în N frecvențe egal distanțate $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, rezultând

$$X[k] \equiv X(\omega) \Big|_{\omega_k = 2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.80)$$

Pentru secvența $x[n]$ s-a obținut transformata Fourier discretă

$$\text{DFT:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.81)$$

din care se reface secvența $x[n]$ cu ajutorul transformatei Fourier discrete inverse

$$\text{IDFT:} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.82)$$

Deoarece DFT furnizează o reprezentare discretă în domeniul frecvență a unei secvențe de durată finită, datorită proprietăților sale, ea este folosită ca un instrument de calcul în analiza sistemelor liniare și, în special, în filtrarea liniară.

S-a arătat că, dacă la intrarea unui sistem liniar al cărui răspuns în frecvență este $H(\omega)$ se aplică un semnal al cărui spectru este $X(\omega)$, el produce o ieșire cu spectrul

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \quad (7.83)$$

din care, cu transformata Fourier inversă, se obține

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (7.84)$$

În această abordare a aflării răspunsului intervin funcții continue de ω . În consecință, aceste calcule nu pot fi realizate cu ajutorul unui calculator numeric, însă, datorită caracterului discret al DFT, această problemă poate fi surmontată. În multe aplicații se urmărește obținerea convoluției liniare a două secvențe, adică se dorește implementarea unui SDLIT care realizează operația de filtrare liniară a secvenței de intrare. Pentru a obține convoluția liniară a celor două secvențe cu ajutorul DFT, trebuie stabilite condițiile în care convoluția circulară produce același rezultat ca și cea liniară. Odată stabilite aceste condiții, implementarea convoluției liniare a două secvențe $x[n]$ și $h[n]$ cu ajutorul DFT se realizează parcurgând următorii pași:

- 1) Se calculează DFT în N puncte $X[k]$ și $H[k]$ pentru cele două secvențe;
- 2) Se calculează produsul $Y[k] = X[k]H[k]$; $0 \leq k \leq N-1$;
- 3) Se calculează $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ ca IDFT a lui $Y[k]$, în N puncte.

7.3.1. Folosirea DFT în filtrarea liniară

În paragraful 7.1 s-a arătat că produsul a două DFT este echivalent cu convoluția circulară a secvențelor corespunzătoare din domeniul timp. Aceasta va fi egală cu convoluția liniară a celor două secvențe de lungime finită, în funcție de relația dintre numărul de puncte în care s-a calculat DFT și lungimile celor două secvențe.

Se presupune că secvența de intrare $x[n]$ este de lungime finită, L , și se aplică unui filtru FIR de lungime M , adică

$$\begin{aligned} x[n] &= 0 \quad \text{pentru } n < 0, n \geq L \\ h[n] &= 0 \quad \text{pentru } n < 0, n \geq M \end{aligned} \quad (7.85)$$

unde $h[n]$ este răspunsul la impuls al filtrului. Ieșirea filtrului, $y[n]$, poate fi determinată în domeniul timp cu ajutorul sumei de convoluție

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k] \quad (7.86)$$

Deoarece $h[n]$ și $y[n]$ sunt de durată finită, convoluția lor va fi, de asemenea, o secvență de durată finită, de lungime $L + M - 1$, produsul $h[k]x[n-k]$ fiind egal cu zero pentru toți k , dacă $n < 0$ și $n > M + L - 2$.

Răspunsul în frecvență echivalent relației (7.86) este

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad (7.87)$$

$$\text{Dacă } Y[k] = Y(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(\omega) \cdot H(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.88)$$

$$\text{Atunci} \quad Y[k] = X[k] \cdot H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.89)$$

unde $\{X[k]\}$ și $\{H[k]\}$ sunt transformatele Fourier discrete ale secvențelor $x[n]$, respectiv, $h[n]$. În paragraful 6.4 s-a arătat că dacă transformată Fourier $Y(\omega)$ a unui semnal discret aperiodic este eșantionată în N puncte echidistante în intervalul fundamental, secvența rezultată reprezintă coeficienții seriei Fourier discrete a semnalului periodic

$$y_p[n] = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n-mN], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (7.90)$$

Din (7.89) rezultă

$$y_p[n] = x[n] \otimes h[n] \quad (7.91)$$

Conform relației (7.90), se observă cum convoluția circulară a două secvențe de lungime finită este echivalentă cu convoluția liniară a secvențelor în condiții de suprapunere a eșantioanelor (eroare alias) în domeniul timp, datorită periodicității. De notat că dacă N este mai mare decât L și M , $X[k]$ și $H[k]$ reprezintă exact pe $x[n]$ și $h[n]$, în schimb $y_p[n]$ va fi egal cu $y[n]$ pentru toți n , numai dacă N este mai mare sau egal cu lungimea secvenței $y[n]$, adică $L+M-1$.

Dacă secvența $y[n]$ poate fi reprezentată unic în domeniul frecvență prin eșantionarea spectrului $Y(\omega)$ într-un set de frecvențe discrete, numărul eșantioanelor distincte trebuie să fie egal sau să depășească $L+M-1$. Așadar, pentru a reprezenta $y[n]$ în domeniul frecvență, este necesar ca DFT să fie de dimensiune $N \geq L+M-1$.

Deoarece secvențele $x[n]$ și $h[n]$ au durata mai mică decât N , ele se completează cu eșantioane egale cu zero până la N . Această creștere a lungimii secvențelor nu modifică spectrele $X(\omega)$ și $H(\omega)$, care sunt continue pentru secvențe aperiodice. Prin eșantionarea spectrului în N puncte echidistante, s-a crescut numărul de eșantioane ce reprezintă secvențele în domeniul frecvență față de numărul minim L sau M .

Deoarece numărul $N = L+M-1$ în care se calculează transformata Fourier discretă a ieșirii este suficient pentru a reprezenta $y[n]$ în domeniul frecvență, rezultă că multiplicarea, conform relației

(7.89), a transformatelor Fourier discrete $X[k]$ și $H[k]$, calculate în N puncte, urmată de transformata Fourier discretă inversă trebuie să aibă drept rezultat secvența $y[n]$. Acest lucru implică echivalența dintre convoluția circulară în N puncte a secvențelor $x[n]$ și $h[n]$ și convoluția liniară a secvențelor $x[n]$ și $h[n]$.

Cu alte cuvinte, crescând lungimile secvențelor $x[n]$ și $h[n]$ la N puncte (prin completarea cu zerouri), efectuând convoluția circulară a secvențelor rezultate, și apoi transformarea inversă, se obține același rezultat ca în cazul convoluției liniare. În aceste condiții, transformata Fourier discretă poate fi folosită în realizarea filtrării liniare.

Exemplul 7.3.

Folosind DFT și IDFT să se determine răspunsul filtrului FIR, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n] = \{1, 2, 3\}$ la intrarea $x[n] = \{1, 2, 2, 1\}$.

Soluție. $L = 4$, $M = 3$. Convoluția liniară conduce la o secvență de lungime $N = L + M - 1 = 6$, ceea ce înseamnă că mărimea DFT-urilor trebuie să fie de cel puțin 6. În practică, metodele numerice folosite în calculul DFT impun ca N să fie o putere întreagă a lui 2 (cerința impusă de algoritmi FFT de calcul ai DFT). Cea mai mică putere întreagă a lui 2 mai mare sau egală cu 6 este $N = 8$.

$$X[k] = \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-j2\pi kn/8} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/4} + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + e^{-j3\pi k/4}, \quad k = \overline{0,7}$$

de unde

$$X[0] = 6; \quad X[1] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - j \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}; \quad X[2] = -1 - j;$$

$$X[3] = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - j \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}$$

$$X[4] = 0; \quad X[5] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - j \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}; \quad X[6] = -1 + j;$$

$$X[7] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} + j \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

pentru $H[k]$ se obține

$$H[k] = \sum_{n=0}^7 h[n] e^{-j2\pi kn/8} = 1 + 2e^{-j\pi k/4} + 3e^{-j\pi k/2}$$

de unde

$$\begin{aligned} H[0] &= 6; & H[1] &= 1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2}); & H[2] &= -2 - j2; \\ H[3] &= 1 - \sqrt{2} + j(3 - \sqrt{2}) \\ H[4] &= 2; & H[5] &= 1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2}); & H[6] &= -2 + j2; \\ H[7] &= 1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Efectuând produsul $Y[k] = H[k]X[k]$, rezultă

$$\begin{aligned} Y[0] &= 36; & Y[1] &= -14,07 - j17,48; & Y[2] &= j4; & Y[3] &= 0,07 + j0,515 \\ Y[4] &= 0; & Y[5] &= 0,07 - j0,515; & Y[6] &= -j4; & Y[7] &= -14,07 + j17,48 \end{aligned}$$

Cu ajutorul IDFT, se obține

$$y[n] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 Y[k] e^{j2\pi kn/8}, \quad n = \overline{0,7}$$

adică, $y[n] = \{1, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$.

Deși multiplicarea a două DFT corespunde convoluției circulare în domeniul timp, se observă că prin completarea secvențelor $x[n]$ și $h[n]$ cu un număr suficient de zerouri, convoluția circulară conduce la același rezultat ca și convoluția liniară.

Dacă în exemplul anterior se efectuează convoluția circulară dintre

$$h[n] = \{1, 2, 3, 0, 0, 0\} \quad \text{și}$$

$$x[n] = \{1, 2, 2, 1, 0, 0\}$$

se obține $y[n] = \sum_{k=0}^5 h[k]x[(n-k)_{\text{mod } 6}]$

adică, $y[n] = \{1, 4, 9, 11, 8, 3\}$.

Dacă $N \geq L + M - 1$, nu apare suprapunere (eroare alias) în domeniul timp, în caz contrar, secvența rezultată va conține suprapuneri ale unor componente.

Exemplul 7.4.

Să se repete exemplul 1, pentru $N=4$.

$$H[k] = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j2\pi kn/4} = 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 3e^{-j\pi k}, \quad k = \overline{0,3}$$

de unde

$$H[0] = 6; \quad H[1] = -2 - j2; \quad H[2] = 2; \quad H[3] = -2 + j2.$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/4} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 2 \cdot e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}$$

$$X[0] = 6; \quad X[1] = -1 - j; \quad X[2] = 0; \quad X[3] = -1 + j.$$

$\hat{Y}[k] = X[k]H[k]$, de unde

$$\hat{Y}[0] = 36; \hat{Y}[1] = j4; \hat{Y}[2] = 0; \hat{Y}[3] = -j4$$

Aplicând IDFT, se obține

$$\hat{y}[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \hat{Y}[k] e^{j2\pi kn/4} = \frac{1}{4} (36 + j4e^{j\pi n/2} - j4e^{j3\pi n/2})$$

adică, $\hat{y}[n] = \{9, 7, 9, 11\}$.

Se verifică faptul că $h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=0}^3 h[k]x[(n-k)_{\text{mod}4}] = \{9, 7, 9, 11\}$.

Dacă se compară rezultatul $\hat{y}[n]$ obținut prin folosirea DFT și IDFT în 4 puncte cu $y[n]$ obținut prin folosirea DFT și IDFT în 8 puncte se observă diferențe datorită suprapunerilor sau interferenței componentelor.

$$\hat{y}[0] = y[0] + y[4] = 9$$

$$\hat{y}[1] = y[1] + y[5] = 7$$

$$\hat{y}[2] = y[2] = 9$$

$$\hat{y}[3] = y[3] = 11$$

Se observă că numai primele două componente sunt afectate de eroare alias, adică $\min\{L, M\} - 1$ componente.

7.3.2. Filtrarea secvențelor lungi de date

În paragraful precedent s-a prezentat procedura de obținere a răspunsului unui sistem cu răspuns finit la impuls la o intrare de lungime finită, adică a convoluției liniare cu ajutorul DFT. În aplicațiile practice care implică filtrarea liniară, secvențele de intrare $x[n]$ sunt de obicei foarte lungi. Chiar dacă teoretic s-ar putea stoca aceste secvențe, folosirea metodei descrise anterior ar implica calculul DFT într-un număr foarte mare de puncte, ceea ce nu este de obicei practicabil, datorită algoritmilor FFT folosiți în calculul DFT. Un alt motiv pentru care metoda anterioară nu este folosită este acela că prin recepționarea întregii secvențe de intrare se introduc întârzieri mari în răspuns, lucru care, în general, este de evitat. Soluția la aceste probleme este oferită de *convoluția bloc*, în care semnalul ce trebuie prelucrat este împărțit în blocuri de lungime fixă, în funcție de disponibilitățile procesorului. Blocurile succesive sunt prelucrate cu ajutorul DFT, iar ieșirile sunt "alăturate" pentru a forma secvența totală de ieșire.

Există două metode de filtrare liniară a secvențelor lungi, bloc cu bloc, cu ajutorul DFT:

- metoda cu suprapunere și sumare;
- metoda cu suprapunere și salvare.

Pentru ambele metode se presupune că sistemul căruia se aplică datele este cauzal, cu răspuns finit la impuls, de lungime M, iar secvența de intrare cauzală este împărțită în blocuri de lungime L, cu $L \gg M$.

Metoda cu suprapunere și sumare

Secvența de intrare poate fi reprezentată ca o sumă de secvențe, fiecare de lungime L

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \quad (7.92)$$

$$\text{unde } x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (7.93)$$

Deoarece convoluția este o operație liniară, invariantă în timp, rezultă că

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \quad (7.94)$$

$$\text{unde } y_r[n] = x_r[n] * h[n] \quad (7.95)$$

Fiecare din termenii $y_r[n]$ are lungimea (L+M-1), ceea ce înseamnă că, pentru a calcula convoluția liniară $x_r[n] * h[n]$ cu ajutorul DFT în N puncte, este necesar ca $N \geq L + M - 1$. Pentru aceasta, răspunsul la impuls se completează cu L-1 zerouri, iar blocurile de date cu M-1 zerouri, obținându-se

$$x'_1[n] = \{x[0], x[1], x[2], \dots, x[L-1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ zerouri}}\} \quad (7.96)$$

$$x'_2[n] = \{x[L], x[L+1], x[L+2], \dots, x[2L-1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ zerouri}}\} \quad (7.97)$$

$$x'_3[n] = \{x[2L], x[2L+1], x[2L+2], \dots, x[3L-1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ zerouri}}\} \quad (7.98)$$

și așa mai departe. Împărțirea datelor de intrare în blocuri și combinarea blocurilor de date de ieșire este ilustrată în figura 7.3.

Cele două transformate Fourier discrete ale secvențelor $x[n]$ și $h[n]$, completate cu zerouri până la N, se multiplică pentru a forma

$$Y_m[k] = H[k]X'_m[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.99)$$

Transformata Fourier discretă inversă a lui $Y_m[k]$ produce blocul $y_m[n]$ de lungime N, fără eroare alias, deoarece fiecare din secvențe a fost crescută până la N puncte prin adăugarea de zerouri.

Deoarece fiecare bloc de date se termină cu $M-1$ zerouri, ultimele $M-1$ puncte din fiecare bloc de ieșire trebuie suprapuse și sumate cu primele $M-1$ puncte ale blocului următor pentru a obține suma din (7.94), de unde și numele metodei. Secvența de ieșire va fi

$$y[n] = \{y_1[0], y_1[1], \dots, y_1[L-1], y_1[L] + y_2[0], y_1[L+1] + y_2[1], \dots, y_1[N-1] + y_2[M-1], y_2[M], y_2[M+1], \dots\} \quad (7.100)$$

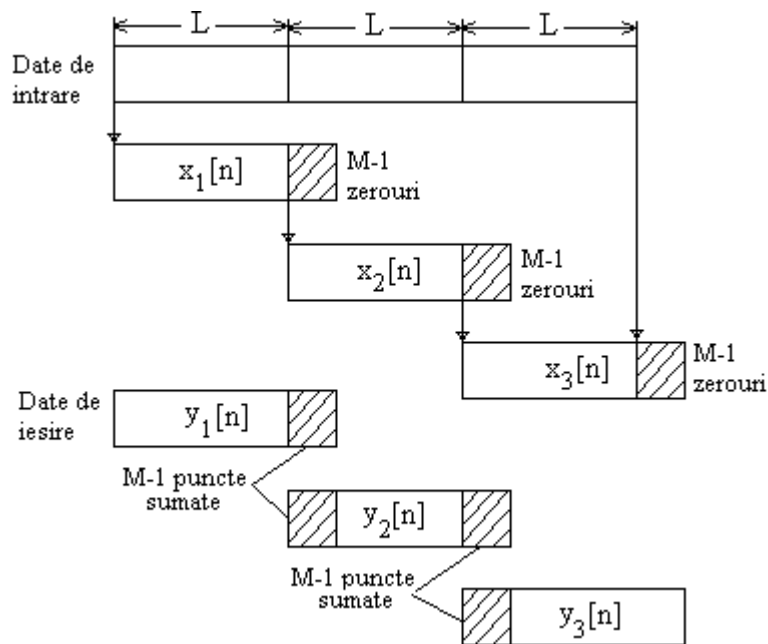


Figura 7.3. Filtrare liniară prin metoda cu suprapunere și sumare

Metoda cu suprapunere și salvare

Și în această metodă DFT și IDFT se calculează în $N = L + M - 1$ puncte. Mărimea blocului de date de intrare se crește până la $N = L + M - 1$. Fiecare bloc de date conține ultimele $M-1$ eșantioane ale blocului precedent de date, urmate de L eșantioane noi de date, pentru a forma secvența de lungime $N=L+M-1$.

Se calculează DFT în N puncte pentru fiecare bloc de date. Răspunsul la impuls al filtrului FIR este crescut în lungime prin adăugarea a $L-1$ zerouri și apoi se calculează DFT, iar secvența obținută este stocată.

Multiplicarea a două DFT în N puncte $\{H[k]\}$ și $\{X_m[k]\}$ pentru blocul "m" de date are ca rezultat

$$\hat{Y}_m[k] = H[k]X_m[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.101)$$

Apoi, prin calcularea IDFT în N puncte, rezultă

$$\hat{y}_m[n] = \{\hat{y}_m[0], \hat{y}_m[1], \dots, \hat{y}_m[M-1], \hat{y}_m[M], \dots, \hat{y}_m[N-1]\} \quad (7.102)$$

Acesta corespunde convoluției circulare a lui $x_m[n]$ și $h[n]$. Deoarece datele au lungimea N, iar răspunsul la impuls, lungimea M, primele $\min\{N, M\} - 1 = M - 1$ puncte $\hat{y}_m[n]$ sunt afectate de eroare alias și nu trebuie considerate. Ultimele L puncte ale lui $\hat{y}_m[n]$ sunt exact cele rezultate din convoluția liniară și, în consecință,

$$\hat{y}_m[n] = y_m[n], \quad \text{pentru } n = M, M+1, \dots, N-1 \quad (7.103)$$

Ultimele M-1 puncte ale fiecărei secvențe de intrare sunt salvate și acestea devin primele M-1 puncte ale secvenței următoare. La începerea procesării, primele M-1 puncte ale primului bloc de date sunt considerate zero. Astfel, blocurile de date sunt de forma

$$x_1[n] = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{M-1 \text{ puncte}}, x[0], x[1], \dots, x[L-1] \quad (7.104)$$

$$x_2[n] = \underbrace{\{x[L-M+1], \dots, x[L-1]\}}_{M-1 \text{ puncte din datele secvenței } x_1[n]}, \underbrace{\{x[L], x[L+1], \dots, x[2L-1]\}}_{L \text{ date noi}} \quad (7.105)$$

$$x_3[n] = \underbrace{\{x[2L-M+1], \dots, x[2L-1]\}}_{M-1 \text{ puncte din datele secvenței } x_2[n]}, \underbrace{\{x[2L], x[L+1], \dots, x[3L-1]\}}_{L \text{ date noi}} \quad (7.106)$$

și așa mai departe.

Secvențele de date rezultate prin IDFT sunt date de (7.102), unde primele M-1 puncte nu sunt luate în calcul datorită erorii alias produse de acestea, iar cele L puncte rămase constituie rezultatul dorit din convoluția liniară. Operațiile de segmentare a datelor de intrare și concatenare a blocurilor obținute la ieșire pentru obținerea secvenței de ieșire sunt ilustrate în figura 7.4.

Din descrierea metodelor anterioare de filtrare a secvențelor lungi de date ar putea părea că folosirea DFT nu este numai o metodă indirectă, ci și una care presupune efectuarea multor calcule, deoarece datele de intrare trebuie transformate în domeniul frecvență cu ajutorul DFT, apoi înmulțite cu DFT a răspunsului la impuls al filtrului, iar în final rezultatul trebuie transformat în domeniul timp cu ajutorul IDFT.

Utilizând însă algoritmi rapizi de calcul ai DFT și IDFT, efortul de calcul este inferior celui necesar calculării secvenței de ieșire prin realizarea directă a sistemului FIR în domeniul timp (suma de convoluție). După cum s-a mai menționat, dacă $w_N = e^{-j2\pi/N}$, atunci

și

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.107)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]w_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Calcularea directă a lui $X[k]$ necesită N multiplicări complexe ($4N$ reale), $N-1$ adunări complexe ($4N-2$ reale), în total fiind necesare N^2 multiplicări complexe și $N^2 - N$ adunări complexe. Există două proprietăți de simetrie și periodicitate care reduc substanțial complexitatea calculului. Acestea sunt:

$$w_N^{k+N/2} = -w_N^k \quad (7.108)$$

$$w_N^{k+N} = w_N^k \quad (7.109)$$

Transformata Fourier rapidă este un algoritm rapid de calcul pentru DFT, care folosește aceste proprietăți.

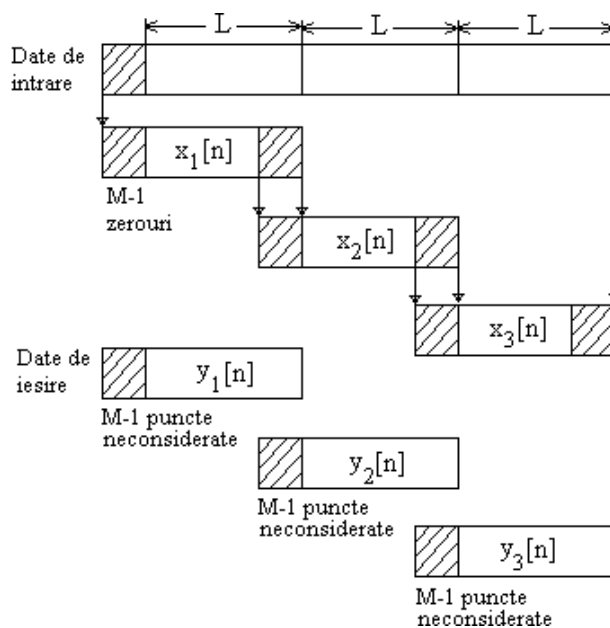


Figura 7.4. Filtrare liniară prin metoda cu suprapunere și salvare

7.4. Probleme propuse

7.1. Să se calculeze transformata Fourier discretă în N puncte pentru semnalele:

- a) $x[n] = \delta[n]$;
- b) $x[n] = \delta[n - n_0]$, $0 < n_0 < N$;
- c) $x[n] = a^n$, $0 \leq n \leq N - 1$;
- d) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & 8 \leq n \leq 15 \end{cases}$;
- e) $x[n] = e^{j(2\pi/N)k_0 n}$, $0 \leq n \leq N - 1$;
- f) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{N} k_0 n$, $0 \leq n \leq N - 1$;
- g) $x[n] = \sin \frac{2\pi}{N} k_0 n$, $0 \leq n \leq N - 1$.

7.2. Se consideră semnalul cu durată finită $x[n] = \{1, 2, 3, 1\}$

- a) să se calculeze transformata Fourier discretă în patru puncte prin rezolvarea sistemului de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute definit de formula transformatei Fourier discrete inverse;
- b) să se verifice rezultatul de la punctul a) prin calcularea DFT în 4 puncte, conform definiției.

7.3. a) Să se calculeze transformata Fourier $X(\omega)$ a semnalului

$$x[n] = \{1, 2, 3, 2, 1, 0\}$$

b) Să se calculeze DFT în 6 puncte, $V(k)$, a semnalului

$$v[n] = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$$

c) Care este legătura dintre $X(\omega)$ și $V(k)$? Să se explice.

7.4. Primele 5 valori ale transformatei Fourier discrete în 8 puncte a unei secvențe reale sunt $\{0.25, 0.125 - j0.3018, 0, 0.125 - j0.0518, 0\}$. Să se determine celelalte 3 valori.

7.5. Să se calculeze convoluția circulară în 8 puncte pentru secvențele următoare:

a) $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$

$$x_2[n] = \sin \frac{3\pi}{8} n, \quad 0 \leq n \leq 7;$$

$$\text{b) } x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

$$x_2[n] = \cos \frac{3\pi}{8} n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

7.6. Se dau secvențele:

$$x_1[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n \quad x_2[n] = \sin \frac{2\pi}{N} n \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Să se determine, în N puncte:

- convoluția circulară $x_1[n] \otimes x_2[n]$;
- corelația circulară dintre $x_1[n]$ și $x_2[n]$;
- autocorelația circulară a lui $x_1[n]$;
- autocorelația circulară a lui $x_2[n]$.

7.7. Să se calculeze expresia $\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2^*[n]$

pentru următoarele perechi de secvențe:

- $x_1[n] = x_2[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n, \quad 0 \leq n \leq N-1$;
- $x_1[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n, \quad x_2[n] = \sin \frac{2\pi}{N} n, \quad 0 \leq n \leq N-1$;
- $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-8], \quad x_2[n] = u[n] - u[n-N]$.

7.8. Să se determine DFT-ul în N puncte pentru secvențele:

$$x_c[n] = x[n] \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

și

$$x_s[n] = x[n] \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

7.9. Să se determine convoluția circulară a secvențelor $x_1[n] = \{1, 2, 3, 1\}$ și $x_2[n] = \{1, 2, 3, 1\}$ în domeniul timp.

7.10. Să se determine $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$ cu ajutorul DFT și IDFT în patru puncte, unde $x_1[n]$ și $x_2[n]$ sunt secvențele din problema anterioară.

7.11. Cunoscând DFT-ul în opt puncte a secvenței

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

să se calculeze DFT pentru următoarelor secvențe:

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1[n] &= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 7 \end{cases} ; \\ \text{b) } x_1[n] &= \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 1 \\ 1, & 2 \leq n \leq 5 \\ 0, & 6 \leq n \leq 7 \end{cases} . \end{aligned}$$

7.12. Fie $X[k]$ transformata Fourier discretă în N puncte a secvenței $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$. Care este DFT în N puncte a secvenței $s[n] = X[n]$, $0 \leq n \leq N-1$?

7.13. Unui sistem liniar invariant în timp cu răspunsul în frecvență $H(\omega)$ i se aplică la intrare semnalul periodic $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$. Se calculează DFT-ul $Y[k]$ din eșantioanele $y[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, ale secvenței de ieșire. Care este legătura dintre $Y[k]$ și $H(\omega)$.