

## CAPITOLUL 6

### EȘANTIONAREA SEMNALELOR ÎN DOMENIILE TIMP ȘI FRECVENȚĂ

Cele mai multe semnale de interes practic sunt analogice. Pentru a le putea prelucra cu ajutorul procesoarelor numerice, acestea trebuie să fie transformate în secvențe, motiv pentru care se impune discretizarea variației lor în timp, prin eșantionare. Nu numai semnalele analogice pot fi eșantionate, ci și cele discrete. Procedul de eșantionare a semnalelor discrete este urmat, de obicei, de operația de "decimare", prin care unele valori ale semnalului discret sunt ignorate, rezultând astfel un semnal cu o derulare "mai rapidă" decât a semnalului discret eșantionat.

O problemă importantă care va fi avută în vedere este reconstrucția semnalului din eșantioanele sale, reconstrucție posibilă, în anumite condiții, printr-o operație de filtrare. Stabilirea caracteristicilor filtrului de reconstrucție va face obiectul unui paragraf al acestui capitol.

Eșantionarea poate fi efectuată și asupra spectrului unui semnal. De exemplu, un semnal aperiodic (analogic sau discret), de energie finită, are spectrul continuu și calcularea sa în practică este posibilă numai într-un set finit de frecvențe discrete. Datorită observării spectrului la frecvențe discrete, evaluarea sa este cunoscută ca eșantionare în domeniul frecvență. Astfel de eșantionări în domeniul frecvență apar în analiza și estimarea spectrală. Obiectul prezentului capitol constă în analizarea eșantionării periodice sau uniforme a semnalelor sau a spectrului lor și reconstrucția semnalelor din eșantioanele lor cu ajutorul mijloacelor de analiză în domeniul frecvență introduse în capitolul 4.

#### **6.1. Eșantionarea în domeniul timp și refacerea semnalelor analogice**

##### **6.1.1. Spectrul semnalului eșantionat ideal**

Așa cum s-a precizat în capitolul 1, de obicei, se consideră eșantionarea periodică a semnalului analogic  $x_a(t)$  la fiecare  $T$  secunde, care conduce la secvența de eșantioane

$$x[n] = x_a(nT), \quad n \in Z \quad (6.1)$$

Frecvența de eșantionare  $F_s = \frac{1}{T}$  trebuie selectată adecvat pentru a nu rezulta eroare alias. În eșantionarea ideală, modelul de extragere a unui eșantion din semnal constă în înmulțirea semnalului cu un impuls Dirac, de arie unitară. Dacă se consideră cazul eșantionării uniforme, cu pasul de eșantionare  $T=1/F_s$ , modelul eșantionării ideale se extinde la înmulțirea semnalului analogic cu semnalul periodic  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ , care este distribuția Dirac periodică [13]. Modelul matematic al eșantionării uniforme este prezentat în figura 6.1.

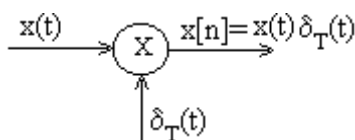


Figura 6.1 Modelul matematic al eșantionării uniforme a unui semnal analogic

Conform modelului, semnalul eșantionat are expresia

$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (6.1')$$

Fie  $x_a(t)$  un semnal analogic aperiodic de energie finită, al cărui spectru este

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (6.2)$$

Semnalul  $x_a(t)$  poate fi refăcut din spectrul său prin transformata Fourier inversă

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (6.3)$$

Se observă că pentru refacerea semnalului sunt necesare componentele de frecvență dintr-un domeniu infinit.

Spectrul semnalului eșantionat  $x[n]$  se calculează cu relația

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (6.4)$$

sau, echivalent 
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fn} \quad (6.4')$$

Semnalul  $x[n]$  poate fi refăcut din spectrul  $X(\omega)$  sau  $X(f)$  prin transformarea inversă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df \quad (6.5)$$

Pentru determinarea relației dintre spectrul semnalului analogic și al semnalului eșantionat, se folosește relația dintre variabilele independente  $t$  și  $n$  ale semnalelor  $x_a(t)$  și  $x[n]$ , adică

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (6.6)$$

Înlocuind (6.6) în (6.3) se obține

$$x[n] \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.7)$$

Din (6.7) și (6.5) rezultă

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.8)$$

Se reamintește că eșantionarea periodică implică o relație între frecvențele  $F$  și  $f$ , corespunzătoare semnalului analogic și eșantionat, de forma

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (6.9)$$

Cu (6.9) relația (6.8) devine

$$\frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.10)$$

Integrala din membrul al doilea al relației (6.10) se poate exprima ca o sumă infinită de integrale pe câte un domeniu egal cu  $F_s$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.11)$$

Dacă se notează  $F = F_1 + kF_s$  (6.12) suma din membrul al doilea al relației (6.11) devine

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F_1 + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F_1 + kF_s}{F_s}} dF_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F_1 + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F_1}{F_s}} dF_1 = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \\
&= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Ținând cont de (6.13), relația (6.11) devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \right] e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.14)$$

Comparând (6.10) cu (6.14), rezultă

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \quad (6.15)$$

Relația (6.15) reprezintă legătura dintre spectrul  $X(f)$  al semnalului eșantionat și spectrul  $X_a(F)$  al semnalului analogic. Spectrul semnalului eșantionat este suma repetărilor periodice, cu perioada  $F_s$ , a spectrului semnalului analogic scalat cu  $F_s$ .

Spectrul semnalului eșantionat mai poate fi obținut prin aplicarea transformatei Fourier relației (6.1'), ținând cont de teorema convoluției spectrelor.

$$X(f) = F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \right\} = X_a(f) * F \{ \delta_T(t) \} \quad (6.16)$$

Spectrul distribuției Dirac periodice este [16]

$$F \{ \delta_T(t) \} = \frac{1}{T} \delta_{F_s}(F) = F_s \delta_{F_s}(F) \quad (6.17)$$

care este tot o distribuție Dirac periodică, cu perioada  $F_s$ , în domeniul frecvență și scalată cu  $1/T$ . Cu (6.17), relația (6.16) devine

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(F) * \delta(F - nF_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(F - nF_s) \quad (6.18)$$

În figura 6.2a este prezentat spectrul  $X_a(F)$  al unui semnal de bandă nelimitată, cu suportul extins pe toată axa reală; în figura 6.2b este reprezentată distribuția Dirac periodică dată de relația (6.17), iar în figura 6.2c este reprezentat cu linie întreruptă semnalul periodic

$F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)$  și cu linie continuă spectrul semnalului eșantionat.

După cum se poate observa, oricât ar fi valoarea frecvenței de eșantionare, implicit a perioadei de eșantionare  $T=1/F_s$  a unui semnal de bandă nelimitată, din spectrul  $X(F/F_s)$  al semnalului eșantionat nu mai

poate fi recuperat spectrul inițial  $X_a(F)$  din eşantioanele sale  $x[n] = x_a(nT)$ ,  $n \in Z$ .

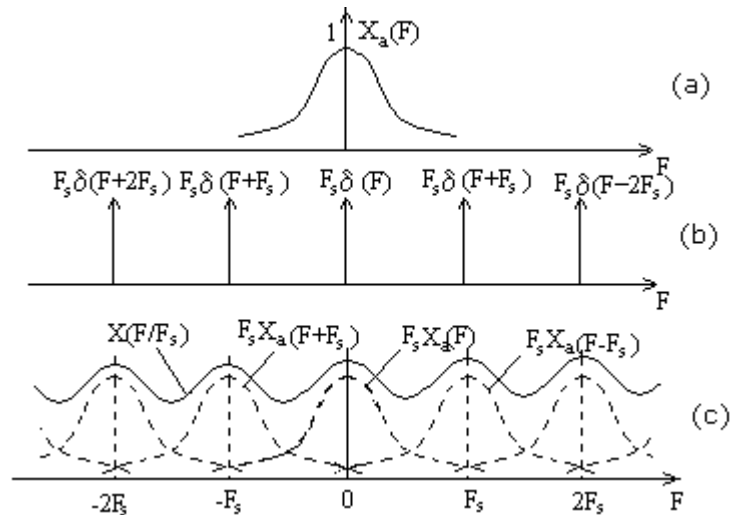


Figura 6.2. Efectul eşantionării ideale a unui semnal  $x_a(t)$ , cu spectrul  $X_a(F)$  de bandă nelimitată, asupra spectrului semnalului eşantionat

### 6.1.2. Deducerea formulei ideale de interpolare pentru reconstrucția semnalelor analogice de bandă limitată

Fie  $x_a(t)$  un semnal analogic de bandă limitată, reprezentat în figura 6.3a. Se observă că spectrul este zero pentru  $|F| \geq B$ . Această limitare atrage după sine faptul că  $x_a(t)$  este un semnal cu suport nemărginit în timp. Expresia (6.15) a spectrului semnalului eşantionat rămâne aceeași. Pentru un ordin  $k$  lobii spectrali  $X(F - kF_s)$  nu se suprapun dacă este îndeplinită condiția

$$B \leq F_s - B \text{ sau } 2B \leq F_s \quad (6.19)$$

Dacă frecvența de eşantionare  $F_s$  este mai mare ca  $2B$ , semnalul eşantionat și spectrul său  $X(F/F_s) = X(f)$  sunt reprezentate în figura 6.3b. Lobii spectrali de diferite ordine nu se suprapun și relația dintre lobul central ( $k=0$ ) din spectrul semnalului discret obținut după eşantionare și spectrul semnalului analogic este

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) & |F| \leq \frac{F_s}{2} \\ 0 & |F| > \frac{F_s}{2} \end{cases} \quad (6.20)$$

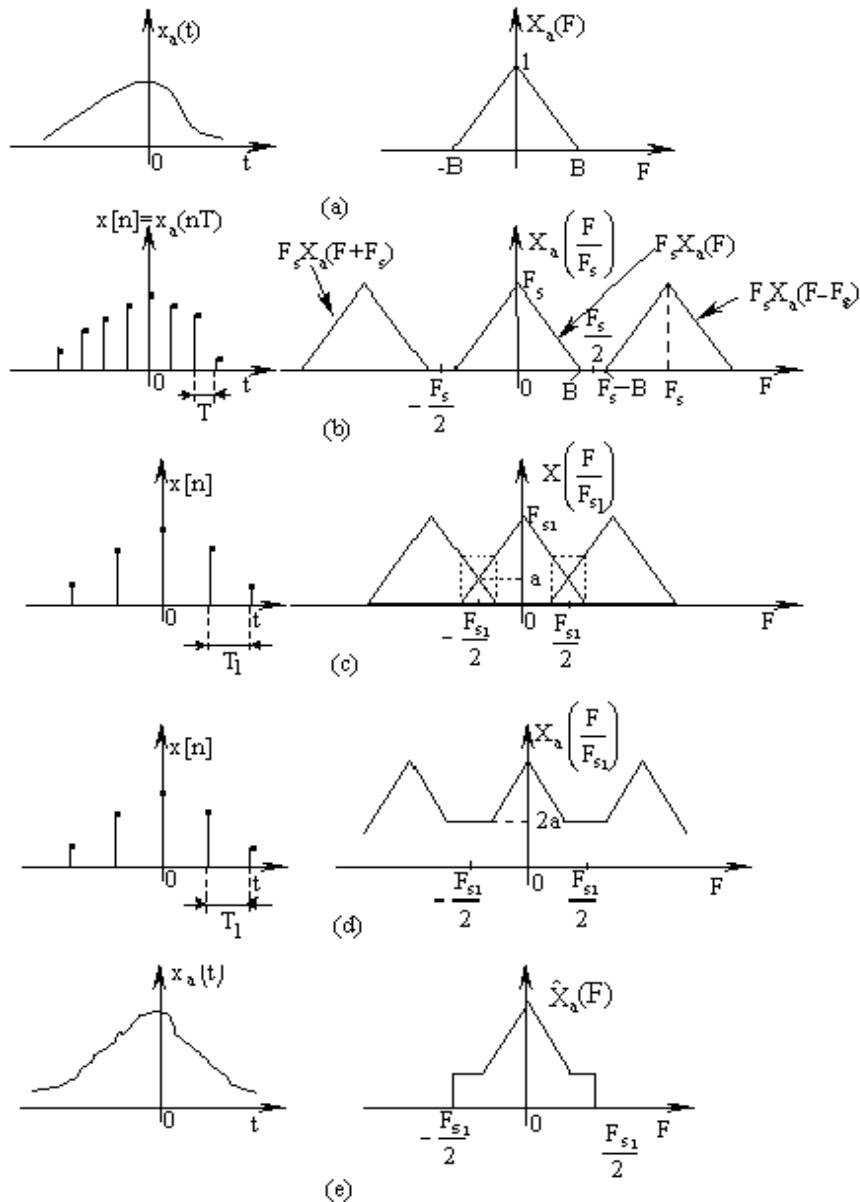


Fig. 6.3. Eșantionarea unui semnal analogic de bandă limitată și eroarea alias a componentelor spectrale în cazul subeșantionării

Transformata Fourier inversă a lui  $X_a(F)$  este

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (6.21)$$

Înlocuind (6.20), (6.4') și (6.9) în (6.21), rezultă

$$x_a(t) = \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n \frac{F}{F_s}} \right] e^{j2\pi Ft} dF =$$

$$\frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F \left( t - \frac{n}{F_s} \right)} dF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \quad (6.22)$$

unde  $x[n] = x_a(nT)$ ;  $T=1/F_s$  – perioada de eșantionare. Relația (6.22) este cunoscută sub denumirea de *formula de reconstrucție* care implică funcția de interpolare

$$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)t}{\left(\frac{\pi}{T}\right)t} \quad (6.23)$$

translată corespunzător cu  $nT$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2 \dots$  și ponderată cu valoarea eșantionului  $x_a(nT)$ . La  $t = kT$ , funcțiile  $g(t - nT)$  sunt egale cu zero, cu excepția funcției  $g(kT - kT) = g(0)$ , care este egală cu unitatea. În consecință,  $x_a(t)$  evaluat la  $t = kT$  este chiar eșantionul  $x_a(kT)$ . Relația (6.22) se numește *formulă ideală de interpolare*.

Dacă, însă, frecvența de eșantionare  $F_{s1}$  este aleasă astfel încât  $F_{s1} < 2B$  (subeșantionare), repetarea periodică a lui  $X_a(F)$  are ca rezultat suprapunerea lobilor spectrali de diferite ordine, ca în figura 6.3c. Contribuția suprapunerilor spectrale din figura 6.3c este reprezentată în figura 6.3d. Aceasta înseamnă că spectrul  $X(F/F_s)$  al semnalului discret conține aliasuri ale componentelor de frecvență ale spectrului semnalului analogic  $X_a(F)$ . Suprapunerea spectrelor de la capetele domeniului fundamental de frecvențe  $[-F_s/2; F_s/2]$  este ilustrată în figura 6.3c și d și reluată în figura 6.4, unde se observă pătrunderea unor “cozi” din spectrele adiacente domeniul fundamental (figurate în negrit în figură) în domeniul fundamental de frecvență, fapt ce determină eroarea alias.

Spectrul semnalului discret se obține prin reflectarea spectrului original care depășește intervalul  $\left[ -\frac{F_s}{2}; \frac{F_s}{2} \right]$  în jurul acestor frecvențe,

motiv pentru care frecvența  $F_s/2$  se numește frecvență de reflexie (*folding*).

Prin limitarea spectrului semnalului eșantionat la intervalul fundamental  $[-F_s/2, F_s/2]$  se obține spectrul din figura 6.3e, care, datorită erorii alias, diferă de cel al semnalului analogic în domeniul  $[-F_s/2, F_s/2]$  (figura 6.3a) și, în consecință, fenomenul alias care apare împiedică refacerea semnalului original  $x_a(t)$  din eșantioanele sale.  $\hat{x}_a(t)$  este semnalul refăcut. Deși semnalul eșantionat este de bandă limitată, ca urmare a unei frecvențe de eșantionare prea reduse, nu se mai poate reconstrui semnalul inițial din eșantioanele sale  $\{x[n] = x_a(nT), n \in Z\}$ .

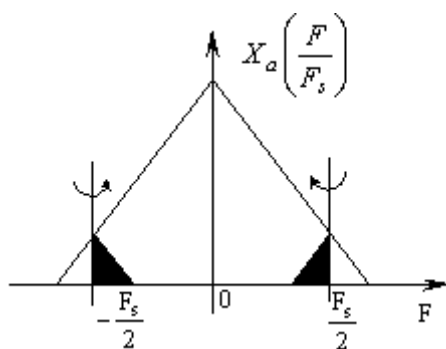


Figura 6.4. Ilustrarea erorii alias în jurul frecvenței de reflexie

Frecvența de eșantionare minimă care permite, încă, reconstruirea semnalului din eșantioanele sale, corespunde cazului în care lobi spectrali se ating, fără, însă, a se suprapune, adică  $F_s=2B$ . Această frecvență minimă, egală cu dublul frecvenței maxime din spectrul semnalului,  $B$ , se numește și *frecvență Nyquist*.

Rezultatele obținute până în acest punct pot fi sintetizate prin teorema eșantionării sau teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon).

#### **Teorema eșantionării**

Dacă semnalul analogic  $x_a(t)$  este de bandă limitată,  $X_a(F)=0$  pentru  $|F| > B$ , atunci  $x_a(t)$  este unic determinat de mulțimea eșantioanelor sale  $\{x[n] = x_a(nT), n \in Z\}$ , dacă frecvența de eșantionare  $F_s \geq 2B$ . În ipotezele enunțate, semnalul inițial poate fi reconstruit utilizând relația de interpolare



$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (6.24)$$

Din relația (6.24) se observă că în punctele de eșantionare toți termenii sumei sunt nuli, cu excepția unuia, a cărui valoare este egală cu valoarea eșantionului. Între două puncte de eșantionare, semnalul se reconstruiește prin contribuția tuturor termenilor sumei.

### 6.1.3. Tehnici de reconstrucție a semnalului

În paragraful precedent s-a arătat că un semnal trece jos de bandă limitată poate fi reconstituit fără distorsiuni din eșantioanele sale, dacă frecvența de eșantionare este cel puțin egală cu frecvența Nyquist. Reconstrucția semnalului  $x_a(t)$  a fost prezentată ca o problemă de interpolare, cu ajutorul funcției de interpolare ideale  $g(t)$ , dată de (6.23). Ca o alternativă, reconstrucția semnalului analogic din eșantioanele sale poate fi văzută ca un proces de filtrare liniară în care semnalul discret se aplică unui filtru analogic.

Relația dintre spectrul semnalului discret și al celui analogic de bandă limitată este (figura 6.3)

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2} \quad (6.25)$$

În acest caz nu există eroare alias și, deci, spectrul semnalului discret este identic (până la un factor de scală,  $F_s$ ) cu spectrul semnalului analogic în intervalul fundamental de frecvențe  $|F| \leq \frac{F_s}{2}$  sau  $|f| \leq \frac{1}{2}$ .

Acesta poate fi extras prin filtrare trece jos ideală.

Dacă filtrul de reconstrucție  $H_r(F)$  are răspunsul în frecvență

$$H_r(F) = \begin{cases} T, & |F| < F_c \\ 0, & |F| > F_c \end{cases} \quad (6.26)$$

și, dacă frecvența de tăiere  $F_c$  a filtrului de reconstrucție satisface condiția

$$B \leq F_c \leq F_s - B \quad (6.27)$$

atunci spectrul semnalului refăcut  $\hat{X}_a(F)$  este

$$\hat{X}_a(F) = H_r(F) X(F/F_s) \quad (6.28)$$

Dacă se aplică semnalul eșantionat  $x[n]$  la intrarea filtrului ce are răspunsul în frecvență dat de (6.26) și care respectă condiția (6.27), atunci la ieșirea sa se obține semnalul  $\hat{x}_a(t)$  care are spectrul  $\hat{X}_a(F)$  egal cu spectrul semnalului  $x_a(t)$ , care a fost eșantionat. Egalitatea spectrelor atrage după sine egalitatea aproape peste tot a semnalelor [NC]

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \quad a.p.t. \quad (6.29)$$

Semnalul de la ieșirea filtrului de reconstrucție se obține cu ajutorul operației de convoluție între semnalul eșantionat aplicat la intrarea filtrului și funcția pondere a filtrului de reconstrucție. Funcția pondere a filtrului de reconstrucție este

$$h_r(t) = T \int_{-F_c}^{F_c} e^{j2\pi Ft} dF = T \frac{\sin 2\pi F_c t}{\pi t} \quad (6.30)$$

Conform relației (6.29), la ieșirea filtrului rezultă semnalul analogic original

$$\begin{aligned} x_a(t) &= h_r(t) * x_a(nT) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) [h_r(t) * \delta(t - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) h_r(t - nT) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Înlocuind (6.30) în (6.31), rezultă

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) T \frac{\sin 2\pi F_c (t - nT)}{\pi (t - nT)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{2F_c}{F_s} \frac{\sin 2\pi F_c (t - nT)}{2\pi F_c (t - nT)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

În cazul  $F_s = 2B$ , conform relației (6.27), frecvența de tăiere a filtrului de reconstrucție devine  $F_c = B = F_s/2 = 1/2T$  și relația de reconstrucție (6.32) se particularizează, devenind

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a \left( \frac{n}{2B} \right) \frac{\sin 2\pi B (t - n/2B)}{2\pi B (t - n/2B)} \quad (6.33)$$

Se observă că pentru frecvența de tăiere  $F_c = F_s/2$ , care este frecvența de tăiere maximă posibilă a filtrului trece jos, funcția pondere a filtrului de reconstrucție este egală cu funcția de interpolare ideală. Reconstrucția semnalului văzută ca un proces de filtrare este ilustrată în figura 6.5. În figura 6.6. se prezintă răspunsul în frecvență și răspunsul la impuls al filtrului trece jos ideal.

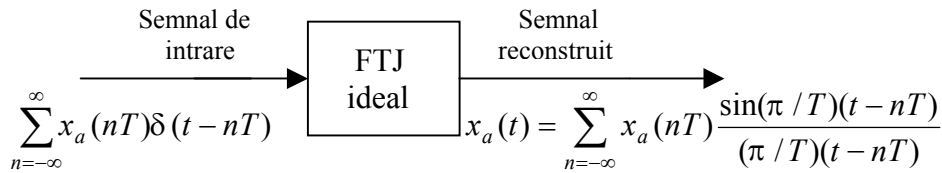


Figura 6.5. Reconstrucția semnalului ca un proces de filtrare

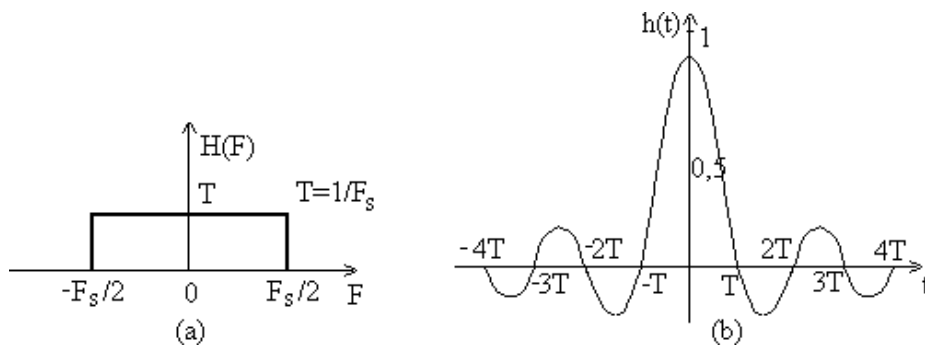


Figura 6.6. Răspunsul în frecvență (a) și la impuls (b) al FTJ

În figura 6.7 se prezintă semnalul analogic reconstruit prin suma (6.33). Se observă că în punctele de eșantionare toți termenii sumei sunt nuli, cu excepția unuia, a cărui valoare este egală cu valoarea eșantionului. Între două puncte de eșantionare, semnalul se reconstruiește prin contribuția tuturor termenilor sumei.

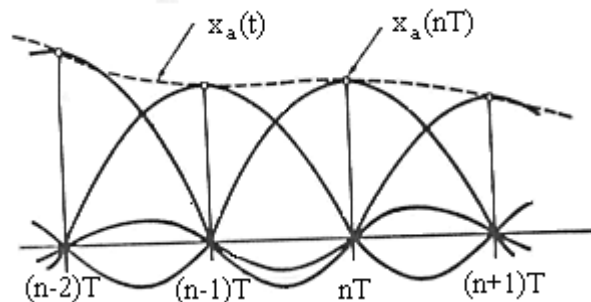


Figura 6.7. Semnalul  $x_a(t)$  reconstruit prin suma (6.33)

Filtrul trece jos ideal de reconstrucție este necauzal și, deci, nerealizabil fizic. Reconstrucția obținută prin filtrare trece jos a semnalului eșantionat nu este singura posibilă. Există și alte metode de interpolare, dar ele sunt aproximări, pe când relațiile deduse până acum

sunt egalități. Semnalul reconstruit  $x_r(t)$  nu va mai fi egal cu  $x_a(t)$ , ci se poate scrie doar că  $x_r(t) \approx x_a(t)$ .

În continuare vor fi prezentate numai câteva tehnici practice simple, bazate pe interpolare constantă și liniară, dar evident, neideale, care vor fi tratate drept operații de filtrare liniară.

### Interpolarea de ordinul zero

Un interpolator de ordinul zero aproximează semnalul analogic printr-o serie de impulsuri rectangulare a căror înălțime este egală cu valoarea eșantionului de semnal. Figura 6.8a prezintă aproximarea semnalului analogic  $x_a(t)$  printr-o interpolare de ordinul zero. După cum se observă,  $\hat{x}_a(t)$  este un semnal în trepte de amplitudine egală cu valoarea eșantionului pe care o păstrează  $T$  secunde. La apariția următorului eșantion, semnalul sare la următoarea valoare pentru  $T$  secunde ș. a. m. d. Dacă această procedură este văzută ca filtrare liniară, situație prezentată în figura 6.8b, răspunsul la impuls al interpolatorului de ordinul zero este

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.34)$$

Acesta este prezentat în figura 6.8c.

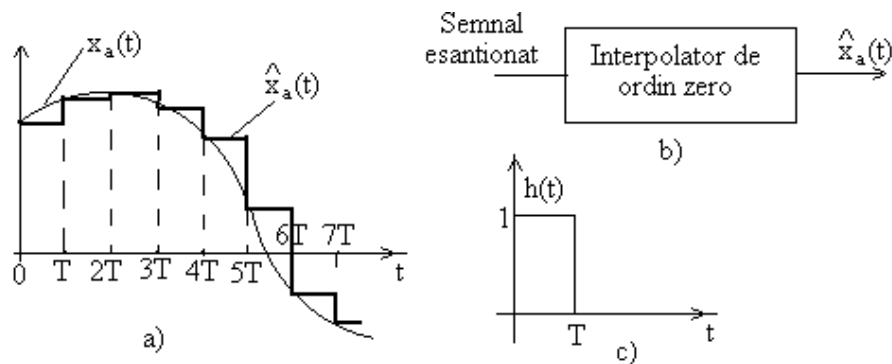


Figura 6.8. a) Aproximarea unui semnal analogic prin interpolare de ordinul zero, b) interpretarea interpolării ca filtrare liniară, c) răspunsul la impuls al interpolatorului de ordin zero

Răspunsul corespunzător în frecvență este

$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi Ft} dt = T \left( \frac{\sin \pi FT}{\pi FT} \right) e^{-j\pi FT} \quad (6.35)$$

Răspunsurile de modul și fază ale filtrului  $H(F)$  sunt date în figura 6.9. Pentru comparație, răspunsul în frecvență al interpolatorului ideal este suprapus (reprezentat punctat) peste caracteristica de modul a interpolatorului de ordinul zero.

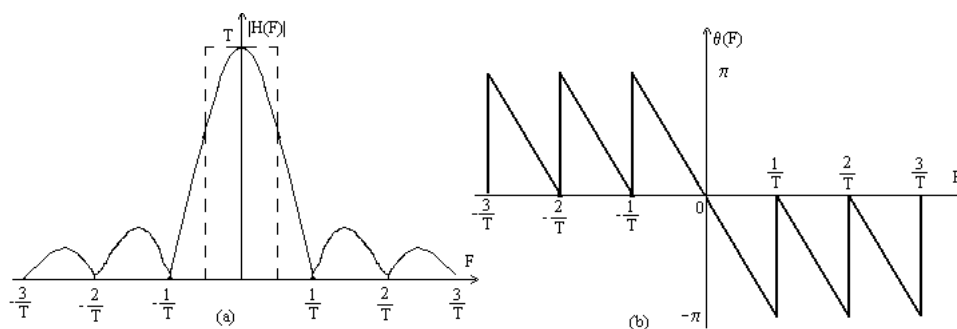


Figura 6.9. a) Caracteristica de modul b) caracteristica de fază a interpolatorului de ordinul zero

Se observă că interpolatorul de ordinul zero nu are o caracteristică cu panta de tăiere abruptă, lucru care se datorează alurii abrupte a lui  $h(t)$ . Ca urmare a acestui lucru, interpolatorul de ordinul zero permite trecerea frecvențelor alias nedorite (superioare lui  $F_s/2$ ). Pentru a remedia această problemă, se obișnuiește a se filtra trece jos semnalul  $\hat{x}_a(t)$ , operație prin care acesta devine mai neted.

### ***Interpolarea de ordinul întâi***

Înterpolarea de ordinul întâi aproximează semnalul  $x_a(t)$  cu segmente de dreaptă, care au panta determinată de eșantionul curent  $x_a(nT)$  și cel precedent  $x_a(nT-T)$ . Ilustrarea acestei tehnici de reconstrucție este prezentată în figura 6.10a. Relația matematică între eșantioanele de intrare și semnalul de ieșire este

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT) + \frac{x_a(nT) - x_a(nT-T)}{T}(t-nT), \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (6.36)$$

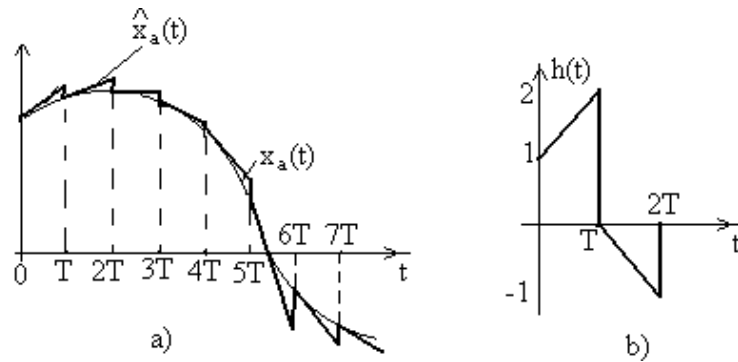


Figura 6.10. a) Aproximarea unui semnal analogic prin interpolare de ordinul întâi b) răspunsul al impuls al interpolatorului de ordin întâi

Dacă interpolarea de ordinul întâi este văzută ca o filtrare liniară, răspunsul la impuls al interpolatorului este

$$h(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 1 - \frac{t}{T}, & T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.37)$$

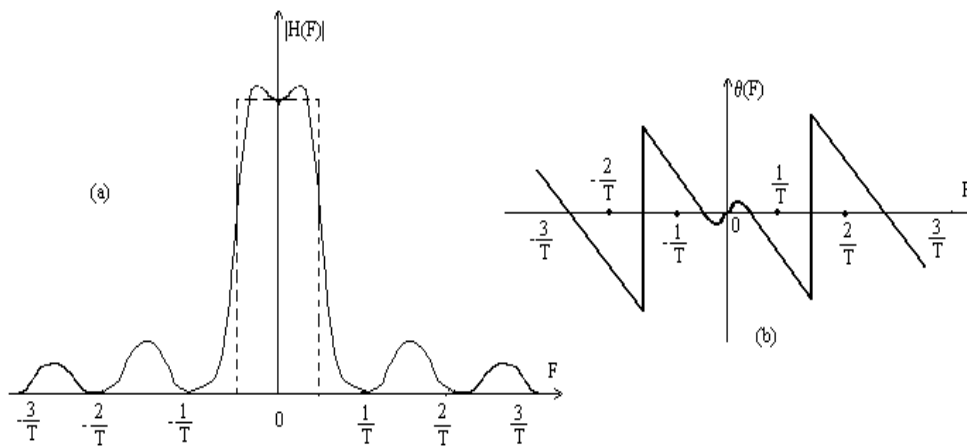


Figura 6.11. a) Caracteristica de modul b) caracteristica de fază a interpolatorului de ordinul întâi

Acesta este reprezentat în figura 6.10b. Răspunsul în frecvență al interpolatorului de ordinul întâi este

$$H(F) = T(1 + 4\pi F^2 T^2)^{1/2} \left( \frac{\sin \pi FT}{\pi FT} \right) e^{j\theta(F)} \quad (6.38)$$

unde faza  $\theta(F) = -\pi FT + \arctg(2\pi FT)$ . Caracteristicile de modul și de fază sunt prezentate în figura 6.11a și b.

Deoarece, după cum se observă din figura 6.11a, și această tehnică de reconstrucție introduce distorsiuni datorită trecerii componentelor de frecvență mai mari decât  $F_s/2$ , interpolatorul de ordinul întâi este urmat de un FTJ care să atenueze frecvențele superioare frecvenței de folding. Vârfulurile din  $H(F)$  din interiorul benzii  $|F| \leq F_s/2$  pot fi nedorite în multe aplicații, caz în care este posibilă modificarea răspunsului la impuls prin reducerea pantei cu un factor  $\beta < 1$ , fapt ce are ca rezultat obținerea unui răspuns la impuls  $h(t)$  reprezentat în figura 6.12a. Răspunsul în frecvență corespunzător este [PM]

$$H(f) = T \left[ 1 - \beta + \beta(1 + j2\pi FT) \frac{\sin \pi FT}{\pi FT} e^{-j\pi FT} \right] \frac{\sin \pi FT}{\pi FT} \quad (6.39)$$

Acesta este reprezentat în figura 6.12b pentru  $\beta = 0,5, \beta = 0,3, \beta = 0,1$ . Se observă reducerea vârfulurilor pentru  $\beta = 0,3$  și dispariția lor pentru  $\beta = 0,1$ .

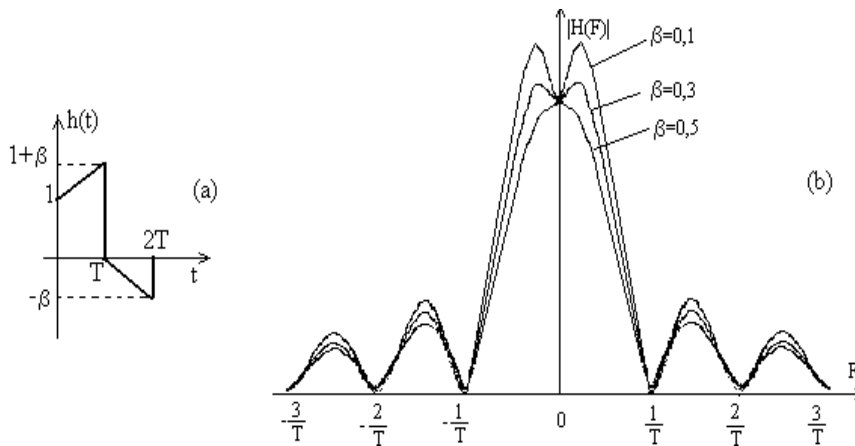


Figura 6.12. Răspunsul la impuls (a) și caracteristica de modul (b) ale interpolatorului de ordinul întâi modificat

### ***Interpolarea liniară cu întârziere***

Prin modul de operare a interpolatorului de ordinul întâi se efectuează o extrapolare liniară sau o predicție liniară a eșantionului

următor al semnalului pe baza eșanționului  $x_a(nT)$  și  $x_a(nT-T)$ . Ca urmare, semnalul estimat  $\hat{x}_a(t)$  prezintă salturi în punctele de eșanționare. Acestea pot fi evitate prin introducerea unei întârzieri de un eșanțion în procesul de reconstrucție și punctele de eșanționare succesive pot fi conectate prin linii drepte. Semnalul rezultat prin acest tip de interpolare este

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT - T) + \frac{x_a(nT) - x_a(nT - T)}{T}(t - nT), \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (6.40)$$

Această tehnică de interpolare este prezentată în figura 6.13. Se observă că la  $t=nT$   $\hat{x}_a(nT) = x_a(nT - T)$  și la  $t=nT+T$   $\hat{x}_a(nT + T) = x_a(nT)$ .

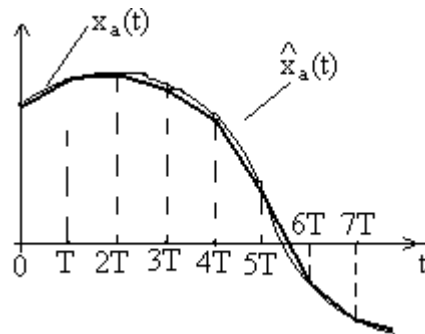


Figura 6.13. a) Aproximarea unui semnal analogic prin interpolare de ordinul întâi cu întârziere

Dacă această tehnică este văzută ca o operație de filtrare liniară, interpolatorul liniar cu întârziere de  $T$  secunde are răspunsul la impuls

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & 0 \leq t < T \\ 2 - \frac{t}{T}, & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.41)$$

Răspunsul în frecvență corespunzător este

$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi Ft} dt = T \left( \frac{\sin \pi FT}{\pi FT} \right)^2 e^{-j\pi FT} \quad (6.42)$$

Răspunsul la impuls, caracteristica de modul și de fază ale interpolatorului liniar cu întârziere sunt prezentate în figura 6. 14. Se observă caderea abruptă a caracteristicii de modul și prezența unor lobi



mici pentru frecvențe mai mari decât  $F_s$ . În plus, datorită întârzierii, caracteristica de fază este liniară. Prin folosirea unui FTJ cu tăiere abruptă în jurul frecvenței de  $F_s/2$  după acest interpolator, sunt reduse componentele de frecvență înaltă din semnalul  $\hat{x}_a(t)$ .

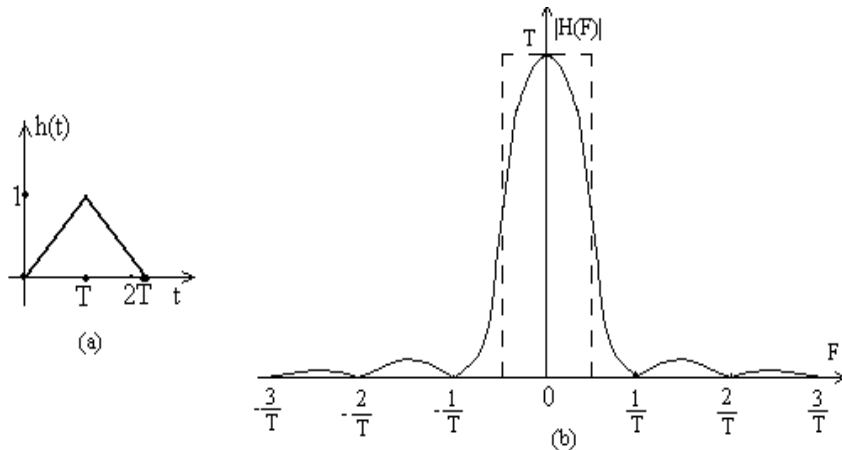


Figura 6.14. Răspunsul la impuls (a) și caracteristica de modul (b) ale interpolatorului de ordinul întâi cu întârziere

**Exemplul 6.1.**

Să se determine spectrul semnalului analogic aperiodic  $x_a(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$  și spectrul semnalului discret obținut prin eșantionarea uniformă a semnalului analogic.

*Soluție.*

Spectrul semnalului analogic este

$$\begin{aligned}
 X_a(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi Ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j2\pi Ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi F} + \frac{1}{a + j2\pi F} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2}
 \end{aligned}
 \tag{6.43}$$

Presupunând semnalul analogic eșantionat cu frecvența de eșantionare  $F_s = \frac{1}{T}$ , se obține semnalul discret

$$x[n] = x_a(nT) = e^{-aT|n|} = (e^{-aT})^{|n|}
 \tag{6.44}$$

Spectrul semnalului discretizat prin eșantionare este

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{F}{F_s}\right) &= X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-aT})^{|n|} e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (e^{-aT})^{-n} e^{-j2\pi fn} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{-j2\pi fn} = \frac{1 - e^{-2aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi f} = \frac{1 - e^{-2aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi \frac{F}{F_s}}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Acesta este periodic de perioadă  $F_s$ , datorită termenului  $\cos 2\pi \frac{F}{F_s}$ .

Spectrul  $X_a(F)$  fiind de bandă nelimitată, eroarea alias nu mai poate fi evitată. Conform relației (6.18), spectrul semnalului reconstituit  $\hat{x}_a(t)$  este

$$\hat{X}_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} \frac{1 - e^{-2aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi \frac{F}{F_s}} = \\ = \frac{T(1 - e^{-2aT})}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi FT}, & |F| \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0, & |F| > \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \end{cases} \tag{6.46}$$

Comparând spectrul semnalului neeșantionat (relația (6.43)) cu cel al semnalului eșantionat (relația (6.46)), rezultă că acestea pot să difere destul de mult, pentru o frecvență de eșantionare aleasă neadecvat.

În figura 6.15a se prezintă semnalul analogic original  $x_a(t)$  și spectrul său pentru  $a=1$ . Semnalul eșantionat  $x[n]$  și spectrul  $X(F/F_s)$ , pentru  $F_s=1\text{Hz}$  sunt date în figura 6.15b. Se observă distorsiunea de tip alias ce apare în domeniul frecvență și diferența dintre semnalul refăcut  $\hat{x}_a(t)$ , reprezentat în figura 6.15c, pentru  $F_s=1\text{Hz}$  și semnalul original. Prin creșterea frecvenței de eșantionare, se pot reduce substanțial distorsiunile alias, situație reprezentată în figura 6.15d, pentru frecvența de eșantionare  $F_s=20\text{Hz}$ .

Întădăvăr, dacă în relația (6.46)  $T$  este considerat suficient de mic, astfel încât  $|2aT| \ll 1$ , numărătorul și numitorul pot fi descompuse în puteri ale

lui  $T$  până la ordinul doi, pentru  $|F| \leq \frac{1}{2T}$  obținându-se

$$X_a(F) = \frac{T(1 - e^{-2aT})}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi FT} \approx \frac{T[1 - (1 - 2aT + 2a^2T^2)]}{1 + (1 - 2aT + 2a^2T^2) - 2(1 - aT + \frac{1}{2}a^2T^2)(1 - 2\pi^2 F^2 T^2)} \quad (6.47)$$

unde, pentru  $|\varphi| \ll 1$ , s-au folosit

aproximațiile:  $e^\varphi \approx 1 + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2$ ;  $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ .

Neglijând termenii de ordin mai mare ca doi în (6.47), se obține

$$X_a(F) \approx \frac{2aT}{2 - 2aT + 2a^2T^2 - 2 + 2aT - a^2T^2 + 4\pi^2 F^2 T^2} = \frac{2aT^2}{a^2T^2 + 4\pi^2 F^2 T^2} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2} \quad (6.48)$$

Pentru acest caz particular s-a arătat că spectrul semnalului reconstituit se apropie de spectrul semnalului analogic de bandă nelimitată, dacă frecvența de eșantionare crește suficient de mult.

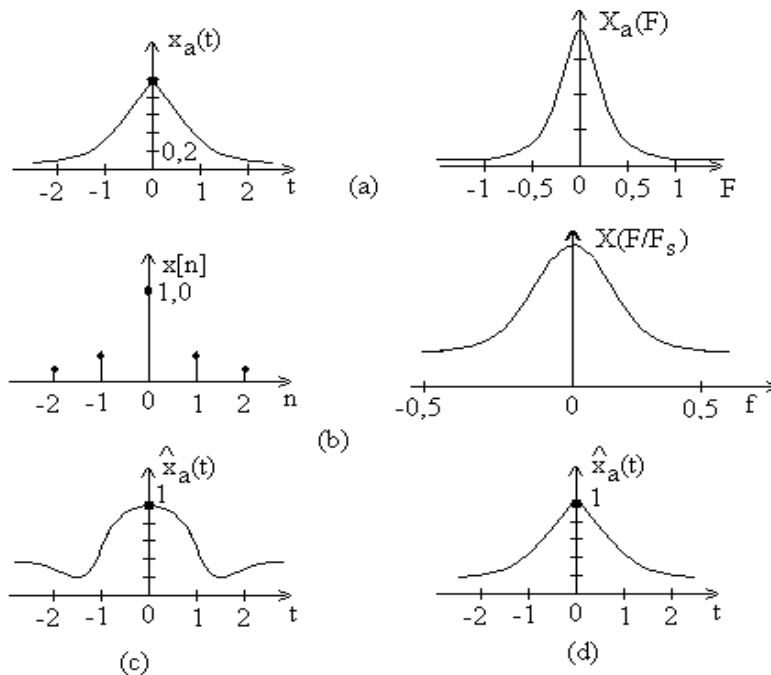


Figura 6.15. (a) Semnalul analogic  $x_a(t)$  și spectrul său  $X_a(F)$  pentru  $a=1$ ; (b)  $x[n] = x_a(nT)$  și spectrul său pentru  $a=1$  și  $F_s=1$  Hz; (c) semnalul reconstituit  $\hat{x}_a(t)$  pentru  $F_s=1$ Hz; (d) semnalul reconstituit  $\hat{x}_a(t)$  pentru  $F_s=20$ Hz.

### 6.1.4. Erori în eșantionarea ideală a unui semnal analogic

În acest paragraf se vor considera numai erorile determinate de suprapunerea lobilor spectrali. În figura 6.16 este prezentat un semnal de bandă nelimitată, eșantionat cu frecvența  $F_s=1/T$ . Lobii spectrali se întrepătrund, astfel încât, filtrând cu un FTJ ideal cu frecvența de tăiere  $F_c=F_s/2$ , în banda filtrului nu intră numai o parte din lobul central, ci și "cozi" spectrale ale lobilor vecini.

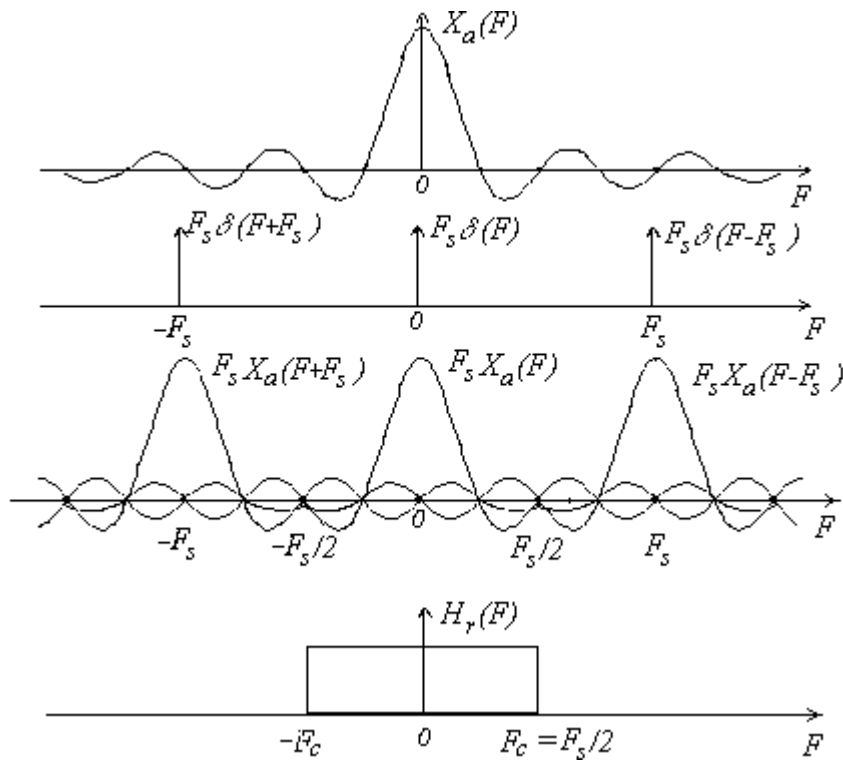


Figura 6.16. Semnalul de bandă nelimitată are lobii întrepătrunși. În intervalul de filtrare intră contribuția tuturor lobilor spectrali

Din figura 6.3 se observă că și în cazul semnalelor de bandă limitată pot apărea asemenea efecte, prin care "cozi" spectrale ale lobilor vecini intră în intervalul spectral de filtrare, determinând fenomenul de aliere sau eroare alias. Eroarea alias este definită cu relația

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) = x_a(t) - x_a(nT) * h_r(t) \quad (6.49)$$

Evaluarea acestei erori se efectuează pentru semnalul  $x_a(t) \longleftrightarrow X_a(F)$ , al cărui spectru  $X_a(F)$  are suportul nemărginit, utilizând relațiile de refacere a semnalului.

$$e_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF - \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(F - nF_s) e^{j2\pi Ft} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(-2n-1)F_s/2}^{(-2n+1)F_s/2} X_a(u) e^{j2\pi ut} e^{jn2\pi F_s t} du \quad (6.50)$$

Cu transformarea  $n \rightarrow -n$  și  $u \rightarrow F$  și exprimarea primei integrale ca o sumă de integrale, relația (6.50) devine

$$e_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} e^{jn2\pi F_s t} dF - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} e^{-jn2\pi F_s t} dF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (6.51)$$

Ținând seama de faptul că  $|1 - e^{-jn2\pi F_s t}| \leq 2$ , modulul erorii poate fi majorat, obținându-se

$$|e_a(t)| \leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} |X_a(F)| dF = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)| dF \quad (6.52)$$

Relația (6.51) se poate exprima în forme alternative care permit stabilirea unor margini superioare mai fine decât (6.52) pentru modulul erorii.

$$e_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (6.53)$$

Efectuând în prima sumă schimbarea de indice  $n=-k$ , inversarea limitelor integralei și revenind apoi la indicele  $n$ , se obține

$$e_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF - (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{-(2n-1)F_s/2}^{-(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (6.54)$$

Efectuând în a doua integrală schimbarea de variabilă  $F=-u$  și revenind apoi la variabila  $F$  se obține

$$\begin{aligned}
 e_a(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2j \sin(n\pi F_s t)) \left[ e^{-jn\pi F_s t} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF + \right. \\
 &+ \left. e^{jn2\pi F_s t} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(-F) e^{-j2\pi F t} (-dF) \right] = \\
 &= 2j \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(n\pi F_s t) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi(F-F_s/2)t} - X_a(-F) e^{-j2\pi(F-F_s/2)t} dF]
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

Exprimând transformata Fourier  $X_a(F)$  sub forma

$$X_a(F) = |X_a(F)| e^{j\theta(F)} \tag{6.56}$$

și ținând cont că  $|X_a(F)|$  este o funcție pară, iar  $\theta(F)$  impară, relația (6.55) devine

$$e_a(t) = 2j \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(n\pi F_s t) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} |X_a(F)| (e^{j[2\pi(F-F_s/2)t+\theta(F)]} - e^{-j[2\pi(F-F_s/2)t-\theta(F)]}) dF] \tag{6.57}$$

Prin majorări succesive în relația (6.57) se poate ajunge la diferite expresii ale marginii superioare ale erorii alias.

### 6.1.5. Eșantionarea ideală a semnalelor analogice periodice

Se consideră un semnal periodic, de perioadă  $T_p$ , al cărui spectru se întinde până la a  $N$ -a armonică (cea mai mare frecvență din spectrul semnalului periodic este  $NF_0$ , unde  $F_0=1/T$  este frecvența fundamentală). Un astfel de spectru este prezentat în figura 6.17a. Dacă se eșantionează semnalul cu frecvența  $F_s$ , aflată în relație armonică cu fundamentală,  $F_s=(M/K)F_0$ ,  $M, K \in N$ , semnalul eșantionat rămâne periodic. Această eșantionare se numește de tip "corelat".

Dacă  $x_p(t)=x_p(t+T)$ ,  $x_p(t) \leftrightarrow \{c_k\}$ ,  $k=-N, \dots, 0, \dots, N$ , atunci

$$X_p(F) = \sum_{k=-N}^N 2\pi c_k \delta(F - kF_0) \tag{6.58}$$

După eșantionarea corelată cu frecvența  $F_s=1/T$ , se obține semnalul discret

$$x_p[n] = x_p(t) \delta_T(t) \tag{6.59}$$

al cărui spectru este

$$\begin{aligned}
X_p\left(\frac{F}{F_s}\right) &= F\{x_p(t)\delta_T(t)\} = X_p(F) * F\{\delta_T(t)\} = \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(F - kF_0 - n\frac{M}{K}F_0\right)
\end{aligned}
\tag{6.60}$$

Din relația (6.60) se constată că spectrul semnalului discret obținut prin eșantionarea semnalului periodic este o repetare periodică, cu perioada  $(M/K)F_0$  a spectrului de linii  $\{c_k\}$  al semnalului periodic, scalat corespunzător. În figura 6.17b este prezentat spectrul semnalului periodic eșantionat.

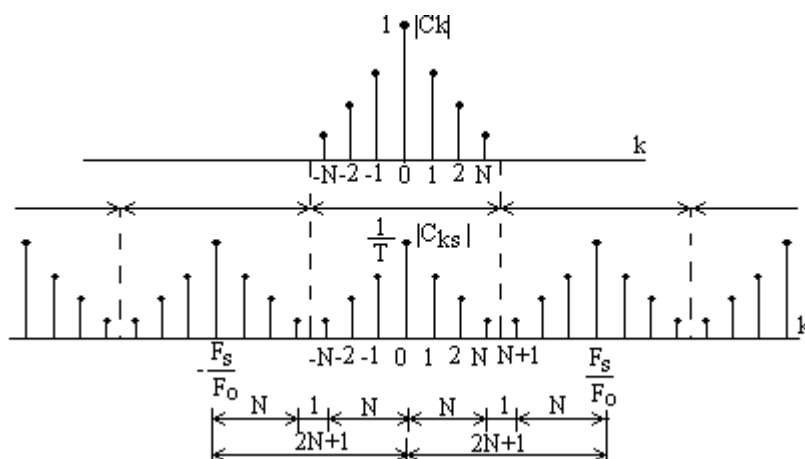


Figura 6.17. Spectrul unui semnal periodic (a), spectrul semnalului periodic eșantionat corelat (b)

Lobul spectral corespunzător lui  $n=0$  se întinde pe semiaxa pozitivă a frecvențelor până la  $NF_0$ , careia îi corespunde termenul  $2\pi c_N \delta(F - NF_0)$ . Cea mai mică frecvență a unei componente spectrale din lobul corespunzător lui  $n=1$  este  $((M/K)-N)F_0$ , careia îi corespunde termenul  $2\pi c_{-N} \delta(F + NF_0 - (M/K)F_0)$ . Lobii spectrali corespunzători lui  $n=0$  și  $n=1$  nu se suprapun dacă

$$NF_0 < \left(\frac{M}{K} - N\right)F_0; \quad \frac{M}{K} > 2N
\tag{6.61}$$

Dacă toate eșantioanele se prelucrează în aceeași perioadă a semnalului ( $K=1$ ), condiția (6.61) devine  $M > 2N$ , adică numărul de eșantioane prelevate trebuie să fie un întreg mai mare decât  $2N$ ;  $M \geq 2N + 1$ .

**Teorema eșantionării semnalelor periodice (1)**

Dacă semnalul  $x_p(t)$ , periodic, de perioadă  $T_p$ ,  $F_0=1/T_p$ , are spectrul limitat la a N-a armonică, atunci semnalul poate fi unic determinat din eșantioanele sale  $\{x_p(kT_s) \mid 0 \leq k \leq M-1\}$ , prelevate în decursul unei singure perioade  $T_p$  a fundamentalei, dacă  $M \geq 2N+1$ . La limită, din fundamentală se prelevează trei eșantioane. Dacă cea mai mare frecvență din spectrul semnalului este  $B=NF_0$ , atunci condiția de eșantionare fără erori devine

$$F_s = MF_0 \geq 2B + F_0 = (2N+1)F_0 \quad (6.62)$$

Se observă ca  $F_s$  este un multiplu întreg al lui  $F_0$ . Diagrama spectrală din figura 6.17 ilustrează eșantionarea corelată ( $F_s=MF_0$ ) a unui semnal periodic cu spectrul limitat. Pentru ca grupurile spectrale ale coeficienților să nu se suprapună, este necesar ca  $F_s$  să fie la limită  $(2N+1)F_0$ . În rest, frecvența de eșantionare poate fi mai mare, dar, pentru păstrarea periodicității și după eșantionare, este necesar ca  $F_s$  să fie în relație armonică cu  $F_0$ . Dacă  $F_s$  și  $F_0$  sunt în relație armonică,

$F_s = \frac{M}{K} F_0$ ,  $K \neq 1$ , teorema eșantionării poate fi reformulată.

**Teorema eșantionării semnalelor periodice (2)**

Dacă semnalul  $x_p(t)$ , periodic, de perioadă  $T_p$ ,  $F_0=1/T_p$ , are spectrul limitat la a N-a armonică, atunci semnalul poate fi unic determinat din eșantioanele sale  $\{x_p(kT_s) \mid 0 \leq k \leq [M/K]-1\}$ , prelevate în decursul unei singure perioade  $T_p$  a fundamentalei, dacă  $M > 2KN$ . Din fundamentală se prelevează cel puțin două eșantioane distanțate la mai puțin de  $T/2$ , altfel ajungându-se la cazul eșantionării zerourilor fundamentalei.

Eșantionarea semnalelor periodice de spectru limitat poate fi realizată și în următorul mod: în loc de a se reține câte un eșantion la  $T_p/M$  secunde într-o perioadă fundamentală, se pot preleva eșantioane adiacente din perioade succesive, situație ilustrată în figura 6.18, unde incrementul pasului de eșantionare s-a considerat  $T_p/M$ .

$$T = T_p + T_p / M \quad (6.63)$$

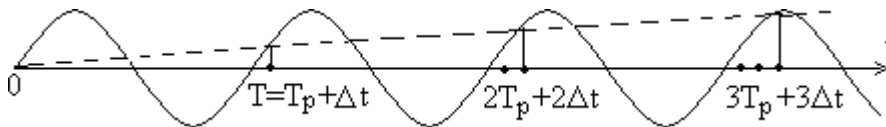


Figura 6.18. Eșantionarea unui semnal periodic de perioadă  $T_p$  cu pasul  $T = T_p + \Delta t$ , unde  $\Delta t = T_p / M, M \in N$ .



În acest caz prelucrarea durează  $M$  perioade. Este posibilă și o eșantionare mai rară, prin prelevarea eșantioanelor adiacente la un interval de  $K$  perioade  $T_p$  plus incrementul  $T_p/M$ , adică

$$T = KT_p + T_p / M \quad (6.64)$$

În acest caz prelevarea celor  $M$  eșantioane durează  $KMT_p$  secunde, adică  $KM$  perioade. Semnalul rezultat prin eșantionare are componente spectrale foarte apropiate de zero, cu atât mai apropiate cu cât  $K$  este mai mare. Principiul de eșantionare prezentat este folosit în osciloscopul cu eșantionare, unde frecvența semnalului este coborâtă prin eșantionare după relația (6.64) la valori la care se pot utiliza amplificatoare obișnuite (cele de bandă foarte largă sunt mai dificil de construit).

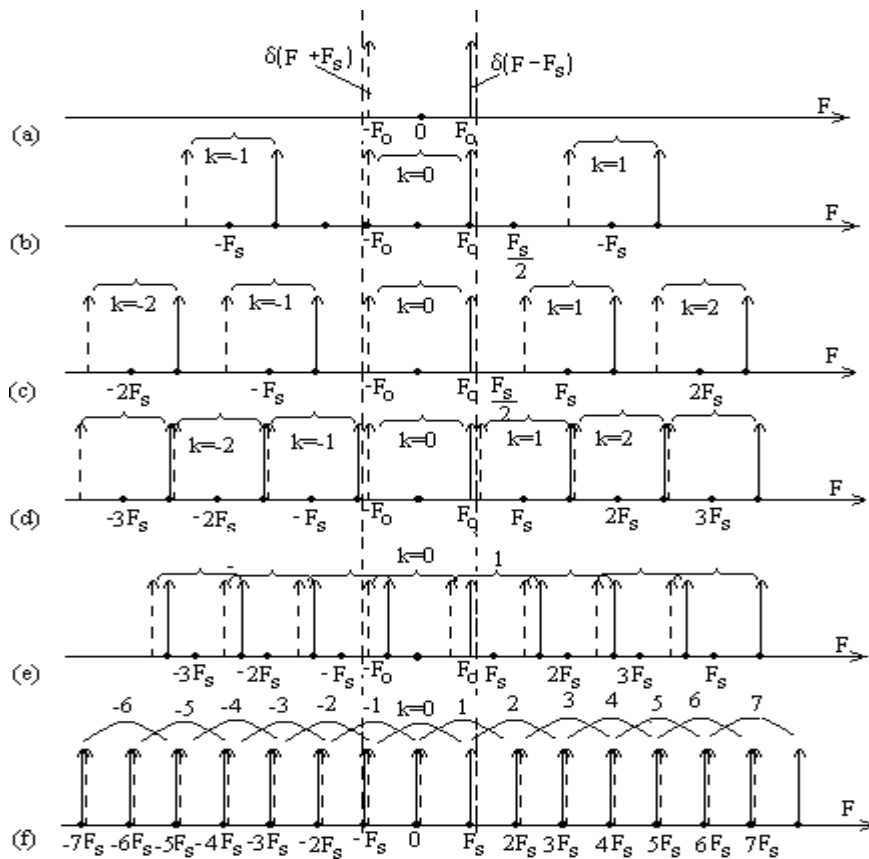


Figura 6.19. Spectrul unui semnal periodic (a), spectrul obținut prin eșantionarea unui semnal periodic cu respectarea teoremei eșantionării (b) și (c) și fără respectarea teoremei eșantionării (d), (e), (f).

În figura 6.19 sunt prezentate spectrele obținute prin eșantionarea unui cosinusoide de frecvență  $F_0$ . S-a considerat numai cazul eșantionării corelate, cu  $F_s = (M/K)F_0$ . În figura 6.19b și c sunt date spectrele obținute pentru  $F_s = 4F_0 > 2F_0$  și  $F_s = 3F_0 > 2F_0$ . În banda de trecere a filtrului de reconstrucție, cu frecvența de tăiere  $F_c$ ,  $F_0 \leq F_c \leq F_s/2$  intră numai o pereche de linii spectrale, astfel că semnalul inițial poate fi reconstruit din eșantioanele sale. Componenta din stânga s-a figurat cu linie întreruptă. Dacă se eșantionează cu  $F_s = 2F_0$ , fără a respecta teorema eșantionării semnalelor periodice, care cere strict inegalitatea  $F_s > 2F_0$  (și nu admite egalitatea ca în cazul semnalelor aperiodice) apare fenomenul de suprapunere a lobilor spectrului, adică o linie din stânga este suprapusă peste o linie din dreapta. Pentru frecvențe  $F_s < 2F_0$ , se prezintă două cazuri. Din figura 6.19e se observă că pentru  $F_s = (3/2)F_0$  lobi spectrali de diverse ordine se întrepătrund. Pentru  $F_s = F_0$  (figura 6.19f) se produce din nou suprapunerea liniilor spectrale. În concluzie, refacerea semnalului periodic inițial din eșantioanele sale, folosind un FTJ ideal, se poate realiza numai dacă  $F_s > 2F_0$ .

## 6.2. Eșantionarea semnalelor discrete

### 6.2.1. Spectrul semnalului discret eșantionat

În prelucrarea numerică a semnalelor există situații în care, pentru a crește viteza de lucru, se impune reducerea frecvenței semnalelor. Acest lucru se realizează prin eșantionarea semnalelor discrete, care constă în reținerea eșantioanelor acestuia la intervale care sunt un multiplu al unui întreg pozitiv  $M$ .

Fie semnalul  $\delta_M[n]$ , care este un tren de impulsuri cu perioada  $M$ .

$$\delta_M[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] \quad (6.65)$$

În spațiul semnalelor discrete acesta este echivalent distribuției Dirac periodice din spațiul semnalelor analogice, dar, spre deosebire de aceasta, este o funcție obișnuită.

Dacă  $x[n]$  este un semnal discret, atunci semnalul discret eșantionat  $x_1[n]$  este

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0; \pm M; \pm 2M \dots \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.66)$$

Acesta se obține prin produsul

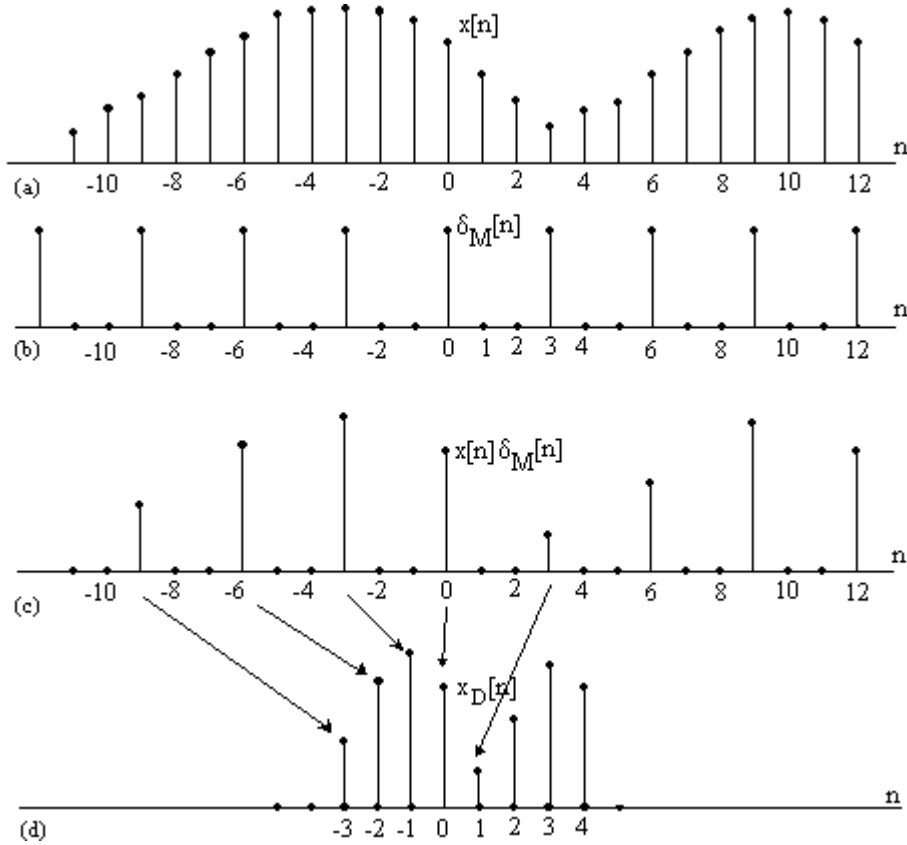


Figura 6.20. Semnalul discret  $x[n]$  (a), semnalul  $\delta_M[n]$  (b), semnalul discret eșantionat (c) și semnalul discret eșantionat și decimat (d)

$$x_1[n] = x[n]\delta_M[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \delta[n - kM] \quad (6.67)$$

În figura 6.20a este prezentat semnalul discret  $x[n]$ , în figura 20b - semnalul periodic  $\delta_M[n]$ , iar în figura 6.20c - semnalul discret  $x_1[n]$  eșantionat cu pasul  $M=3$ . Acesta conține câte două valori nule (în general  $M-1$ ) între două valori prelevate din  $x[n]$ . Se presupune că restricția la perioada principală a spectrului  $X(\omega)$  are suportul  $[-\omega_M, \omega_M]$ , cu  $\omega_M < \pi$ . Spectrul semnalului  $\delta_M[n]$  este

$$F\{\delta_M[n]\} = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{M} \quad (6.68)$$

Aplicând teorema produsului semnalelor (teorema convoluției circulare în domeniul spectrului) rezultă spectrul semnalului eșantionat,  $X_1(\omega)$ .

$$X_1(\omega) = F\{x[n]\delta_M[n]\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s); \quad \omega_s = \frac{2\pi}{M} \quad (6.69)$$

Convoluția circulară se efectuează pe o perioadă de lungime  $2\pi$ . Suportul distribuției Dirac  $\delta(\omega - k\omega_s)$  din acest interval se reduce la un

punct  $\omega = k\omega_s$ , în condiția  $0 \leq k\omega_s < 2\pi$  sau  $0 \leq \frac{2\pi k}{M} < 2\pi$ , adică  $0 \leq k < M$ . Drept urmare, indicele  $k$  din (6.69) se limitează la  $0 \leq k \leq M-1$  și spectrul semnalului discret eșantionat  $X_1(\omega)$  reprezintă prelungirea prin periodicitate a restricției la perioada principală

$$X_{1r}(\omega) = \frac{1}{M} X_r(\omega) * \sum_{k=0}^{M-1} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_r(\omega - k\omega_s); \omega_s = \frac{2\pi}{M} \quad (6.70)$$

unde  $X_r(\omega)$  reprezintă restricția la aceeași perioadă principală a lui  $X(\omega)$ .

Deoarece  $X(\omega)$  este periodic de perioadă  $2\pi$ , din (6.70) se observă că prelungirea prin periodicitate cu perioada  $2\pi$  a lui  $X_r(\omega)$  este și periodică de perioadă  $\omega_s$ ,  $X_1(\omega + \omega_s) = X_1(\omega)$ .

În figura 6.21a s-a reprezentat spectrul semnalului discret  $X(\omega)$ , periodic de perioadă  $2\pi$ , iar în figura 6.21b, spectrul semnalului eșantionat, periodic de perioadă  $2\pi/M$ , pentru  $M=3$ . Lobul spectral  $k=0$  se întinde pe semiaxa  $\omega > 0$  până la  $\omega_M$ . Primul lob vecin axat pe  $\omega_s$  are frecvența minimă  $\omega_s - \omega_M$ . Condiția de evitare a suprapunerii lobilor spectrali este  $\omega_M \leq \omega_s - \omega_M$  adică

$$\omega_s \geq 2\omega_M, \omega_s = 2\pi/M \quad (6.71)$$

Relația (6.71) este asemănătoare cu (6.19) stabilită pentru semnale analogice.

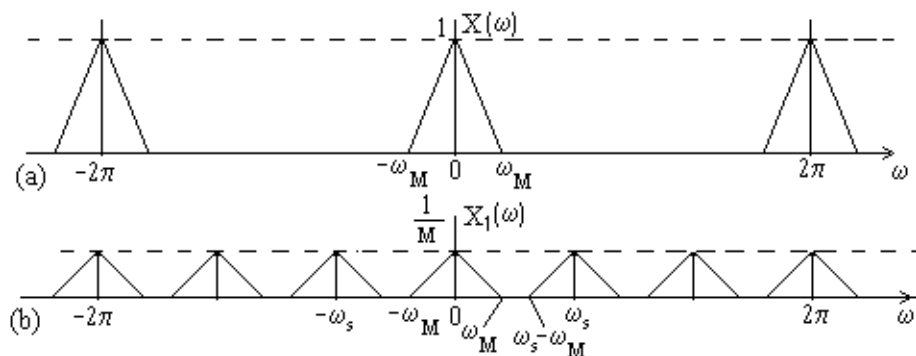


Figura 6.21. Spectrul unui semnal discret (a) și spectrul semnalului discret eșantionat pentru  $M=3$  (b) cu respectarea relației (6.71)

Cum  $\omega_M = T\Omega_M$ , unde  $\Omega_M = 2\pi B$  este pulsația maximă a semnalului analogic din care provine  $x[n]$ , iar  $T$  – pasul de eșantionare a semnalului analogic, rezultă

$$MT \leq \frac{\pi}{\Omega_M}; \quad T' \leq \frac{\pi}{\Omega_M}; \quad T' = MT \quad (6.72)$$

Aceasta înseamnă că semnalul discret  $x[n]$  poate fi eșantionat cu pasul  $M$  fără să apară suprapunerea lobilor spectrali dacă semnalul analogic ar fi putut să fie eșantionat cu perioada  $T'=MT$ , respectându-se teorema WKS. În aceste condiții, semnalul analogic a fost, inițial, supraeșantionat. Dacă (6.71) nu este satisfăcută, apare suprapunerea lobilor spectrali vecini, situație prezentată în figura 6.22. Erorile care apar sunt de tip alias și semnalul discret inițial nu mai poate fi recuperat din spectrul semnalului discret eșantionat.

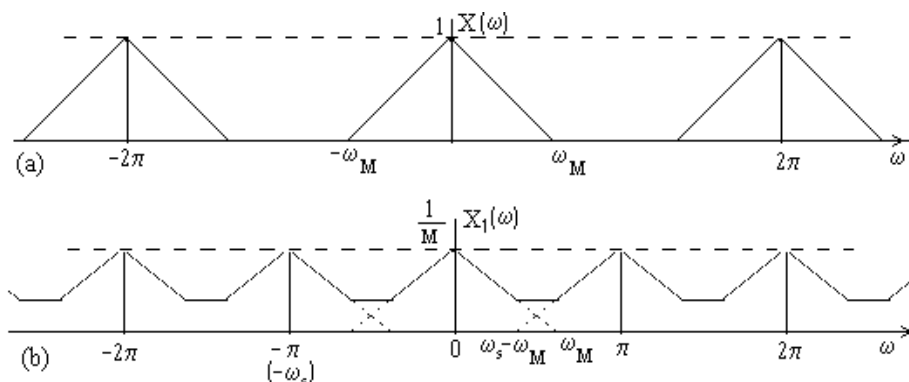


Figura 6.22. Spectrul unui semnal discret (a) și spectrul semnalului discret eșantionat fără respectarea relației (6.71), adică  $\omega_s - \omega_M < \omega_M$  (b)

### 6.2.2. Reconstruirea semnalului discret din eșantioanele sale

Dacă, după eșantionare, lobi spectrali ai semnalului eșantionat nu se suprapun, este posibilă reconstruirea semnalului inițial din eșantioanele sale  $x_1[n]$  prin filtrare trece jos ideală, efectuată cu un filtru de reconstrucție  $H_r(\omega)$ , după cum rezultă din figura 6.23.

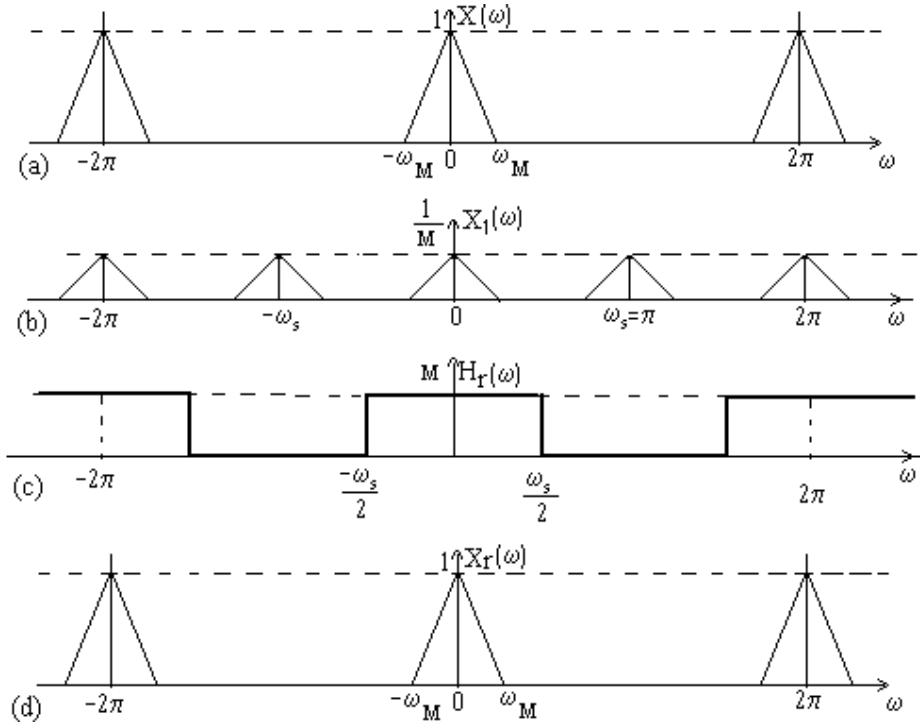


Figura 6.23. Reconstruirea semnalului discret din semnalul discret eșantionat prin filtrare trece jos ideală cu  $\omega_c = \omega_s / 2$

Răspunsul în frecvență al filtrului este periodic de perioadă  $2\pi$  și are expresia

$$H_r(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega - 2k\pi| \leq \omega_c; \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}; \quad \omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M \quad (6.73)$$

Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție este

$$h_r[n] = \frac{\sin n\omega_c}{n\omega_c}; \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{M} \quad (6.74)$$

Semnalul filtrat  $X_r(\omega)$  este

$$X_r(\omega) = H_r(\omega)X_1(\omega) \quad (6.75)$$

Semnalul refăcut este

$$x_r[n] = h_r[n] * x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]h_r[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \frac{\sin[(\pi/M)n - k\pi]}{(\pi/M)n - k\pi} \quad (6.76)$$

deoarece  $x_1[k] = 0$  pentru  $k \neq Mn$  și  $x_1[kM] = x[kM]$ .

### 6.2.3. Decimarea unui semnal discret

După eşantionarea unui semnal discret rezultă un semnal în care, între două valori reţinute, sunt intercalate  $M-1$  zerouri care nu aduc nici o informaţie despre semnalul  $x[n]$  care a fost eşantionat. Acestea pot fi omise, rezultând un nou semnal, denumit "decimatul" semnalului eşantionat, notat  $x_D[n]$ . Din semnalul decimat se poate reconstrui semnalul nedecimat prin inserarea a  $M-1$  zerouri între două valori consecutive. În figura 6.20d este reprezentat semnalul  $x_D[n]$  rezultat prin decimarea semnalului discret eşantionat  $x_1[n]$ . Între semnalul discret decimat şi cel eşantionat există relaţia

$$x_D[n] = x_1[nM] \quad (6.77)$$

unde  $M$  este factorul de decimare, număr natural. Factorul de decimare poate fi şi raţional pozitiv, dar acest lucru nu face obiectul paragrafului de faţă, ci al domeniului referitor la prelucrarea multirate a semnalelor. Spectrul semnalului decimat se determină aplicând transformata Fourier în timp discret

$$\begin{aligned} X_D(\omega) &= F\{x_D[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D[n]e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[nM]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]e^{-j\omega n/M} = X_1\left(\frac{\omega}{M}\right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Ținând seama de (6.70), relaţia (6.78) conduce la restricţia lui  $X_D(\omega)$  la perioada principală

$$X_{Dr}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_r\left(\frac{\omega - k2\pi}{M}\right) \quad (6.79)$$

Se observă periodicitatea de perioadă  $2\pi$  a spectrului semnalului eşantionat şi decimat. Pentru  $k=0$ , lobul central  $\frac{1}{M}X\left(\frac{\omega}{M}\right)$  se anulează la argumentul  $\frac{\omega}{M} = \omega_M$ , deci  $\omega = M\omega_M$ . Prin urmare, lobi spectrali ai lui  $X_D(\omega)$  au întinderea de  $M$  ori mai mare decât a lobilor semnalului iniţial. În figura 6.24 sunt ilustrate spectrul semnalului iniţial  $X(\omega)$ , spectrul semnalului eşantionat cu  $M=2$ ,  $X_1(\omega)$ , şi spectrul semnalului obţinut după decimarea semnalului eşantionat  $X_D(\omega)$ .

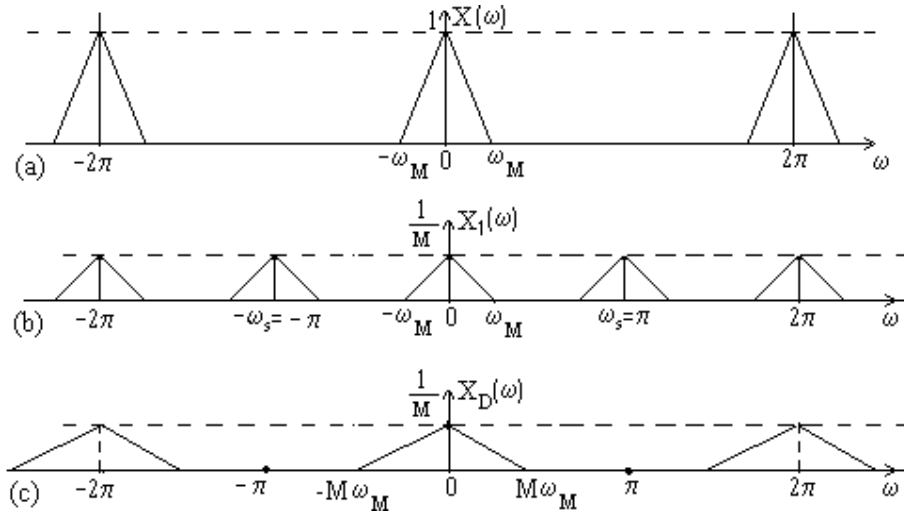


Figura 6.24. Spectrul semnalului discret (a), spectrul semnalului discret eșantionat (b) și spectrul semnalului decimat (c).

### 6.3. Eșantionarea spectrului unui semnal analogic aperiodic de durată finită

Așa cum s-a specificat în paragraful 4.1.2, semnalele analogice aperiodice, de energie finită au spectrul continuu. În cele ce urmează, se consideră eșantionarea periodică a spectrului unui astfel de semnal, urmărindu-se apoi refacerea semnalului din eșantioanele prelevate echidistant din spectrul său.

Fie  $x_a(t)$  semnalul analogic aperiodic al cărui spectru continuu este  $X_a(F)$ . Se presupune că se prelevează eșantioane din  $X_a(F)$  distanțate la  $\delta F$  Hertzi, ca în figura 6.25. Se pune apoi problema refacerii lui  $X_a(F)$  sau, echivalent,  $x_a(t)$  din eșantioanele  $X_a(k\delta F)$ ;  $k \in Z$ .

Din punct de vedere matematic, această problemă este duală eșantionării unui semnal continuu în domeniul timp. În urma eșantionării spectrului continuu

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (6.80)$$

se obține

$$X_a(k\delta F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi k\delta Ft} dt \quad (6.81)$$



Se definește perioada de eșantionare

$$T_s = \frac{1}{\delta F} \quad (6.82)$$

Cu (6.82), relația (6.81) devine

$$X_a(k\delta F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T_s}} dt \quad (6.83)$$

care este analogă relației (6.7) pentru eșantionarea în domeniul timp. Ca și în cazul menționat, domeniul de integrare se împarte într-o sumă infinită de domenii de integrare, de lățime  $T_s$ , și se efectuează schimbarea de variabilă, astfel încât fiecare interval să fie translat în domeniul fundamental  $-\frac{T_s}{2} \leq t \leq \frac{T_s}{2}$ . Aceasta conduce la

$$X_a(k\delta F) = \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s) \right] e^{-j2\pi k \frac{t}{T_s}} dt \quad (6.84)$$

care este duală relației (6.14).

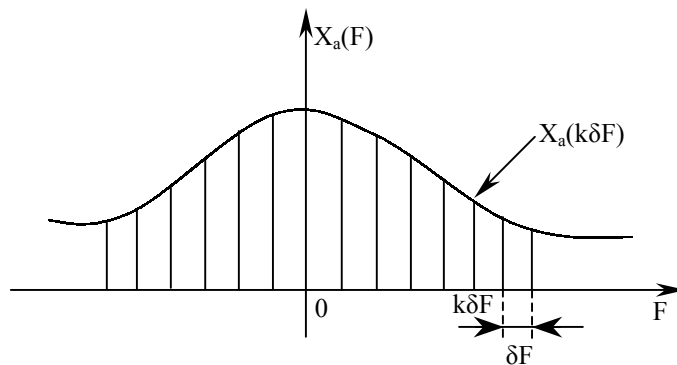


Fig 6.25. Eșantionarea uniformă a spectrului unui semnal analogic aperiodic

Semnalul

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s) \quad (6.85)$$

este periodic, de perioadă  $T_s = \frac{1}{\delta F}$  și, deci, poate fi descompus în serie Fourier

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k \delta F t} \quad (6.86)$$

unde 
$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x_p(t) e^{-j2\pi k\delta F t} dt \quad (6.87)$$

Comparând (6.87) cu (6.84), rezultă

$$c_k = \frac{1}{T_s} X_a(k\delta F) = \delta F X_a(k\delta F) \quad k \in Z \quad (6.88)$$

Din (6.88) se observă că eșantioanele spectrului  $X_a(F)$  corespund (până la un factor de scală,  $\delta F$ ) coeficienților Fourier ai semnalului periodic  $x_p(t)$ , de perioadă  $T_s = \frac{1}{\delta F}$ , dat de (6.85) și reprezentat în figura 6.26.

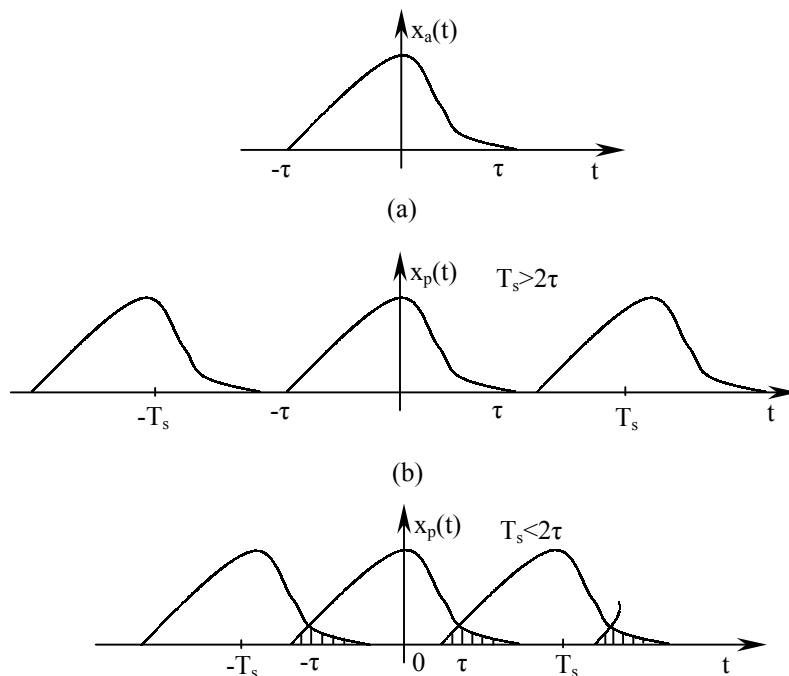


Fig 6.26. (a) Semnal aperiodic de durată finită, (b) semnalul periodic rezultat din eșantionarea spectrului unui semnal de energie finită limitat în timp; (c) ilustrarea aliasingului în domeniul timp

Din figură se observă că refacerea semnalului  $x_a(t)$  din  $x_p(t)$  este posibilă dacă  $x_a(t)$  este limitat în timp la  $|t| \leq \tau$  (adică  $x_a(t) = 0$  pentru  $|t| > \tau$ , unde  $\tau < \frac{T_s}{2}$ ). Dacă  $\tau > \frac{T_s}{2}$ , nu este posibilă refacerea exactă a lui  $x_a(t)$ , datorită suprapunerilor semnalului în domeniul timp.

Dacă semnalul analogic  $x_a(t)$  este limitat în timp la  $\tau \leq T_s/2$  și eșantionarea spectrului se realizează cu o perioadă  $T_s > 2\tau$ , nu există eroare alias, iar spectrul semnalului poate fi refăcut fără pierderi din eșantioanele  $X_a(k\delta F)$ , utilizând formula de interpolare

$$X_a(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k\delta F) \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{\delta F}\right)(F - k\delta F)\right]}{\left(\frac{\pi}{\delta F}\right)(F - k\delta F)} \quad (6.89)$$

care este duală relației (6.22).

Cele prezentate în acest paragraf au în primul rând importanță teoretică, deoarece în cazurile practice, semnalul analogic este transformat în semnal discret, iar eșantionarea în domeniul frecvență se efectuează asupra spectrului semnalului discretizat. Acest lucru face obiectul paragrafului următor.

#### 6.4. Eșantionarea spectrului unui semnal discret de durată finită

Semnalele discrete aperiodice, de energie finită au spectrul continuu și periodic. Fie un astfel de semnal  $x[n]$  cu transformata Fourier:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (6.37)$$

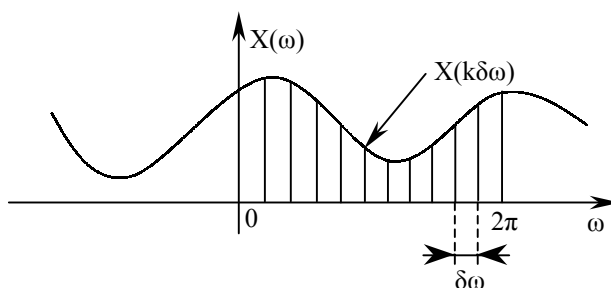


Fig. 6.27. Eșantionarea spectrului unui semnal discret aperiodic

Se eșantionează  $X(\omega)$  la intervale echidistante, egale cu  $\delta\omega$  radiani între două eșantioane succesive. Deoarece  $X(\omega)$  este periodic de perioadă  $2\pi$ , sunt necesare numai eșantioanele din intervalul fundamental de frecvență.

Se consideră  $N$  eșantioane echidistante în intervalul fundamental  $0 \leq \omega < 2\pi$  spațiate la  $\delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ , ca în figura 6.27.

Se evaluează (6.90) la  $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$ , obținându-se

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.91)$$

Suma din (6.91) se împarte într-un număr infinit de sume, fiecare conținând  $N$  termeni

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + \dots = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Efectuând schimbarea de variabilă  $n=p+mN$ , schimbând ordinea de sumare și apoi revenind la indicele  $k$ , rezultă

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \right] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad (6.93)$$

$$\text{Semnalul } x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \quad (6.94)$$

obținut prin repetarea lui  $x[n]$  la fiecare  $N$  eșantioane este, evident, periodic, de perioadă  $N$  și poate fi dezvoltat în serie Fourier

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.95)$$

cu coeficienții

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.96)$$

Comparând (6.96) cu (6.93), rezultă

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.97)$$

și, deci

$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad (6.98)$$

Relația (6.98) permite obținerea semnalului periodic  $x_p[n]$  din eșantioanele spectrului  $X(\omega)$ , dar nu implică refacerea lui  $X(\omega)$  sau  $x[n]$  din eșantioanele spectrului. Pentru a arăta aceasta, trebuie considerată relația între  $x[n]$  și  $x_p[n]$ . Dacă  $x_p[n]$  este repetarea periodică a lui  $x[n]$  ca în relația (6.94), atunci  $x[n]$  se poate reface din  $x_p[n]$  dacă nu există suprapunere (eroare alias) în domeniul timp, adică dacă  $x[n]$  este limitat în timp la mai puțin de perioada  $N$  a lui  $x_p[n]$ .

Acest lucru este ilustrat în figura 6.28, unde s-a considerat secvența de durată finită  $x[n]$ , diferită de zero în intervalul  $0 \leq n \leq L-1$ . Se observă că, dacă  $N \geq L$ ,

$$x[n] = x_p[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.99)$$

astfel încât  $x[n]$  se poate reface din  $x_p[n]$  fără eroare.

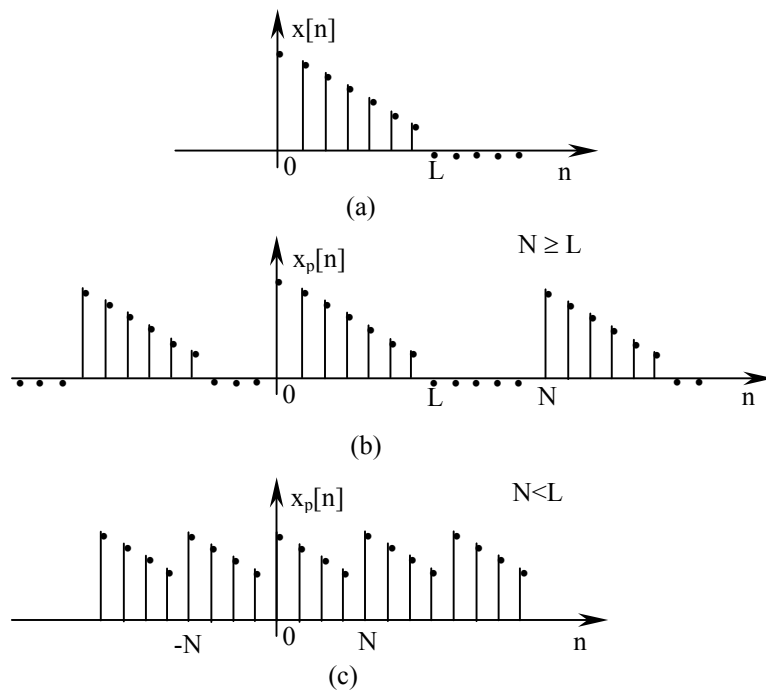


Fig. 6.28.a) Secvență aperiodică de lungime  $L$ , b) repetarea sa periodică pentru  $N \geq L$  (fără eroare alias, c) cazul  $N < L$  (eroare alias)

Dacă însă,  $N < L$ , nu este posibilă refacerea lui  $x[n]$  din  $x_p[n]$  datorită erorii alias în domeniul timp.

În concluzie, spectrul unui semnal discret aperiodic de durată  $L$  poate fi exact refăcut din eşantioanele sale prelevate la frecvenţele  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ , dacă  $N \geq L$ . Procedeu este următorul: întâi se calculează  $x_p[n]$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$  din (6.98), apoi se defineşte funcţia

$$x[n] = \begin{cases} x_p[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.100)$$

şi, în final, se calculează  $X(\omega)$  cu (6.90).

Ca şi în cazul semnalelor analogice, este posibil a se exprima spectrul  $X(\omega)$  direct în funcţie de eşantioanele sale  $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ ,  $k = 0,1,\dots,N$ .

Se presupune  $N \geq L$  şi

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}}; \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.101)$$

şi

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \right] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)n} \right] \end{aligned} \quad (6.102)$$

Suma din interior reprezintă funcţia de interpolare de bază, deplasată cu  $2\pi k/N$  în frecvenţă. Dacă se defineşte

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \quad (6.103)$$

relaţia (6.102) se scrie

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (6.104)$$

Funcţia  $P(\omega)$  are proprietatea că

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k = 0 \\ 0, & \text{pentru } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6.105)$$

Relația (6.104) va da exact valorile eșantioanelor  $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$  pentru  $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ , iar la toate celelalte frecvențe va produce o combinație ponderată a eșantioanelor spectrului original.

### 6.5. Eșantionarea semnalelor trece bandă

Spectrul semnalelor considerate până acum era concentrat în benzi de frecvență care includeau și frecvența nulă. Aceste semnale sunt de tip "trece jos". O altă categorie de semnale utilizate în practică este cea a semnalelor "trece bandă", ale căror componente de frecvență sunt cuprinse într-un interval  $B_1 \leq F \leq B_2$ . Un semnal analogic  $x_a(t)$  cu conținutul spectral concentrat într-o bandă îngustă din jurul anumitei frecvențe  $F_c$  poate fi reprezentat în general sub forma

$$x_a(t) = A(t) \cos[2\pi F_c t + \varphi(t)], \quad (6.106)$$

unde  $A(t)$  este amplitudinea sau anvelopa semnalului și  $\varphi(t)$  este faza semnalului.

Frecvența  $F_c$  poate fi una dintre frecvențele din banda ocupată de semnal. În general se preferă frecvența din centrul benzii semnalului și în modulația de amplitudine aceasta se numește frecvență purtătoare. Din relația (6.106) rezultă

$$x_a(t) = A(t) \cos\varphi(t) \cos 2\pi F_c t - A(t) \sin\varphi(t) \sin 2\pi F_c t = u_c(t) \cos 2\pi F_c t - u_s(t) \sin 2\pi F_c t \quad (6.107)$$

unde, prin definiție

$$u_c(t) = A(t) \cos\varphi(t),$$

$$u_s(t) = A(t) \sin\varphi(t)$$

sunt componentele în cuadratură ale semnalului  $x_a(t)$ . Se introduce anvelopa complexă  $u(t)$  a semnalului analogic trece-bandă  $x_a(t)$ , ca fiind

$$u(t) = u_c(t) + ju_s(t) \quad (6.108)$$

Rezultă astfel

$$x_a(t) = \operatorname{Re}\{u(t)e^{j2\pi F_c t}\} \quad (6.109)$$

În continuare se va stabili legătura dintre spectrele semnalului trece bandă și a anvelopei sale complexe. Transformata Fourier a semnalului analogic este

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (6.110)$$

și deoarece  $\text{Re}\{u(t)e^{j2\pi F_c t}\} = (1/2)[u(t)e^{j2\pi F_c t} + u^*(t)e^{-j2\pi F_c t}]$ , rezultă

$$\begin{aligned} X_a(F) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [u(t)e^{j2\pi F_c t} + u^*(t)e^{-j2\pi F_c t}] e^{-j2\pi Ft} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi(F-F_c)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t) e^{-j2\pi(F+F_c)t} dt \end{aligned} \quad (6.111)$$

Dacă se notează cu  $U(F)$  transformata Fourier a anvelopei complexe, din (6.111) se obține

$$X(F) = \frac{1}{2}[U(F - F_c) + U^*(-F - F_c)] \quad (6.112)$$

Se poate arăta [PM] că dacă semnalul  $x_a(t)$  este un semnal trece bandă și dacă  $F_c$  este ales corespunzător, atunci semnalul anvelopă complexă are spectrul în jurul frecvenței zero, motiv pentru care  $u(t)$  se mai numește semnalul echivalent de joasă frecvență asociat semnalului trece bandă  $x_a(t)$ . În general semnalul echivalent de joasă frecvență  $u(t)$  este complex, în timp ce semnalul trece bandă  $x_a(t)$  este real. Ultimul se poate obține din primul în domeniul timp cu relația (6.110) sau în domeniul frecvență cu relația (6.112).

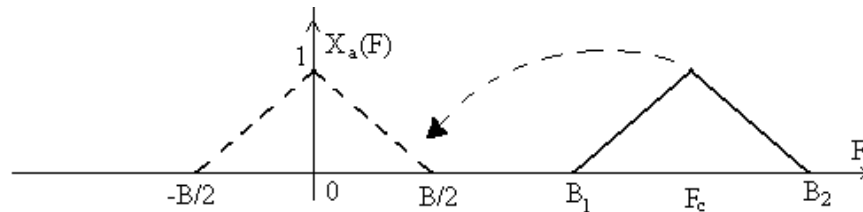


Figura 6.29. Spectrele semnalului analogic trece bandă și al semnalului de joasă frecvență corespunzător

S-a arătat că un semnal analogic cu frecvența maximă  $B$  poate fi reconstituit din eșantioanele sale dacă frecvența de eșantionare este mai mare decât frecvența Nyquist (dublul frecvenței maxime din spectru)  $F_N = 2B$ . Totuși, dacă semnalul este unul trece bandă având componentele de frecvență între  $B_1$  și  $B_2$ , aplicarea directă a teoremei eșantionării impune o frecvență de eșantionare de cel puțin  $2B_2$ . Dacă



semnalul este de bandă îngustă, adică  $B_2 > B_1 \gg B_2 - B_1$ , atunci este avantajos să se transleze spectrul semnalului cu frecvența  $F_c = (B_1 + B_2)/2$  și apoi să se eșantioneze semnalul echivalent de joasă frecvență. Aceasta se poate face multiplicând semnalul trece bandă cu purtătoarele în cuadratură și filtrând semnalele rezultate cu filtre trece-jos având banda de trecere la  $2F_c$ , situație prezentată în figura 6.30.

Se presupune că frecvența cea mai înaltă din spectru

$$B_2 = F_c + \frac{B_2 - B_1}{2} = F_c + \frac{B}{2} \quad (6.113)$$

este un multiplu al benzii semnalului B, adică

$$F_c + \frac{B}{2} = kB, \quad (6.114)$$

unde  $k \in N^*$ . Acest lucru este întotdeauna posibil, eventual prin lărgirea benzii semnalului de analizat. Eșantionând semnalul trece bandă  $x_a(t)$  cu

viteza de eșantionare  $2B = \frac{1}{T}$ , rezultă

$$\begin{aligned} x_a(nT) &= u_c(nT) \cos 2\pi F_c nT - u_s(nT) \sin 2\pi F_c nT = \\ &= u_c(nT) \cos \frac{\pi n(2k-1)}{2} - u_s(nT) \sin \frac{\pi n(2k-1)}{2}, \end{aligned} \quad (6.115)$$

deoarece  $T = \frac{1}{F_s} = \frac{1}{2B}$ .

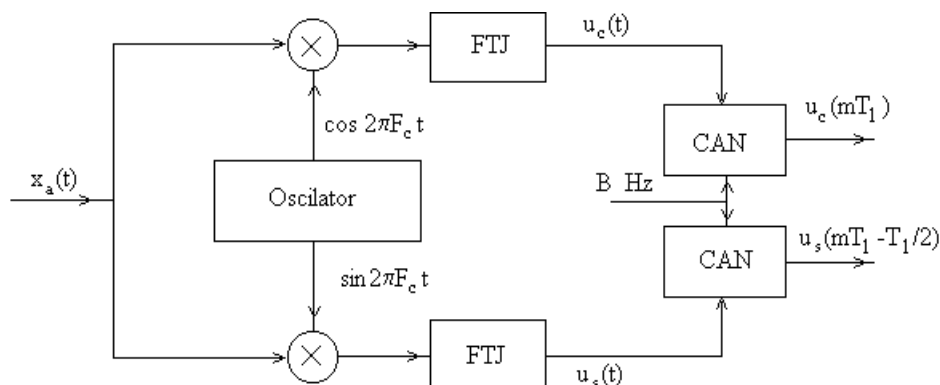


Figura 6.30. Eșantionarea unui semnal analogic trece bandă, prin transformarea lui într-un semnal de joasă frecvență echivalent

Fie  $T_1 = 2T = \frac{1}{B}$ . Se disting două cazuri

a)  $n$  par, adică  $n=2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ;

$$x_a(2mT) \equiv x_a(mT_1) = u_c(mT_1) \cos \pi m(2k-1) = (-1)^m u_c(mT_1) \quad (6.116)$$

b)  $n$  impar, adică  $n=2m-1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x_a(2mT - T) &\equiv x_a\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) = -u_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) \sin \pi \frac{(2m-1)(2k-1)}{2} = \\ &= (-1)^{m+k+1} u_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right); \end{aligned} \quad (6.117)$$

Prin urmare, eşantioanele pare ale lui  $x_a(t)$ , prelevate cu frecvența de  $B$  eşantioane pe secundă, vor produce eşantioanele componente  $u_c(t)$  din semnalul echivalent de joasă frecvență  $u(t)$ , în timp ce eşantioanele impare ale lui  $x_a(t)$ , prelevate tot cu frecvența de  $B$  eşantioane pe secundă, vor produce eşantioanele componente  $u_s(t)$  din semnalul echivalent de joasă frecvență  $u(t)$ . Aceste eşantioane pot fi utilizate la reconstituirea semnalului echivalent de joasă frecvență. Pentru aceasta se aplică teorema eşantionării părților componente ale semnalului echivalent de joasă frecvență

$$u_c(t) = B \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_c(mT_1) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_1}(t - nT_1)\right]}{\frac{\pi}{T_1}(t - nT_1)} \quad (6.118)$$

$$u_s(t) = B \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_1}\left(t - mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)\right]}{\frac{\pi}{T_1}\left(t - mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)} \quad (6.119)$$

Înlocuind (6.118) și (6.119) în (6.107), se obține

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= u_c(t) \cos 2\pi F_c t - u_s(t) \sin 2\pi F_c t = \\
&= B \cos 2\pi F_c t \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_c(mT_1) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_1}(t - mT_1)\right]}{\frac{\pi}{T_1}(t - mT_1)} - \\
&\quad - B \sin 2\pi F_c t \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_1}\left(t - mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)\right]}{\frac{\pi}{T_1}\left(t - mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Regrupând termenii din membrul drept, rezultă

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= B \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ u_c(mT_1) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_1}(t - nT_1)\right]}{\frac{\pi}{T_1}(t - nT_1)} \cos 2\pi F_c t - \right. \\
&\quad \left. - B u_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_1}\left(t - nT_1 + \frac{T_1}{2}\right)\right]}{\frac{\pi}{T_1}\left(t - nT_1 + \frac{T_1}{2}\right)} \sin 2\pi F_c t \right]
\end{aligned} \tag{6.109}$$