CAPITOLUL 4

STRUCTURI PENTRU IMPLEMENTAREA SISTEMELOR DISCRETE

Acest capitol este dedicat implementării sistemelor discrete, liniare, invariante în timp. Există diferite configurații de structuri pentru implementarea sistemelor discrete cu răspuns finit (FIR) şi infinit la impuls (IIR), dintre care se vor prezenta formele directe, structurile în cascadă, în paralel şi cele lattice, ce prezintă robustețe la implementarea cu aritmetică finită. De asemenea, este descrisă în acest capitol implementarea în domeniul frecvență a unui sistem FIR, care are avantajul de a fi eficient din punct de vedere al calculelor, față de alte implementări pentru sistemele FIR.

O parte semnificativă a acestui capitol se referă la descrierea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, în spațiul stărilor. Este prezentată, de asemenea, o analiză a sistemelor caracterizate cu ajutorul variabilelor de stare.

4.1. Considerații asupra implementării sistemelor discrete

Sistemele discrete, liniare, invariante în timp sunt caracterizate de ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți descrisă de relația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{4.1}$$

O astfel de clasă de sisteme liniare invariante în timp sunt caracterizate de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4.2}$$

Cu ajutorul ultimei caracterizări, se obțin zerourile şi polii funcției de transfer, care depind de alegerea parametrilor sistemului $\{a_k\}$ şi $\{b_k\}$ şi care determină răspunsul în frecvență al sistemului.

În acest capitol se vor prezenta diferite metode de implementare a relațiilor (4.1) sau (4.2), care depind de forma în care aceste două caracterizări sunt aranjate. În general, relația (4.1) poate fi privită ca o procedură de calcul (un algoritm) pentru determinarea secvenței de ieşire $y[n]$ a sistemului, cunoscând secvența de intrare la momentele n, n-1, n-M şi condițiile inițiale pentru sistem [63]. Relația (4.1) poate fi aranjată într-un set echivalent de ecuații cu diferențe. Fiecare set de ecuații defineşte o procedură de calcul sau un algoritm pentru implementarea sistemului. Pentru fiecare set de ecuații se poate construi o diagramă bloc constând din interconexiuni de elemente de întârziere, elemente de multiplicare şi sumare. Având în vedere cele prezentate, ar putea apărea întrebarea de ce nu sunt implementate direct cele două relații şi ce beneficii decurg din rearanjarea acestora în diverse moduri. În acest capitol se urmăreşte a se răspunde la această întrebare, ținând cont că factorii importanți care determină alegerea unei structuri particulare sunt complexitatea calculului, necesarul de memorie şi efectele lungimii finite a cuvintelor asupra performanțelor sistemului.

Complexitatea calculului se referă la numărul de operații aritmetice (în general, multiplicări şi sumări) necesare pentru a calcula o valoare de ieşire $y[n]$ a sistemului.

Memoria necesară se referă la numărul de locații de memorie necesare pentru a stoca parametrii de sistem, intrări anterioare, ieşiri anterioare şi orice valori intermediare necesare.

Efectele lungimii finite a cuvintelor sau efectele de precizie finită se referă la efectele de cuantizare ce sunt prezente în orice implementare digitală a sistemului, fie ea hardware sau software. Parametri unui sistem trebuie reprezentați cu precizie finită. Calculele care sunt executate în procesul de obținere a valorii unei ieşiri din sistem trebuie neapărat rotunjite sau trunchiate adecvat în limita preciziei date de calculator. Un alt considerent ce trebuie avut în vedere este tipul de aritmetică folosit, virgulă fixă sau mobilă. Toate aceste probleme sunt uzual denumite *efectele lungimii finite a cuvintelor* şi sunt extrem de importante, având influență în alegerea modului de implementare a unui sistem. Se va observa că diferite structuri de sistem, care sunt echivalente pentru precizie infinită, prezintă o comportare diferită, când mărimile care caracterizează sistemul sunt reprezentate cu precizie finită. Prin urmare, este foarte important în practică a selecta o implementare care nu este foarte sensibilă la efectele lungimii finite a cuvintelor.

Deşi factorii majori prezentaţi mai sus influenţează alegerea modului de implementare a unui sistem, mai există şi alţi factori, destul de importanţi, cum ar fi timpul necesar furnizării mărimii de interes. În acest sens, posibilitatea de procesare în paralel sau "pipeline", poate juca un rol important în alegerea modului de implementare a sistemului.

În analiza de faţă a structurilor de implementare a sistemelor discrete, se vor avea în vedere cei trei factori importanţi prezentaţi mai sus. Ocazional, vor fi incluşi unii factori suplimentari care pot fi de o importanţă majoră în unele implementări. În particular, în acest capitol se va urmări complexitatea calculelor şi memoria necesară.

4.2. Implementarea sistemelor cu răspuns finit la impuls

Pentru a păstra unitatea de notaţii cu Capitolul 2, se consideră că, în general, un sistem FIR este descris de ecuaţia cu diferenţe

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k] \tag{4.3}$$

sau, echivalent, prin funcţia de sistem

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] z^{-k} \tag{4.4}$$

Răspunsul la impuls al unui sistem FIR este identic cu coeficienţii b_n, prin urmare, se poate scrie

$$h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{4.5}$$

În continuare se vor prezenta diferite metode de implementare a unui sistem FIR, începând cu cea mai simplă structură, numită *forma directă*. O a doua structură este forma în *cascadă*. A treia structură care va fi prezentată este cea cu *eşantionare în frecvenţă*. În final, se va prezenta structura *lattice*.

4.2.1. Implementarea în forma directă

Aceasta implementare rezultă imediat din ecuaţia cu diferenţe nerecursivă dată de relaţia (4.3) sau, echivalent, prin suma de convoluţie

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \tag{4.6}$$

Structura care implementează această relație este ilustrată în figura 4.1. Se observă că această structură necesită M-1 locații de memorie pentru cele M-1 intrări anterioare, şi are o complexitate de M multiplicări şi M-1 sumări pentru fiecare ieşire. Deoarece ieşirea constă dintr-o combinație liniară a intrării curente şi a M-1 valori anterioare ale acesteia, structura din figura 4.1. reprezintă o *linie de întârziere* sau un *sistem transversal*. Din această cauză forma directă de implementare este adesea numită *filtru transversal* sau filtru cu *linie de întârziere*.

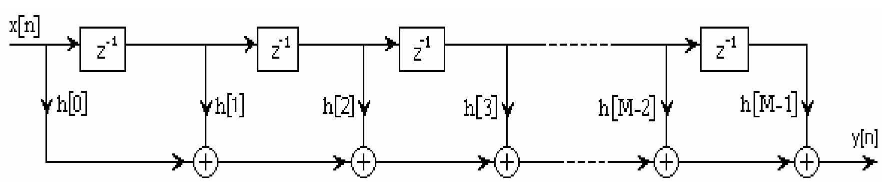


Fig. 4.1. Forma directă de implementare a sistemului FIR

În Capitolul 2 s-a arătat că răspunsul la impuls al unui sistem FIR de fază liniară satisface condiția

$$h[n] = \pm h[M-1-n] \tag{4.7}$$

Pentru un astfel de sistem numărul de multiplicări este redus de la M la M/2 pentru M par şi la (M+1)/2 pentru M impar. În figura 4.2 este ilustrată posibilitatea de implementare a unui sistem FIR cu fază liniară pentru M impar.

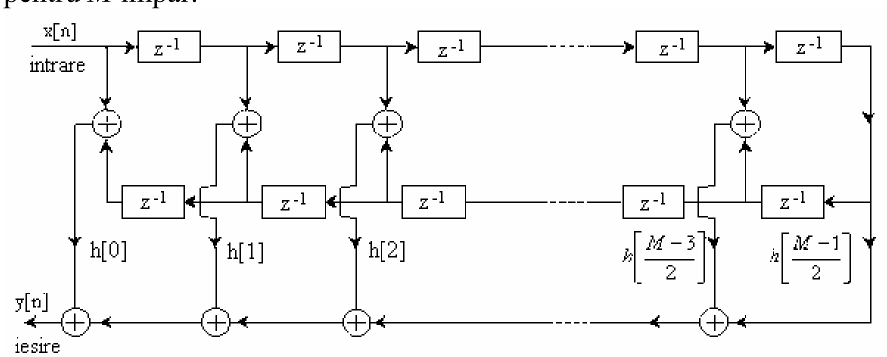


Figura 4.2. Forma directă de implementare a unui sistem FIR de fază liniară cu M impar

4.2.2. Implementarea în cascadă

Implementarea în cascadă presupune scrierea funcției de sistem dată de relația (4.4) sub forma unui produs de factori $H_k(z)$, $k = \overline{1,K}$.

$$H(z) = G\prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{4.8}$$

unde, în cazul implementării cu module de ordinul doi,

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}, \quad k = 1,2,\ldots,K \tag{4.9}$$

K fiind partea întreagă a lui $(M+1)/2$. Factorul de câştig G ar putea fi egal distribuit între cele K secțiuni ale filtrului, astfel că $G = G_1G_2\ldots G_K$. Zerourile lui $H(z)$ sunt grupate în perechi ce produc sistemele de ordin doi de tip FIR caracterizate de relația (4.9). Întotdeauna se doreşte a grupa perechi de rădăcini complex-conjugate astfel încât coeficienții $\{b_{ki}\}, i = 1,2$, din relația (4.9) să fie reali. Rădăcinile reale pot fi împerecheate în orice manieră. Implementarea în cascadă cu secțiunea de bază de ordin doi este indicată în figura 4.3.

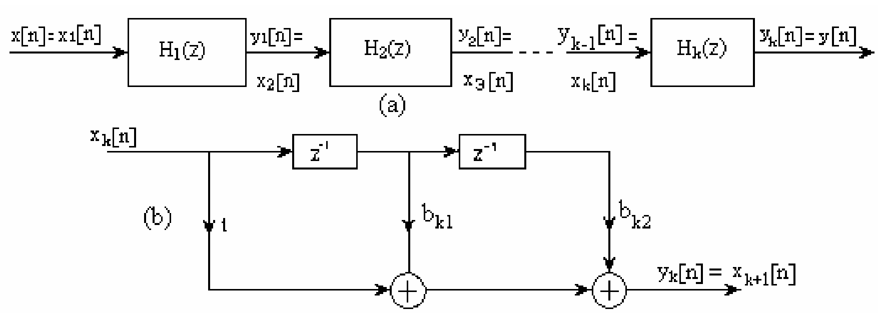


Figura 4.3. a) Realizarea în cascadă a unui sistem FIR, b) o secțiune de filtru FIR de ordinul doi

În cazul filtrelor FIR de fază liniară, simetria în $h[n]$ implică faptul că zerourile lui H(z) prezintă, de asemenea, o formă de simetrie. În particular, dacă z_k şi z_k^* sunt o pereche de zerouri complex-conjugate atunci $1/z_k$ şi $1/z_k^*$ sunt, de asemenea, o pereche de zerouri complex-conjugate. Prin urmare, se obțin câteva simplificări formând secțiuni de ordinul patru pentru un sistem FIR, după cum urmează:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \left(1 - z_k z^{-1}\right)\left(1 - z_k^* z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}/z_k\right)\left(1 - z^{-1}/z_k^*\right) \\ &= 1 + c_{k1}z^{-1} + c_{k2}z^{-2} + c_{k1}z^{-3} + z^{-4} \end{aligned} \tag{4.10}$$

unde coeficienții $\{c_{k1}\}$ şi $\{c_{k2}\}$ sunt funcții de zerourile z_k. Astfel, combinând cele două perechi de zerouri, pentru a forma o secțiune de ordin patru, numărul de multiplicări se reduce de la patru la două (cu un factor de 50%). Figura 4.4 ilustrează structura de bază a filtrului FIR cu funcția de sistem (4.10).

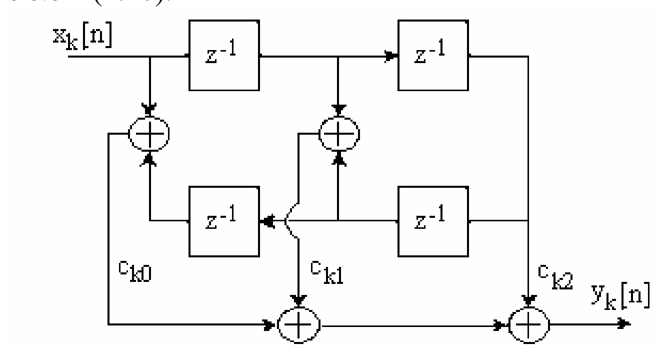


Figura 4.4. Secțiune de ordinul 4 în realizarea în cascadă a unui filtru FIR de fază liniară

4.2.3. Implementarea structurii cu eşantionare în frecvență

În implementarea cu eşantionare în frecvență a unui filtru FIR, parametrii ce caracterizează filtrul sunt valori ale răspunsului în frecvență dorit, în loc de răspunsul la impuls $h[n]$. Pentru a prezenta acest tip de structură se reaminteşte că răspunsul în frecvență dorit poate fi specificat pentru un anumit set de frecvențe egal depărtate, şi anume:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha),\ \alpha = 0 \text{ sau } \frac{1}{2}$$

$$k = 0,1,.....,\frac{M-1}{2},\quad M \text{ impar}$$

$$k = 0,1,.....,\frac{M}{2}-1,\quad M \text{ par}$$

Se alege $\alpha = \frac{1}{2}$ când răspunsul în frecvență în origine nu poate fi specificat, din motivele prezentate în paragraful 2.5. Dacă răspunsul în frecvență se exprimă sub forma

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega n},$$

atunci valorile lui $H(\omega)$ la frecvențele $\omega_k = (2\pi / M)(k+\alpha)$ sunt

$$H(k+\alpha)=H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)=\sum_{n=0}^{M-1}h[n]e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M},k=0,1,...,M-1 \quad (4.11)$$

Cazul $\alpha=0$ corespunde transformatei Fourier discrete (DFT) în M puncte a secvenței $\{h[n]\}$.

Din relația (4.11) rezultă

$$h[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} \qquad n = 0, 1, . . ., M\text{-}1 \qquad (4.12)$$

Pentru $\alpha=0$, $\{h[n]\}$ reprezintă transformata Fourier discretă inversă (IDFT) a lui $\{H(k)\}$. Dacă se înlocuieşte expresia lui $h[n]$ în expresia funcției de sistem, se obține

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M-1}h[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{M-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}\right]z^{-n} \qquad (4.13)$$

Schimbând ordinea de sumare în (4.13), se obține

$$\begin{aligned}H(z)&=\sum_{k=0}^{M-1}H(k+\alpha)\left[\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\left(e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}\right)^{n}\right]=\\&=\frac{1-z^{-M}e^{j2\pi\alpha}}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}}\end{aligned} \qquad (4.14)$$

Astfel, funcția de sistem, $H(z)$, este caracterizată de setul de eşantioane în frecvență $\{H(k+\alpha)\}$. Acest filtru FIR poate fi privit ca o cascadă de două filtre, $H(z) = H_1(z)H_2(z)$. Unul dintre ele este un filtru pieptene, cu funcția de sistem

$$H_1(z)=\frac{1}{M}(1-z^{-M}e^{j2\pi\alpha}) \qquad (4.15)$$

Zerourile sale sunt poziționate în puncte egal depărtate pe cercul unitate

$$z_k=e^{j2\pi(k+\alpha)/M} \qquad \text{k = 0, 1, …, M-1.}$$

Al doilea filtru, cu funcția de sistem

$$H_2(z)=\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}} \qquad (4.16)$$

constă dintr-un banc paralel de filtre cu un singur pol

$$p_k=e^{j2\pi(k+\alpha)/M} \qquad k = 0, 1, . . ., M\text{-}1$$

Se observă că poziționarea polilor este identică cu poziționarea zerourilor şi ambele apar la $\omega_k=2\pi(k+\alpha)/M$, care sunt frecvențele la care este specificat răspunsul în frecvență dorit. Acest tip de implementare este ilustrat în figura 4.5.

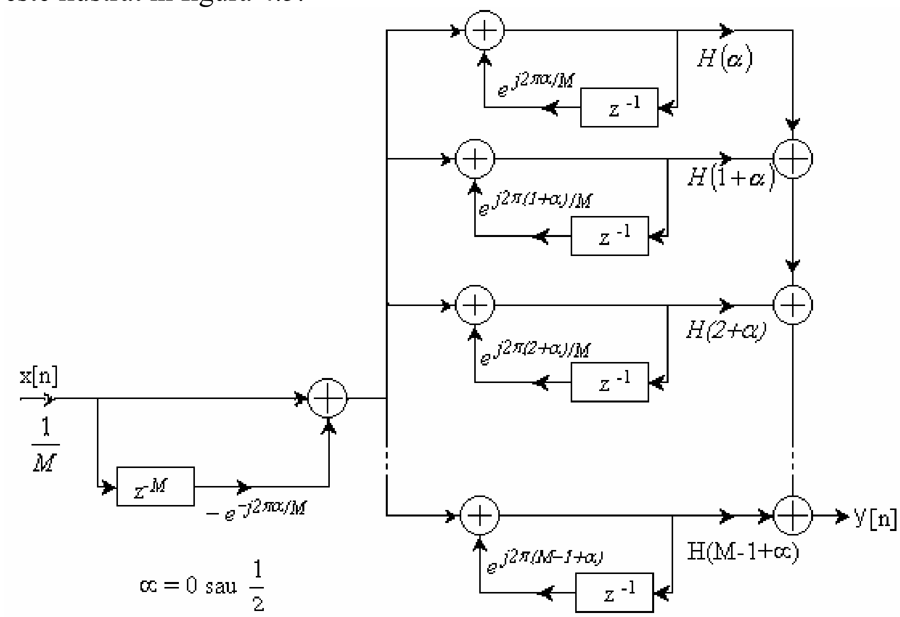


Figura 4.5. Implementarea cu eşantionare în frecvență pentru filtre FIR

Când caracteristica răspunsului în frecvență a filtrului FIR este de bandă îngustă, mulți dintre factorii de câştig $\{H(k+\alpha)\}$ vor fi zero. Prin urmare, filtrele rezonante corespunzătoare pot fi eliminate, reținându-se doar filtrele cu câştig nenul. Rezultatul este un filtru care necesită un număr mai mic de calcule (multiplicări şi adunări) față de implementarea în formă directă, obținându-se astfel o implementare mult mai eficientă. În cazul când răspunsul la impuls este real, structura cu eşantionare în frecvență poate fi simplificată şi mai mult, ținând seama de simetria în $H(k+\alpha)$, şi anume, $H(k) = H^*(M-k)$ pentru α = 0 şi $H\left(k+\frac{1}{2}\right) = H^*\left(M-k-\frac{1}{2}\right)$ pentru α = $\frac{1}{2}$. Aceste relații se deduc uşor din relația (4.11). Ca rezultat al acestei simetrii, o pereche de filtre cu un singur pol pot fi combinate pentru a forma un filtru cu doi poli cu coeficienți reali. Astfel, pentru α = 0 funcția de transfer $H_2(z)$ se reduce la

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/M)z^{-1}+z^{-2}} \ , \quad M \text{ impar} \qquad (4.17)$$

$$H_2(z)=\frac{H(0)}{1-z^{-1}}+\frac{H(M/2)}{1+z^{-1}}+\sum_{k=1}^{(M/2)-1}\frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi\, k/M)z^{-1}+z^{-2}}\,,\ M \text{ par} \tag{4.17'}$$

unde

$$A(k)=H(k)+H(M-k)$$
$$B(k)=H(k)e^{-j2\pi k/M}+H(M-k)e^{j2\pi k/M} \tag{4.18}$$

Expresii similare se pot obține și pentru α = ½.

Exemplul 4.1.

Să se deseneze diagrama bloc pentru implementarea formei directe și cea cu eșantionare în frecvență, pentru M = 32 și α = 0 , pentru filtrul FIR de fază liniară, cu funcția de transfer

$$H\left(\frac{2\pi\, k}{32}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2\\ \dfrac{1}{2}, & k=3\\ 0, & k=4,5,....,15\end{cases}$$

Să se compare complexitatea calculului pentru aceste două structuri.

Soluție. Deoarece filtrul este de fază liniară, răspunsul său la impuls prezintă o formă de simetrie care va conduce, în cazul implementării în forma directă, la reducerea numărului de multiplicări cu un factor de 2, adică de la 32 la 16. Numărul de sumatoare este 31. Diagrama bloc a formei directe de implementare este ilustrată în figura 4.6.

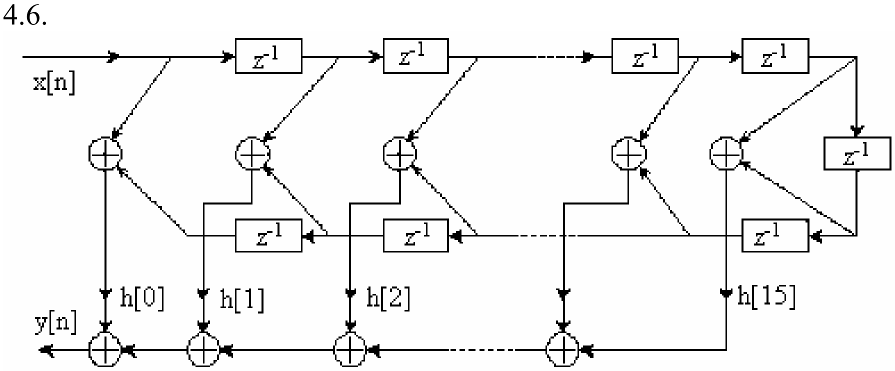


Figura 4.6. Implementarea în forma directă a filtrului FIR de fază liniară pentru M=32

În implementarea filtrului prin structura cu eșantionare în frecvență s-au folosit relațiile (4.15) și (4.17), în care s-au eliminat toți termenii care au coeficienții cu câştig zero $\{H(k)\}$. Coeficienții cu câştig nenul sunt $H(k)$ şi perechile corespunzătoare $H(M-k)$, pentru k = 0,1, 2, 3. Diagrama bloc pentru acest tip de implementare este indicată în figura 4.7. Deoarece $H(0)$ = 1, filtrul cu un singur pol nu necesită operații de multiplicare. Cele trei filtre cu doi poli necesită trei multiplicări fiecare, deci, în total, nouă multiplicări. Numărul total de sumări este 14. Prin urmare, implementarea cu eşantionare în frecvență a filtrului FIR, este, din punct de vedere al calculului, mult mai eficientă decât forma directă de implementare.

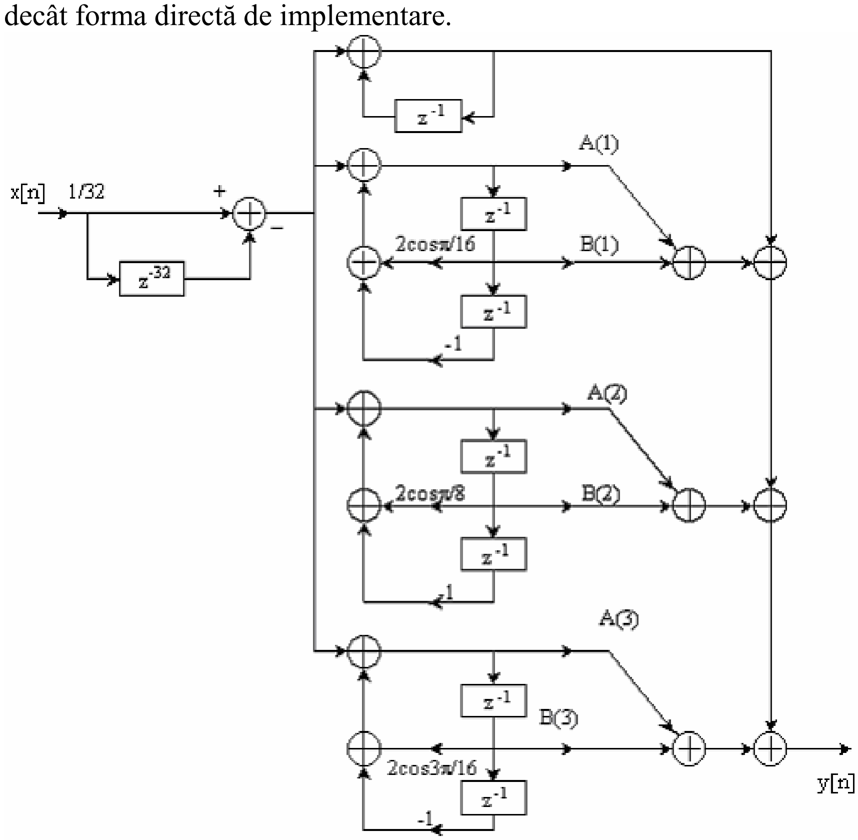


Figura 4.7. Implementarea cu eşantionare în frecvență a filtrului FIR din exemplul 4.1.

4.2.4. Structura lattice

În acest paragraf se introduce o altă structură de filtru FIR, numită *lattice*, des utilizată în implementarea filtrelor adaptive.

Se consideră o succesiune de filtre FIR cu funcțiile de transfer

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m = 0, 1, 2, ..., M\text{-}1 \tag{4.19}$$

unde, prin definiție $A_m(z)$ este un polinom

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_m[k] z^{-k} \qquad m \geq 1, \tag{4.20}$$

şi $A_0(z) = 1$. Răspunsul la impuls al filtrului de ordin m este $h_m[0] = 1$ şi $h_m[k] = \alpha_m[k]$, k = 1, 2, ….,m. Din considerente matematice se defineşte $\alpha_m[0] = 1$. Dacă $x[n]$ este secvența de intrare în filtrul $A_m(z)$ şi $y[n]$ secvența de ieşire, se poate scrie

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{m} \alpha_m[k] x[n-k] \tag{4.21}$$

Două structuri de realizare a filtrelor FIR în forma directă sunt date în figura 4.8.

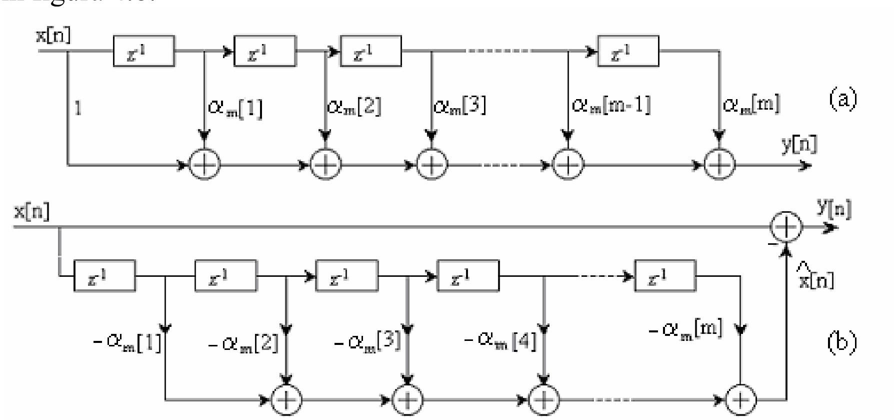


Figura 4.8. Forma directă de realizare pentru (a) un filtru FIR, (b) un filtru FIR predictor

Structurile din figura 4.8 sunt în strânsă legătură cu predicția liniară [16], unde

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{m} \alpha_m[k] x[n-k] \tag{4.22}$$

este valoarea prezisă a lui $x[n]$ pe baza a m intrări anterioare, $x[n\text{-}1]$, $x[n\text{-}2]$, …, $x[n\text{-}m]$, iar $y[n] = x[n] - \hat{x}[n]$, dat de (4.21), reprezintă eroarea de predicție. Astfel, ieşirea filtrului FIR dată de relația (4.21) poate fi văzută ca eroarea între valoarea adevărată a semnalului $x[n]$ şi valoarea prezisă $\hat{x}[n]$.

Se consideră un filtru de ordinul m = 1. Ieşirea unui astfel de filtru este

$$y[n] = x[n] + \alpha_1[1]x[n-1] \tag{4.23}$$

În figura 4.9 se prezintă un filtru lattice de ordinul întâi sau un filtru lattice cu o singură treaptă. Dacă în această structură se excită ambele intrări cu $x[n]$ şi se selectează ieşirea de pe ramura de sus, se obține exact semnalul dat de relația (4.23), dacă se alege K_1=α_1[1]. Parametrul K_1 din structura lattice este denumit *coeficient de reflexie*.

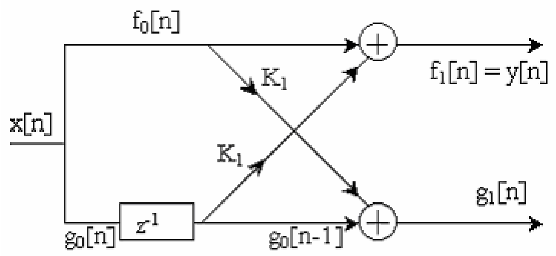


Figura 4.9. Filtru lattice cu o treapta

Pentru această structură se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} f_0[n] &= g_0[n] = x[n] \\ f_1[n] &= f_0[n] + K_1 g_0[n-1] = x[n] + K_1 x[n-1] \\ g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] = K_1 x[n] + x[n-1] \end{aligned} \tag{4.24}$$

În continuare, se consideră un filtru FIR pentru care m = 2. În acest caz ieşirea structurii în formă directă este

$$y[n] = x[n] + \alpha_2[1]x[n-1] + \alpha_2[2]x[n-2] \tag{4.25}$$

Conectând în cascadă două trepte de structuri lattice ca în figura 4.10, este posibil a se obține ieşirea ca în relația (4.25).

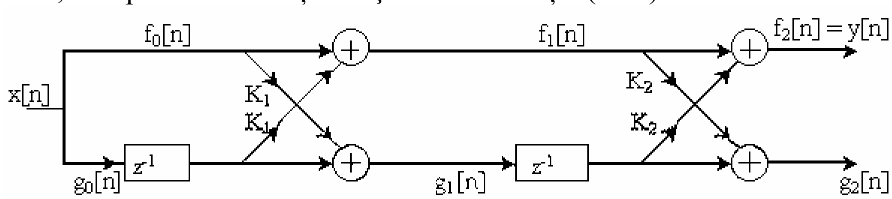


Figura 4.10. Filtru lattice cu două trepte

Ieşirea din prima treaptă este dată de relația (4.24), iar ieşirea din treapta a doua este

$$\begin{aligned} f_2[n] &= f_1[n] + K_2 g_1[n-1] \\ g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \end{aligned} \tag{4.26}$$

Înlocuind $f_1[n]$ şi $g_1[n]$ din relația (4.24) în relația (4.26) se obține

$$\begin{aligned} f_2[n] &= x[n] + K_1 x[n-1] + K_2\left[K_1 x[n-1] + x[n-2]\right] \\ &= x[n] + K_1(1+K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2] \end{aligned} \tag{4.27}$$

Relația (4.27) este identică cu ieşirea filtrului FIR în forma directă dată de (4.25), dacă între coeficienți există relațiile

$$\alpha_2[2] = K_2 \qquad \alpha_2[1] = K_1(1+K_2) \tag{4.28}$$

sau, echivalent

$$K_2 = \alpha_2[2] \qquad K_1 = \frac{\alpha_2[1]}{1+\alpha_2[2]} \tag{4.29}$$

Astfel, coeficienții de reflexie ai structurii lattice, K_1 şi K_2, pot fi obținuți din coeficienții $\{\alpha_m[k]\}$ ai formei directe de implementare.

Continuând procedeul de cascadare a structurilor lattice, se poate demonstra prin inducție echivalența dintre filtrul FIR de ordin m implementat în forma directă şi filtrul lattice de ordin m sau cu m trepte.

Filtrul lattice este descris, în general, de următorul sistem de ecuații recursive:

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n] \tag{4.30}$$

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \qquad m = 1,2,...,M-1 \tag{4.31}$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \qquad m = 1,2,...,M-1 \tag{4.32}$$

Ieşirea filtrului cu (M-1) trepte corespunde ieşirii filtrului FIR de ordin (M-1). Prin urmare

$$y[n] = f_{M-1}[n].$$

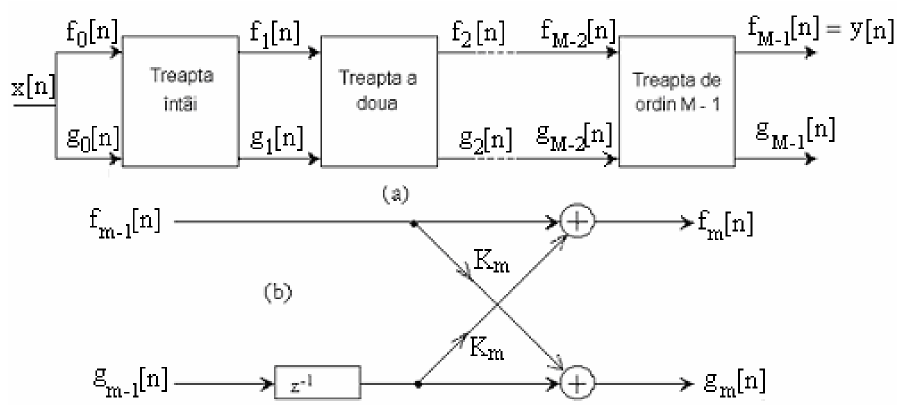


Figura 4.11. (a) Filtru lattice cu M-1 trepte, (b) Structura unei trepte

Figura 4.11 ilustrează un filtru lattice cu M-1 trepte într-o diagramă bloc, împreună cu structura unei trepte, caracterizată de relațiile (4.31) şi (4.32).

Ca urmare a echivalenței între un filtru FIR în formă directă şi un filtru lattice, ieşirea $f_m[n]$ a unui filtru lattice de ordin m poate fi exprimată sub forma

$$f_m[n] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_m[k]x[n-k] \qquad \alpha_m[0] = 1 \tag{4.33}$$

Deoarece relația (4.33) este o sumă de convoluție, transformata sa Z este

$$F_m(z) = A_m(z)X(z)\text{, unde } A_m(z) = Z\{\alpha_m[n]\} \tag{4.34}$$

sau, echivalent

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \tag{4.34'}$$

Cealaltă ieşire a structurii lattice, $g_m[n]$, ar putea fi, de asemenea, exprimată sub forma unei sume de convoluție ca în relația (4.33), utilizând un alt set de coeficienți, notați $\{\beta_m[k]\}$. Din relația (4.24) se observă cum coeficienții filtrului care produce ieşirea $f_1[n]$ sunt $\{1, K_1\} = \{1, \alpha_1[1]\}$ în timp ce coeficienții filtrului cu ieşirea $g_1[n]$, sunt $\{K_1, 1\} = \{\alpha_1[1], 1\}$. Se observă că aceste două seturi de coeficienți sunt în ordine inversă. Dacă se consideră filtrul cu două trepte, cu ieşirea dată de relația (4.27), atunci $g_2[n]$ ar putea fi exprimat sub forma

$$\begin{aligned} g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ &= K_2\left[x[n] + K_1 x[n-1]\right] + K_1 x[n-1] + x[n-2] \\ &= K_2 x[n] + K_1(1+K_2)x[n-1] + x[n-2] \\ &= \alpha_2[2]x[n] + \alpha_2[1]x[n-1] + x[n-2] \end{aligned}$$

În consecință, coeficienții filtrului sunt $\{\alpha_2[2], \alpha_2[1], 1\}$, iar pentru filtrul ce produce ieşirea $f_2[n]$ sunt $\{1, \alpha_2[1], \alpha_2[2]\}$. Aici, din nou, cele două seturi de coeficienți sunt în ordine inversă.

Din dezvoltarea de mai sus se observă că ieşirea $g_m[n]$ a filtrului lattice de ordin m ar putea fi exprimată cu ajutorul sumei de convoluție

$$g_m[n] = \sum_{k=0}^{m} \beta_m[k]x[n-k] \tag{4.35}$$

unde coeficienții filtrului, $\{\beta_m[k]\}$, sunt asociați cu ai filtrului care produce ieşirea $f_m[n] = y[n]$, dar care operează în ordine inversă.

Se presupune în continuare că valorile $x[n]$, $x[n\text{-}1]$, . . . ,$x[n\text{-}m\text{+}1]$, sunt utilizate pentru predicția liniară a eşantionului de semnal $x[n\text{-}m]$ [47]. Valoarea prezisă este

$$\hat{x}[n-m] = -\sum_{k=0}^{m-1} \beta_m[k]x[n-k] \tag{4.36}$$

unde coeficienții $\beta_m[k]$ ai filtrului predictor sunt chiar coeficienții $\{\alpha_m[k]\}$ luați în ordine inversă, prin urmare

$$\beta_m[k] = \alpha_m[m-k] \qquad k = 0, 1, \ldots, m \tag{4.37}$$

Predicția efectuată pe baza relației (4.36) se numeşte *predicție inversă* sau *înapoi*, adică datele circulă în sens invers prin predictorul cu coeficienții $\{-\beta_m[k]\}$. Față de acesta, filtrul cu funcția de transfer $A_m(z)$, dată de (4.34') efectuează o *predicție directă* sau *înainte.*

În domeniul transformatei Z, relația (4.35) devine

$$G_m(z) = B_m(z)X(z)\text{, unde } B_m(z) = Z\{\beta_m[n]\} \tag{4.38}$$

Rezultă atunci

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \tag{4.39}$$

$B_m(z)$ reprezintă funcția de sistem a filtrului FIR cu coeficienții $\{\beta_m(k)\}$, care se poate scrie

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \beta_m[k]z^{-k} \tag{4.40}$$

Înlocuind (4.37) în (4.40) se obține

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_m[m-k]z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^{m} \alpha_m[l]z^{l-m} = z^{-m}\sum_{l=0}^{m} \alpha_m[l]z^{l} = z^{-m}A_m(z^{-1}) \end{aligned} \tag{4.41}$$

Din relația (4.41) rezultă că zerourile filtrului FIR cu funcția de transfer $B_m(z)$ sunt reciproce zerourilor lui $A_m(z)$. Din acest motiv $B_m(z)$ este numit polinom *reciproc* sau *invers* al lui $A_m(z)$.

Aplicând transformata Z relațiilor recursive (4.30) ÷ (4.32), se obține

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \tag{4.42}$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, M\text{-}1 \tag{4.43}$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, M\text{-}1 \tag{4.44}$$

Împărțind fiecare ecuație prin $X(z)$, se obțin rezultatele dorite, sub forma

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \qquad (4.45)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, M\text{-}1 \qquad (4.46)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \ldots, M\text{-}1 \qquad (4.47)$$

Astfel, o treaptă lattice, este descrisă în domeniul Z de o ecuație matriceală de forma

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \qquad (4.48)$$

4.2.4.1. Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului în formă directă

Coeficienții filtrului FIR realizat în formă directă $\{\alpha_m[k]\}$ pot fi obținuți din coeficienții $\{K_i\}$ ai structurii lattice, folosind următoarele relații:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \qquad (4.49)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, M\text{-}1 \quad (4.50)$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \qquad m = 1, 2, \ldots, M\text{-}1 \quad (4.51)$$

Soluția este obținută recursiv, începând cu rangul m = 1. Astfel se obține o succesiune de (M-1) filtre FIR, fiecare din ele pentru o valoare a lui m. Procedura este ilustrată în exemplul următor.

Exemplul 4.2.

Se dă un filtru lattice cu trei trepte având coeficienții $K_1 = 1/4$, $K_2 = 1/2$, $K_3 = 1/3$. Să se determine coeficienții filtrului FIR în formă directă.

Soluție. Problema se rezolvă recursiv, utilizând relația (4.50) începând cu m = 1.

Astfel, $A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}$.

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu o singură treaptă, sunt $\alpha_1[0] = 1, \alpha_1[1] = K_1 = 1/4$.

Deoarece $B_m(z)$ este reciprocul lui $A_m(z)$, rezultă $B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}$.

Se adaugă a doua treaptă structurii lattice. Pentru m=2, din (4.50) rezultă

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$$

Parametrii filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu două trepte sunt $\alpha_2[0] = 1, \alpha_2[1] = 3/8, \alpha_2[2] = 1/2$. Din (4.51) rezultă atunci

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

În final, prin adăugarea celei de-a treia trepte în structura lattice, rezultă polinomul

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

şi, ca urmare, filtrul FIR în formă directă este caracterizat de coeficienţii

$$\alpha_3[0] = 1,\ \alpha_3[1] = \frac{13}{24},\ \alpha_3[2] = \frac{5}{8},\ \alpha_3[3] = \frac{1}{3}$$

În general, structura lattice cu parametrii $K_1, K_2, ..., K_m$, corespunde unei clase de m filtre FIR în forma directă cu funcţiile de sistem $A_1(z), A_2(z), ..., A_m(z)$. Este interesant de observat că o caracterizare a acestei clase de filtre FIR în formă directă necesită $m(m+1)/2$ coeficienţi, în timp ce o caracterizare lattice necesită doar m coeficienţi de reflexie $\{K_i\}$. Motivul pentru care structura lattice produce o reprezentare mult mai compactă pentru clasa de filtre FIR de ordin m se datoreză faptului că adăugarea treptelor la structura lattice nu modifică parametrii treptelor anterioare, în timp ce coeficienţii funcţiei de sistem $A_m(z)$ sunt total diferiţi de coeficienţii unui filtru FIR de ordin inferior, cu funcţia de sistem $A_{m-1}(z)$.

O formulă pentru determinarea recursivă a coeficienţilor $\{\alpha_m[k]\}$ ai filtrului poate fi obţinută din polinoamele date în relaţiile (4.49)÷(4.51).

Din relaţia (4.50) se obţine

$$\begin{aligned} &A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \Leftrightarrow \\ &\sum_{k=0}^{m} \alpha_m[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}[k] z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}[m-1-k] z^{-(k+1)} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Prin egalarea coeficienţilor de puteri egale a lui z^{-1} şi reamintind că $\alpha_m[0] = 1$ pentru m = 1,2,...,M-1, se obţin ecuaţiile recursive dorite pentru coeficienţii filtrului FIR sub forma

$$\alpha_m[0] = 1 \tag{4.53}$$

$$\alpha_m[m] = K_m \tag{4.54}$$

$$\begin{gathered}\alpha_m[k] = \alpha_{m-1}[k] + K_m \alpha_{m-1}[m-k] = \alpha_{m-1}[k] + \alpha_m[m]\alpha_{m-1}[m-k] \\ 1 \le k \le m-1,\ m = 1, 2, \ldots M-1.\end{gathered} \tag{4.55}$$

4.2.4.2. Conversia coeficienților filtrului FIR din forma directă în coeficienți ai structurii lattice

Dacă se cunosc coeficienții filtrului FIR pentru implementarea în formă directă sau, echivalent, polinomul $A_m(z)$ şi se doreşte determinarea coeficienților corespunzători structurii lattice, de ordin m, atunci $K_m = \alpha_m[m]$. Pentru a obține coeficientul K_{m-1} sunt necesare polinoamele $A_{m-1}(z)$ deoarece, în general, K_m este obținut din polinomul $A_m(z)$ pentru m=M-1, M-2,..,1. Prin urmare, trebuie calculate succesiv polinoamele $A_m(z)$, începând de la m = M-1 până la m = 1.

Relația recursivă dorită pentru polinoame se determină uşor din (4.46) şi (4.47).

$$\begin{aligned}A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ &= A_{m-1}(z) + K_m \left[B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)\right]\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \qquad m = M-1, M-2, \ldots, 1 \tag{4.56}$$

Astfel se calculează toate polinoamele de grad inferior $A_m(z)$ începând cu $A_{M-1}(z)$ şi se obțin coeficienții doriți ai structurii lattice din relația $K_m = \alpha_m[m]$. Se observă că procedura prezentată este operațională atât timp cît $\left|K_m\right| \ne 1$ pentru m = 1, 2, ...,M-1.

Din ecuația recursivă (4.56), se poate obține o formulă pentru calculul recursiv al coeficienților K_m, începând cu m = M-1 până la m=1. Pentru m = M-1, M-2,...,1 se obține

$$K_m = \alpha_m[m] \qquad \alpha_{m-1}[0] = 1 \tag{4.57}$$

$$\alpha_{m-1}[k] = \frac{\alpha_m[k] - K_m \beta_m[k]}{1 - K_m^2} = \frac{\alpha_m[k] - \alpha_m[m]\alpha_m[m-k]}{1 - \alpha_m^2[m]},\ 1 \le k \le m-1 \tag{4.58}$$

de asemenea, recursivă.

Ecuația recursivă (4.58) nu poate fi folosită, dacă $|K_m| = 1$. Dacă aceasta se întâmplă, înseamnă că polinomul $A_{m-1}(z)$ are o rădăcină pe cercul unitate. Aceasta poate fi factorizată în polinomul $A_{m-1}(z)$ şi procesul iterativ dat de relația (4.58) se reia pentru sistemul de ordin redus.

Exemplul 4.3.

Să se determine coeficienții structurii lattice corespunzătoare filtrului FIR cu funcția de sistem

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

Soluție. Mai întâi se observă că $K_3 = \alpha_3[3] = \dfrac{1}{3}$. Mai departe,

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8} z^{-1} + \frac{13}{24} z^{-2} + z^{-3}$$

Relația de decrementare din (4.56), cu m =3, conduce la

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$$

Prin urmare, $K_2 = \alpha_2[2] = 1/2$ şi $B_2(z) = 1/2 + (3/8) z^{-1} + z^{-1}$. Repetând decrementarea recursivă, se obține

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}$$

Astfel, $K_1 = \alpha_1[1] = \dfrac{1}{4}$.

4. 3. Implementarea sistemelor cu răspuns infinit la impuls

În această secțiune se consideră diferite structuri de sisteme de tip IIR descrise prin ecuația cu diferențe (4.1) sau, echivalent, prin funcția de sistem (4.2). Ca şi în cazul sistemelor FIR, există mai multe tipuri de structuri de implementare, incluzând structura în *formă directă*, structura în *cascadă*, în *paralel*, structura *lattice numai cu poli* şi structura *lattice cu poli şi zerouri*.

4.3.1. Implementarea în formă directă

Funcția de sistem dată în relația (4.2) ce caracterizează un sistem IIR, poate fi văzută ca o cascadă de două sisteme, astfel încât

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{4.59}$$

unde $H_1(z)$ conține toate zerourile lui $H(z)$ iar $H_2(z)$ conține toți polii lui $H(z)$, adică

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{4.60}$$

şi

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4.61}$$

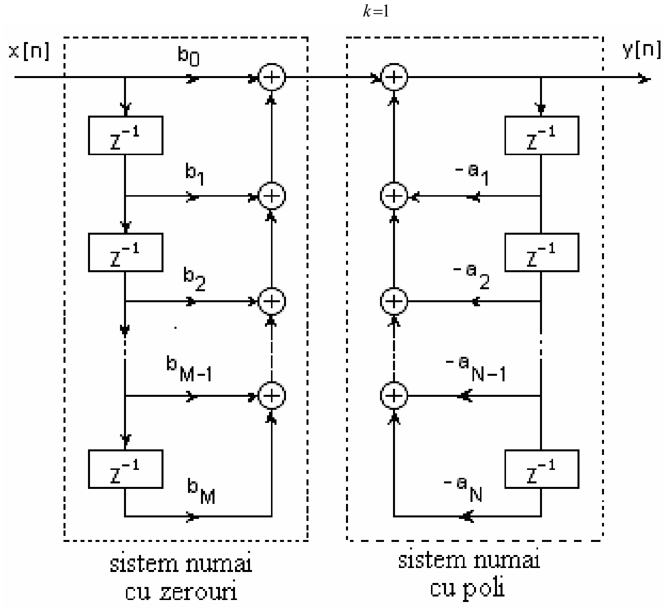


Figura 4.12. Implementarea sistemului IIR în forma directă I

$H_1(z)$ este un sistem FIR, iar implementarea sa în formă directă a fost prezentată în figura 4.1. Conectând sistemul numai cu poli $H_2(z)$ în cascadă cu $H_1(z)$, se obține implementarea în *forma directă I*, ilustrată în figura 4.12. Această implementare necesită *M*+*N*+1 multiplicatoare, *M*+*N* sumatoare, şi *M*+*N* locații de memorie.

Dacă filtrul numai cu poli, $H_2(z)$, este plasat înaintea filtrului numai cu zerouri, $H_1(z)$, se obţine o structură mai compactă. Se reaminteşte că ecuaţia cu diferenţe pentru un filtru numai cu poli este

$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n] \tag{4.62}$$

Dacă $w[n]$ este intrarea sistemului numai cu zerouri, atunci ieşirea sa este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k] \tag{4.63}$$

Se observă că ambele relaţii (4.62) şi (4.63) implică versiuni întârziate ale secvenţei $\{w[n]\}$. Prin urmare, este necesară doar o singură linie de întârziere sau un singur set de locaţii de memorie pentru a stoca valori trecute ale lui $\{w[n]\}$. Structura rezultată care implementează (4.62) şi (4.63) este numită implementarea în *formă directă II* şi este ilustrată în figura 4.13.

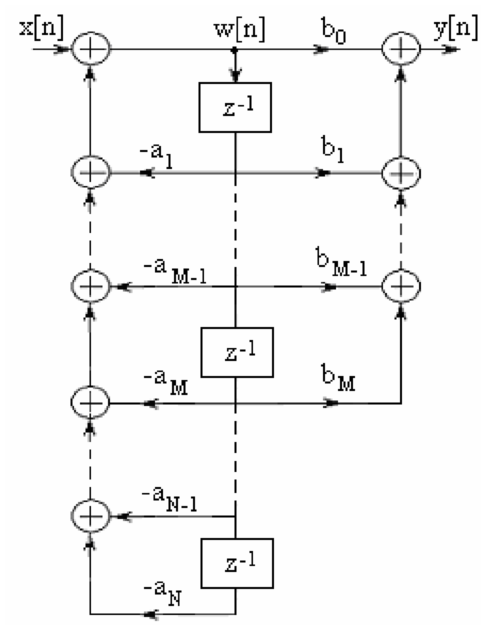


Figura 4.13. Implementarea sistemului IIR în forma directă II

Această structură necesită $M+N+1$ multiplicatoare, $M+N$ sumatoare, şi maximul dintre $\{M, N\}$ de locaţii de memorie. Implementarea care minimizează numărul de locații de memorie se numeşte *canonică*. Forma directă II este *canonică*.

Structurile din figurile 4.12 şi 4.13 sunt amândouă numite implementări în “formă directă” deoarece ele se obțin direct din funcția de sistem $H(z)$ fără nici o rearanjare a acesteia. Din nefericire, ambele implementări sunt, în general, extrem de senzitive la cuantizarea parametrilor şi nu sunt recomandate în aplicații practice, problemă detaliată în Capitolul 5.

4.3.2. Grafuri de semnal şi structuri transpuse

Un graf de semnal oferă o alternativă echivalentă de reprezentare a structurilor de diagramă bloc şi este utilizat pentru a ilustra diferite implementări ale sistemelor. Elementele de bază ale unui graf sunt *nodurile* şi *ramurile*. Un *graf de semnal* are la bază un set de *ramuri orientate* ce se conectează la *noduri.* Prin definiție, semnalul care iese dintr-o ramură este egal cu semnalul care intră în ramură înmulțit cu câştigul ramurii. Suma algebrică a semnalelor din toate ramurile conectate la un nod al unui graf de semnal este egală cu zero.

Pentru fixarea ideilor, se va considera un sistem cu două zerouri şi cu doi poli ca în diagrama bloc din figura 4.14a, structură echivalentă cu cea din figura 4.14.b. Diagrama bloc a sistemului poate fi convertită într-un graf de semnal ca în figura 4.14c. Se observă că graful de semnal conține cinci noduri etichetate de la 1 la 5. Nodurile care conțin sumatoare se numesc *de sumare*, iar cele în care se conectează două sau mai multe ramuri şi nu conțin sumatoare, se numesc *de branşare*. Ambele tipuri de noduri se reprezintă la fel în graf. Două dintre noduri, (1,3), sunt noduri de sumare, în timp ce celelalte noduri reprezintă puncte de branşare din graf. Transmitanțele ramurilor sunt indicate pe ramurile grafului. Se observă că o întârziere este indicată prin transmitanța z^{-1}. Când transmitanța ramurii este unitară, ea rămâne neetichetată. Nodul corespunzător intrării în sistem se numeşte *nod sursă* iar nodul corespunzător semnalului de ieşire, *nod receptor*. Se mai observă că graful de semnal conține aceleaşi informații de bază ca şi implementarea diagramei bloc a unui sistem. Singura diferență aparentă este că atât sumatoarele cît şi punctele de branşare a ramurilor sunt reprezentate prin noduri în graf.

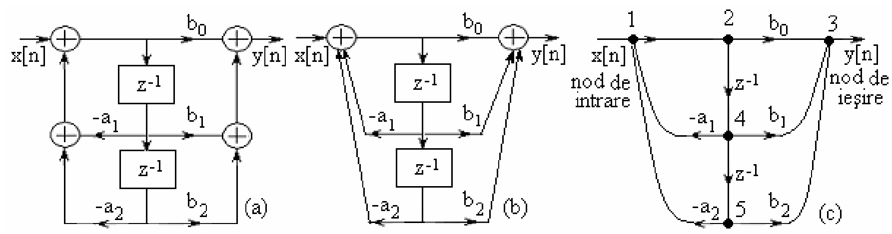


Figura 4.14. (a), (b) Filtru de ordinul 2 şi (c) graful de semnal corespunzător

Un rezultat de bază din teoria grafurilor se referă la transformarea unui graf de semnal în altul fără a modifica relaţiile funcţionale intrare-ieşire. O tehnică utilizată în obţinerea structurilor echivalente pentru sisteme IIR şi FIR este dată de *teorema reversibilităţii grafului* [48]. Această teoremă enunţă faptul că dacă se inversează direcţiile tuturor transmitanţelor ramurilor, nodurile de sumare se schimbă în noduri de branşare, şi invers, şi se inversează intrarea cu ieşirea în graful de semnal, funcţia de sistem rămâne neschimbată. Structura rezultată este denumită *structură* sau *formă transpusă.*

De exemplu, transpunerea grafului de semnal din figura 4.14c, este ilustrată în figura 4.15a. Implementarea diagramei bloc corespunzătoare a formei transpuse este ilustrată în figura 4.15b.

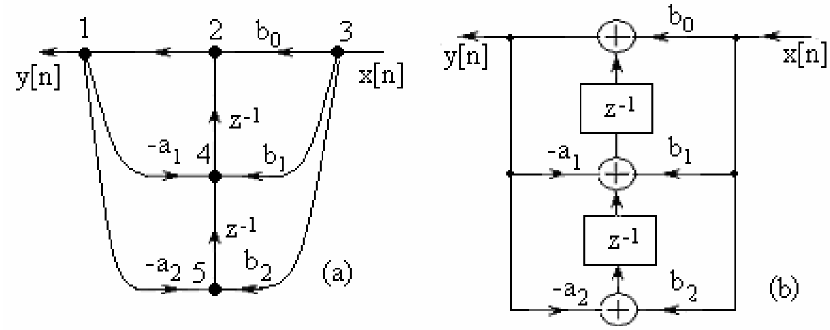


Figura 4.15. (a) Graful de semnal al structurii transpuse şi (b) implementarea sa

În continuare se va aplica teorema de transpunere formei directe II, inversându-se toate direcţiile ramurilor din figura 4.13, schimbând nodurile de branşare cu sumatoare şi sumatoarele cu noduri de branşare, şi în final, interschimbând intrarea şi ieşirea. Aceste operaţii duc la structura formei directe II transpuse, ca în figura 4.16a. Această figură poate fi redesenată ca în figura 4.16b în care se indică intrarea la stânga şi ieşirea la dreapta.

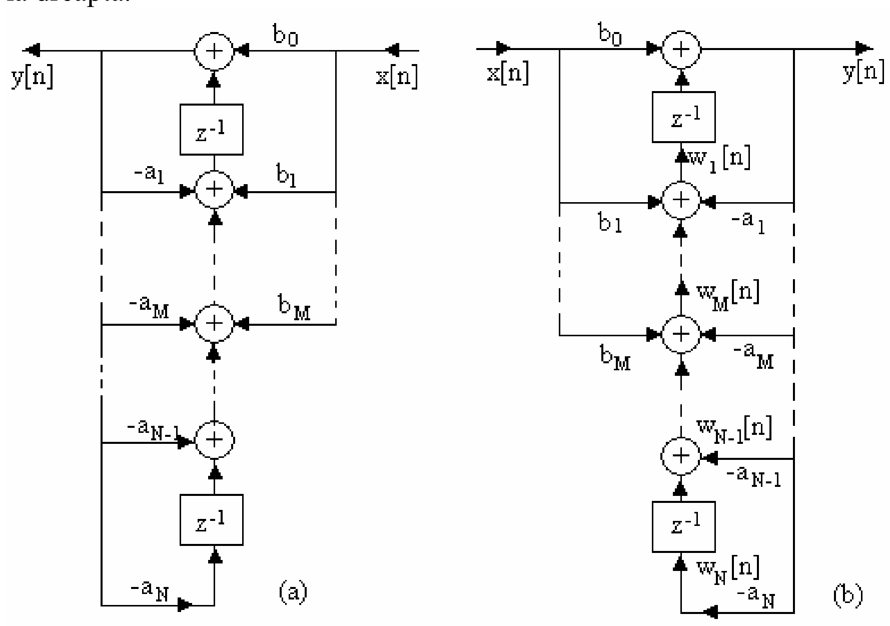


Figura 4.16 a, b, Structura în forma directă II transpusă

Această formă transpusă a structurii în forma directă II poate fi descrisă de următorul sistem de ecuaţii cu diferenţe, pentru N>M:

$$y[n] = w_1[n-1] + b_0 x[n] \tag{4.64}$$

$$w_k[n] = w_{k+1}[n-1] - a_k y[n] + b_k x[n] \quad k = 1,2,....,M \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned} &w_k[n] = w_{k+1}[n-1] - a_k y[n],\ k = M+1,...,N-1 \\ &w_N[n] = -a_N y[n] \end{aligned} \tag{4.66}$$

Sistemul de ecuaţii cu diferenţe (4.64) ÷ (4.66) este echivalent cu o singură ecuaţie cu diferenţe:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{4.67}$$

Se observă că transpusa structurii în formă directă II necesită un număr de multiplicatoare, sumatoare şi locaţii de memorie egal cu cel al structurii în forma directă originală. Performanţele structurilor directe şi transpuse pot fi diferite în implementarea cu precizie finită, acestea depinzând de valorile particulare ale parametrilor, după cum se va arăta în Capitolul 5.

Un sistem FIR se obține din relația (4.67) impunând $a_k = 0, k = 1,2,...,N$. Acesta poate fi implementat în forma directă transpusă prezentată în figura 4.17, ce se obține din figura 4.16b impunând $a_k = 0,\ k = 1,2,....,N$. Implementare în formă transpusă poate fi descrisă prin sistemul de ecuații cu diferențe

$$w_M[n] = b_M x[n] \tag{4.68}$$

$$w_k[n] = w_{k+1}[n-1] + b_k x[n] \quad k = M-1, M-2,...,1 \tag{4.69}$$

$$y[n] = w_1[n-1] + b_0 x[n] \tag{4.70}$$

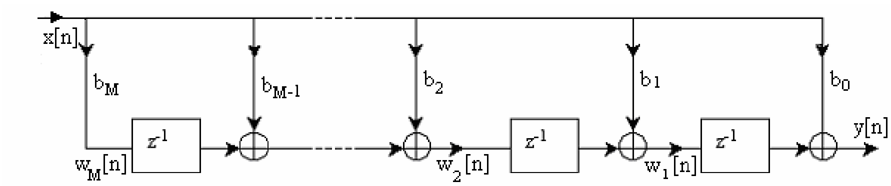


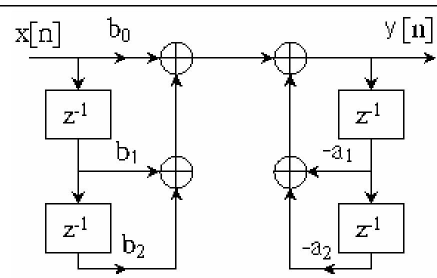
Figura 4.17. Structura transpusa pentru un filtru FIR

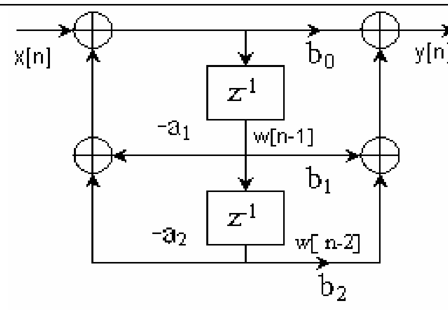
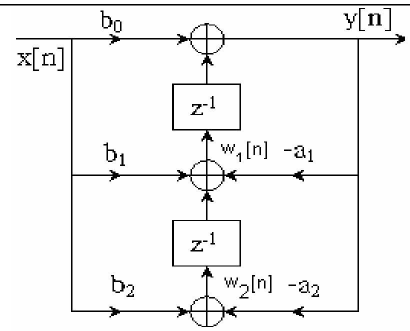
În tabelul 4.1 sunt prezentate câteva structuri în formă directă şi ecuațiile cu diferențe corespunzătoare pentru un sistem IIR cu doi poli şi două zerouri având funcția de sistem

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{4.71}$$

Acesta este blocul de bază în implementarea sistemelor IIR de ordin înalt. Din cele trei structuri în formă directă prezentate în Tabelul 4.1, structura în formă directă II este cea mai utilizată datorită numărului mic de locații de memorie necesar pentru implementare.

Tabelul 4.1

	Structuri	Ecuații de implementare
Forma directă I		$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$ $+ b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1]$ $- a_2 y[n-2]$

<table>
<tr>
<td>Forma directă II</td>
<td>
</td>
<td>$w[n] = -a_1 w[n-1]$
$- a_2 w[n-2] + x[n]$
$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1]$
$+ b_2 w[n-2]$</td>
</tr>
<tr>
<td>Forma directă II transpusă</td>
<td>
</td>
<td>$y[n] = b_0 x[n] + w_1[n-1]$
$w_1[n] = b_1 x[n] - a_1 y]n]$
$+ w_2[n-1]$
$w_2[n] = b_2 x[n] - a_2 y[n]$</td>
</tr>
</table>

4.3.3. Implementarea în cascadă a sistemelor IIR

Se consideră un sistem IIR cu funcția de sistem dată de relația (4.2). De asemenea, se consideră că $N \geq M$. Sistemul poate fi divizat într-o cascadă de subsisteme de ordin doi, astfel încât $H(z)$ poate fi exprimat ca

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{4.72}$$

unde K este partea întreagă a lui $(N+1)/2$. $H_k(z)$ are forma generală

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} \tag{4.73}$$

iar b_0 este factorul de câştig.

Ca şi în cazul sistemelor FIR implementate în cascadă, factorul de câştig poate fi egal distribuit celor K secțiuni ale filtrului astfel că se poate scrie

$$b_0 = b_{10} b_{20} b_{30},\ldots, b_{K0}.$$

Coeficienții $\{a_{ki}\}$ şi $\{b_{ki}\}$ din subsistemele de ordinul al doilea sunt reali. Aceasta implică faptul că în formarea subsistemelor de ordinul al doilea din (4.73), trebuie grupate perechile de poli şi zerouri complex conjugate. Cu toate acestea, împerecherea a doi poli complex conjugați sau reali cu o pereche de zerouri complex-conjugate sau reale, pentru a forma un subsistem poate fi făcută arbitrar. Prin urmare, factorul pătratic de la numărătorul sau numitorul relației (4.73), ar putea conține o pereche de rădăcini reale sau o pereche de rădăcini complex-conjugate. Dacă $N > M$, unele subsisteme de ordinul al doilea ar putea avea unii coeficienți de la numărător nuli. Dacă N este impar, unul dintre subsisteme, să zicem $H_k(z)$, trebuie să aibă $a_{k2} = 0$, astfel că subsistemul este de ordinul întâi. Pentru a păstra o anumită modularitate în implementarea lui $H(z)$, este preferabil de utilizat subsistemele de ordinul al doilea în structurile cascadă şi de a avea coeficienți nuli în unele dintre subsisteme.

Fiecare din subsistemele de ordinul al doilea cu funcția de sistem (4.73), poate fi implementat fie în forma directă I, fie în forma directă II sau în forma directă II transpusă. Deoarece există mai multe moduri de împerechere a polilor şi zerourilor lui $H(z)$ într-o cascadă de secțiuni de ordinul al doilea, şi mai multe moduri de ordonare a subsistemelor rezultate, este posibil a se obține o varietate de implementări în cascadă. Deşi toate implementările în cascadă sunt echivalente pentru precizie infinită, diferitele tipuri de implementări pot diferi semnificativ când sunt implementate cu aritmetică de precizie finită.

Forma generală a unei structuri în cascadă este ilustrată în figura 4.18. Folosind structura în forma directă II pentru fiecare subsistem, algoritmul de calcul pentru implementarea sistemului IIR cu funcția de sistem $H(z)$, este descris de următorul sistem de ecuații

$$y_0[n] = x[n] \tag{4.74}$$

$$w_k[n] = -a_{k1} w_k[n-1] - a_{k2} w_k[n-2] + y_{k-1}[n] \quad k = 1,2,.....,K \tag{4.75}$$

$$y_k[n] = w_k[n] + b_{k1} w_k[n-1] + b_{k2} w_k[n-2] \quad k = 1,2,....,K \tag{4.76}$$

$$y[n] = b_0 y_K[n] \tag{4.77}$$

Acest sistem de ecuații dă o descriere completă a unei structuri în cascadă implementată cu module în forma directă II.

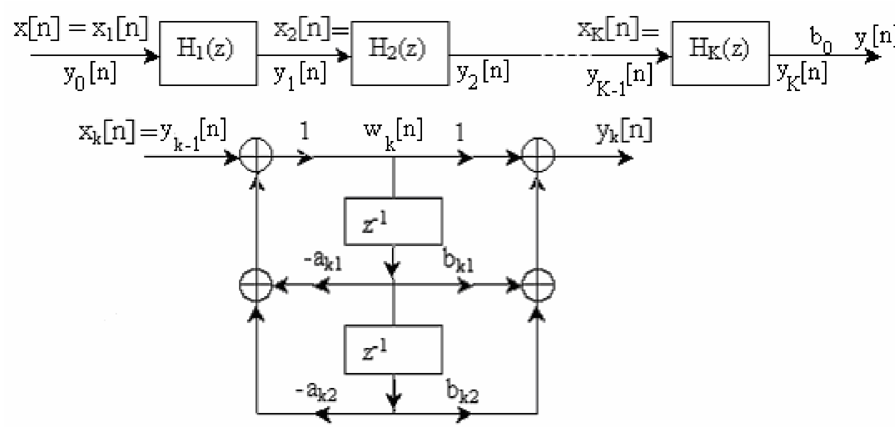


Figura 4.18. Structura în cascadă cu secțiuni de ordinul II şi realizarea în forma directă II a fiecărei secțiuni

4.3.4. Implementarea în paralel

Implementarea în paralel a unui sistem IIR poate fi obținută efectuând o dezvoltare în fracții simple a lui $H(z)$. Din nou se presupune că $N \geq M$ şi că polii sunt distincți. Prin această dezvoltare în fracții simple, se obține

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \tag{4.78}$$

unde $\{p_k\}$ sunt polii, $\{A_k\}$ sunt coeficienții (reziduurile) în dezvoltarea în fracții simple, constanta C este $C = b_N / a_N$ dacă $N=M$ şi nulă dacă $N>M$.

Implementarea relației (4.78) se realizează cu un banc paralel de filtre cu un singur pol. Unii dintre polii lui $H(z)$ pot avea valori complexe. În acest caz, coeficienții A_k corespunzători au, de asemenea, valori complexe. Pentru a evita operațiile cu numere complexe, se pot combina perechi de poli complex conjugați pentru a forma subsisteme de ordinul al doilea cu coeficienți reali. Fiecare din aceste subsisteme are funcția de sistem

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} \tag{4.79}$$

unde coeficienții $\{b_{ki}\}$și $\{a_{ki}\}$ sunt reali. Funcția generală $H(z)$ poate fi scrisă sub forma

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{4.80}$$

unde K este partea întreagă a lui (N+1)/2. Când N este impar unul dintre sistemele $H_k(z)$ este cu un singur pol ($b_{k1} = a_{k2} = 0$). Relația (4.80) conduce la structura din figura 4.19a.

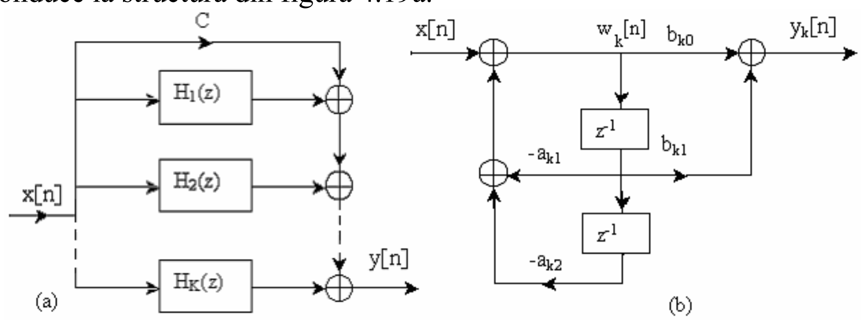


Figura 4. 19. (a) Structura în paralel pentru un sistem IIR, (b) Secțiune de ordinul al doilea pentru realizarea în paralel a sistemelor IIR

Secțiunile de ordinul doi individuale, care sunt blocurile constructive de bază pentru $H(z)$, pot fi implementate în oricare din formele directe sau transpuse. Structura în formă directă II este ilustrată în figura 4.19b. Cu această structură ca bloc constructiv de bază, implementarea în paralel a sistemului IIR este descrisă de următorul sistem de ecuații:

$$w_k[n] = -a_{k1}w_k[n-1] - a_{k2}w_k[n-2] + x[n] \quad k = 1,2,...,K \tag{4.81}$$

$$y_k[n] = b_{k0}w_k[n] + b_{k1}w_k[n-1],\ k = 1,2,...,K \tag{4.82}$$

$$y[n] = Cx[n] + \sum_{k=1}^{K} y_k[n] \tag{4.83}$$

Exemplul 4.4.

Să se determine implementările în cascadă și în paralel pentru sistemul descris de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{10\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{8}z^{-1}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right]}$$

Soluție. Implementarea în cascadă se obține ușor din această formă a funcției de sistem. O posibilă împerechere de poli și zerouri este următoarea

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}}, \; H_2(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

și, prin urmare,

$$H(z) = 10 H_1(z) H_2(z)$$

Implementarea în cascadă este ilustrată în Fig. 9.20a.

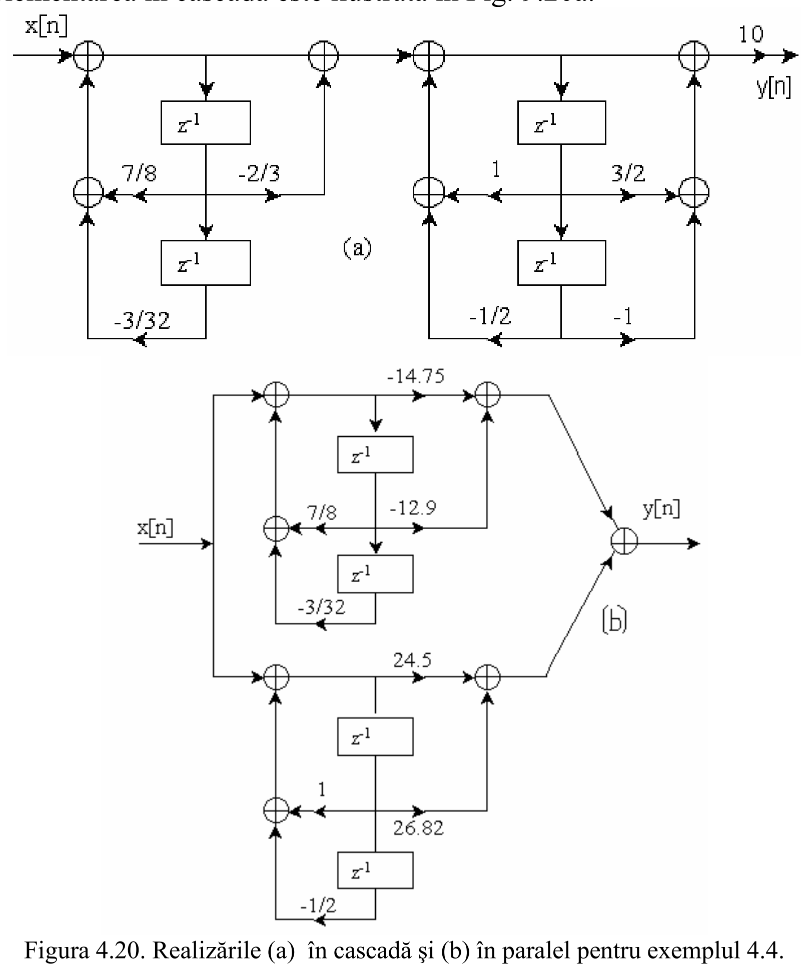


Figura 4.20. Realizările (a) în cascadă și (b) în paralel pentru exemplul 4.4.

Pentru a obține implementarea în paralel, $H(z)$ trebuie dezvoltat în fracții parțiale. Astfel,

$$H(z) = \frac{A_1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{A_3}{1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1-\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)z^{-1}}$$

unde A_1, A_2, A_3, şi A_3^* rezultă $A_1 = 2{,}93$, $A_2 = -17{,}68$, $A_3 = 12{,}25 - j14{,}57$, $A_3^* = 12{,}25 + j14{,}57$. Recombinând perechile de poli, se obține

$$H(z) = \frac{-14{,}75 - 12{,}90z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24{,}50 + 26{,}82z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

Implementarea în paralel este ilustrată în figura 4.20b.

4.3.5. Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

În paragraful 4.2.4 s-a dezvoltat o structură de filtru lattice, echivalentă cu un filtru FIR, iar în această secțiune se extinde dezvoltarea la sistemele IIR.

Fie un sistem numai cu poli cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_N[k] z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)} \tag{4.84}$$

Implementarea în formă directă a acestui sistem este ilustrată în figura 4.21. Ecuația cu diferențe pentru acest sistem IIR este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_N[k] y[n-k] + x[n] \tag{4.85}$$

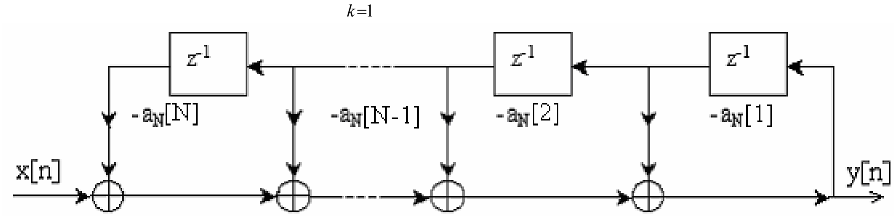


Figura 4.21. Implementarea în formă directă a unui sistem numai cu poli

Dacă în relația (4.85) se inversează intrarea cu ieşirea, se obține

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_N[k]x[n-k] + y[n] \tag{4.86}$$

sau, echivalent,

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{N} a_N[k]x[n-k] \tag{4.86'}$$

Se observă că ecuația (4.86') descrie un sistem FIR cu funcția de sistem $H(z) = A_N(z)$. Așadar, un sistem poate fi obținut din celălalt interschimbând intrarea cu ieșirea. Pe baza acestei observații, se poate folosi structura lattice numai cu zerouri descrisă în paragraful 4.2.4, pentru a obține o structură lattice pentru un sistem IIR numai cu poli, interschimbând rolul intrării cu cel al ieșirii. Mai întâi, pentru filtrul lattice numai cu zerouri ilustrat în figura 4.11 se redefinește intrarea ca fiind

$$x[n] = f_N[n] \tag{4.87}$$

iar ieșirea ca

$$y[n] = f_0[n], \tag{4.88}$$

invers decât pentru un filtrul lattice numai cu zerouri. Aceste definiții impun ca valorile $\{f_m[n]\}$ să se calculeze în ordine descrescătoare [$f_N[n], f_{N-1}[n], \ldots$]. Calculul poate fi realizat rearanjând ecuația recursivă din (4.31) de unde se determină soluția pentru $f_{m-1}[n]$ în funcție de $f_m[n]$, adică

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1] \qquad m = N, N-1, \ldots, 1$$

Ecuația (4.32) pentru $g_m[n]$ rămâne neschimbată.

Rezultatul acestor schimbări este următorul sistem de ecuații:

$$f_N[n] = x[n] \tag{4.89}$$

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1],\ m = N, N-1, \ldots, 1 \tag{4.90}$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1],\ m = N, N-1, \ldots, 1 \tag{4.91}$$

$$y[n] = f_0[n] = g_0[n] \tag{4.92}$$

care corespunde structurii ilustrate în figura 4.22.

Pentru a demonstra că setul de ecuații (4.89) ÷ (4.92) descrie un sistem IIR numai cu poli, se consideră, pentru început, cazul în care N = 1. Ecuațiile (4.89) ÷ (4.92) se reduc la

$$x[n] = f_1[n]$$

$$f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1]$$

$$g_1[n] = K_1 f_0[n] + g_0[n-1]$$
$$y[n] = f_0[n] = x[n] - K_1 y[n-1] \tag{4.93}$$

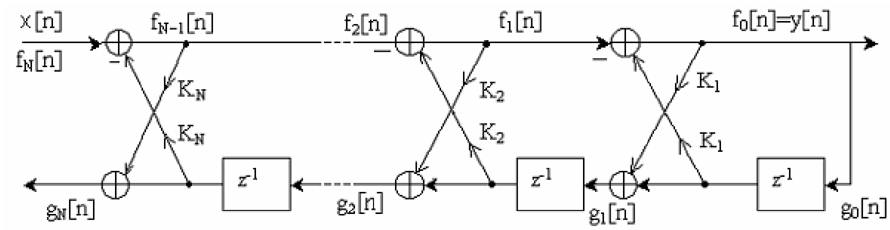


Figura 4.22. Structura lattice pentru un filtru IIR numai cu poli

Ecuația pentru $g_1[n]$ poate fi exprimată ca

$$g_1[n] = K_1 y[n] + y[n-1] \tag{4.94}$$

Se observă că ultima relație din sistemul (4.93) reprezintă un sistem IIR numai cu poli, de ordinul întâi, în timp ce (4.94) reprezintă un sistem FIR de ordinul întâi. Polul este rezultatul reacției ce a fost introduse de soluționarea lui $\{f_m[n]\}$ în ordine descendentă. Această reacție este arătată în figura 4.23a.

În continuare, se consideră cazul N=2, care corespunde structurii din figura 4.23b.

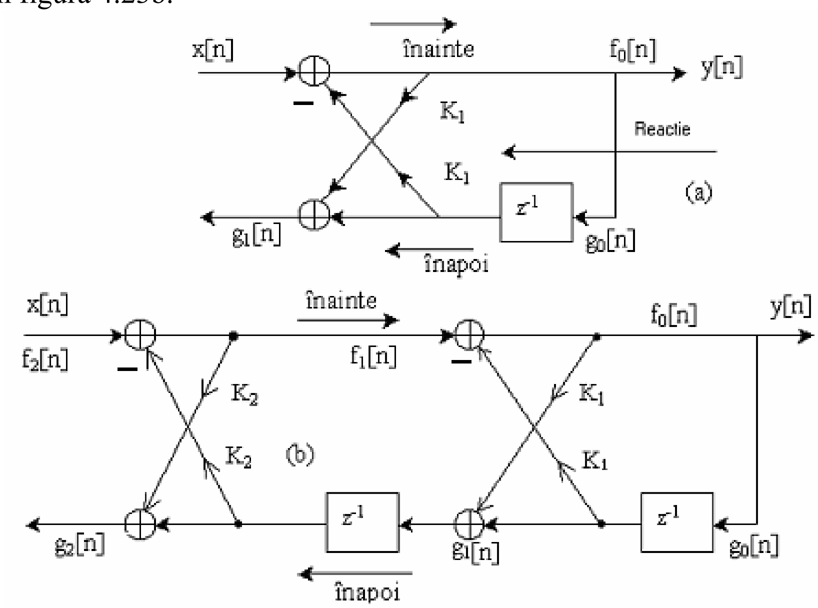


Figura 4.23. Implementarea structurii lattice pentru un sistem IIR a) cu un pol și b) cu doi poli

Ecuațiile corespunzătoare acestei structuri sunt

$$\begin{aligned} f_2[n] &= x[n] \\ f_1[n] &= f_2[n] - K_2 g_1[n-1] \\ g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ f_0[n] &= f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \\ g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \\ y[n] &= f_0[n] = g_0[n] \end{aligned} \tag{4.95}$$

După câteva substituții simple, se obține

$$y[n] = -K_1(1+K_2)y[n-1] - K_2 y[n-2] + x[n] \tag{4.96}$$

$$g_2[n] = K_2 y[n] + K_1(1+K_2)y[n-1] + y[n-2] \tag{4.97}$$

Ecuația cu diferențe (4.96) reprezintă un sistem IIR cu doi poli iar relația (4.97) este ecuația intrare-ieşire pentru un sistem FIR cu două zerouri. Se observă cum coeficienții pentru sistemul FIR sunt identici cu cei din sistemul IIR, cu excepția faptului că apar în ordine inversă.

Concluziile de mai sus sunt valabile pentru orice *N*. Într-adevăr, cu definiția lui $A_m(z)$ dată în (4.34'), funcția de sistem pentru sistemul numai cu poli este

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)} \tag{4.98}$$

Similar, funcția de sistem pentru sistemul numai cu zerouri (FIR) este

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \tag{4.99}$$

unde s-au folosit relațiile (4.38) ÷ (4.44). Astfel, coeficienții lui $H_b(z)$ care caracterizează sistemul FIR sunt identici cu coeficienții lui $A_m(z)$, exceptând faptul că apar în ordine inversă.

Este interesant de observat că structura lattice numai cu poli are o cale numai cu zerouri cu intrarea $g_0[n]$ şi ieşirea $g_N[n]$, identică cu calea corespunzătoare numai cu zerouri în structura lattice numai cu zerouri. Polinomul $B_m(z)$, reprezintă funcția de sistem pentru calea numai cu zerouri comună ambelor structuri lattice, numită obişnuit funcție de sistem *înapoi* sau *invers*. Structurile lattice numai cu zerouri şi numai cu poli sunt caracterizate de aceiaşi parametri lattice K_1, K_2, …,K_N. Cele două structuri lattice diferă doar prin interconexiunile grafurilor de semnal. În consecință, algoritmii pentru conversia coeficienților $\{\alpha_m[k]\}$

ai implementării în formă directă a unui sistem FIR în parametri lattice, şi invers, se aplică la fel şi structurii numai cu poli. Se reaminteşte că rădăcinile polinomului $A_N(z)$ sunt localizate în interiorul cercului unitate, dacă şi numai dacă coeficienții lattice K_m îndeplinesc condiția $|K_m| < 1$, pentru toți m=1,...N.

În aplicațiile practice structura lattice numai cu poli a fost utilizată pentru a modela tractul vocal uman şi stratificarea pământului. În astfel de cazuri coeficienții lattice $\{K_m\}$, au semnificația fizică de a fi identici cu coeficienții reflectați în mediul fizic. Acesta este motivul pentru care coeficienții lattice sunt adeseori numiți *coeficienți de reflexie.* În astfel de aplicații, un model stabil pentru un mediu necesită coeficienți de reflexie subunitari obținuți din măsurători asupra semnalelor de ieşire din mediu.

4.3.6. Structuri lattice cu poli şi zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

Structura lattice numai cu poli reprezintă blocul constructiv de bază pentru structuri de tip lattice care implementează sistemele IIR care conțin atât poli cât şi zerouri. Se consideră în continuare un sistem IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} c_M[k] z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_N[k] z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}, \tag{4.100}$$

unde notația pentru numărător a fost modificată pentru a evita confuzia cu polinomul $B(z)$ prezentat anterior. De asemenea se consideră că $N \geq M$.

În structura în formă directă II, sistemul din (4.100) este descris de ecuațiile cu diferențe

$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_N[k] w[n-k] + x[n] \tag{4.101}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} c_M[k] w[n-k] \tag{4.102}$$

Se observă că relația (4.101) reprezintă relația funcțională intrare – ieşire a unui sistem IIR numai cu poli, iar (4.102) reprezintă relația funcțională intrare – ieşire a unui sistem numai cu zerouri. De asemenea, ieşirea sistemului numai cu zerouri este o combinație liniară de ieşiri întârziate ale sistemului numai cu poli. Acest lucru se observă uşor la structura în formă directă II redesenată în figura 4.24 pentru *N=M*.

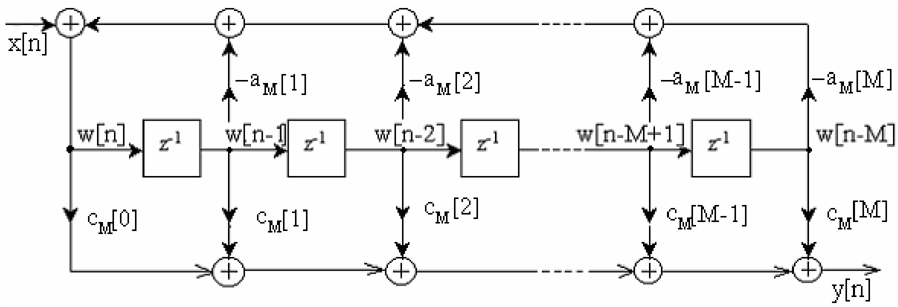


Figura 4.24. Forma directă II de implementare a unui sistem IIR pentru N=M

Deoarece zerourile rezultă prin formarea unor combinații liniare din ieşirile anterioare, se poate construi un sistem IIR cu poli şi zerouri utilizând structura lattice numai cu poli ca bloc constructiv de bază. S-a specificat deja că $g_m[n]$ este o combinație liniară a ieşirii curente şi a celor anterioare. Sistemul

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z)$$

este un sistem numai cu zerouri. Orice combinație liniară de $\{g_m[n]\}$ este, de asemenea, un sistem numai cu zerouri. Astfel, o structură lattice numai cu poli cu parametrii $K_m, 1 \le m \le N,$ căreia i se adăugă o *scară* care realizează o combinație liniară de $\{g_m[n]\}$ cu ponderile v_m are ca rezultat un sistem IIR cu poli şi zerouri, a cărui structură lattice-scară este indicată în figura 4.25, pentru $M = N$. Ieşirea sa este

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} v_m g_m[n] \qquad (4.103)$$

unde $\{v_m\}$ sunt coeficienții ce determină zerourile sistemului. Ținând seama de (4.103), funcția de sistem corespunzătoare sistemului cu poli şi zerouri este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^{M} v_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \qquad (4.104)$$

Dacă $X(z) = F_N(z)$ şi $F_0(z) = G_0(z),$ relația (4.104) poate fi scrisă ca

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M}v_m\frac{G_m(z)}{G_0(z)}\frac{F_0(z)}{F_N(z)}=\sum_{m=0}^{M}v_m\frac{B_m(z)}{A_N(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}v_mB_m(z)}{A_N(z)} \qquad (4.105)$$

Dacă se compară (4.100) cu (4.105), rezultă că

$$C_M(z)=\sum_{m=0}^{M}v_mB_m(z) \qquad (4.106)$$

Din această relație se pot determina coeficienții $\{v_m\}$. Astfel s-a demonstrat cum coeficienții numărătorului polinomial $C_M(z)$ determină coeficienții scării $\{v_m\}$, având în vedere că numitorului polinomial $A_N(z)$, prin coeficienții săi, determină coeficienții lattice $\{K_m\}$.

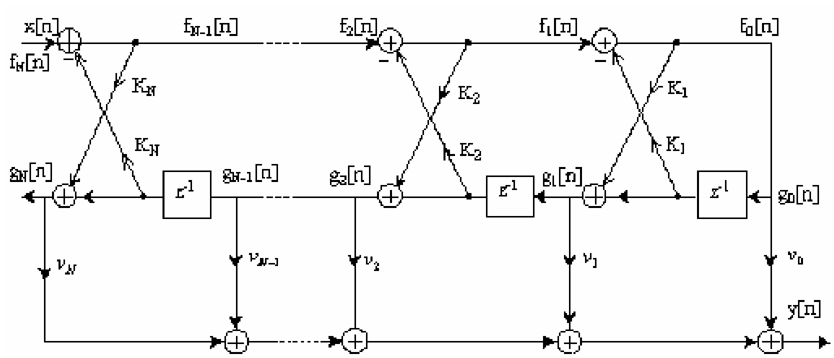


Figura 4.25. Structura lattice scară pentru realizarea unui sistem cu poli si zerouri

Cunoscându-se polinoamele $C_M(z)$ şi $A_N(z)$, cu $N \geq M$, sunt determinați mai întâi parametrii structurii lattice numai cu poli, aşa cum a fost descris mai înainte, cu algoritmul de conversie prezentat în paragraful 4.2.4, ce converteşte coeficienții formei directe de implementare în coeficienți lattice. Cu ajutorul relației recursive de decrementare date de (4.56) se obțin coeficienții lattice $\{K_m\}$ şi apoi polinoamele $B_m(z),\ m=1,2,...,N.$

Coeficienții scării sunt determinați din relația (4.106), după cum urmează:

$$C_m(z)=\sum_{k=0}^{m-1}v_kB_k(z)+v_mB_m(z) \qquad (4.107)$$

sau, echivalent,

$$C_m(z)=C_{m-1}(z)+v_mB_m(z) \qquad (4.108)$$

Astfel, $C_m(z)$ poate fi calculat recursiv din polinoamele inverse $B_m(z), m = 1,2,....,M$. Deoarece $\beta_m[m] = 1$ pentru toți m, coeficienții $v_m, m = 0,1,....,M$ pot fi determinați observând că

$$v_m = c_m[m] \qquad m = 0,1,....,M \tag{4.109}$$

Rescriind (4.108) în forma

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z) \tag{4.110}$$

şi calculând această relație recursivă în sens invers pentru m ($m = M, M-1,....,2$), se obțin coeficienții $c_m[m]$ şi, prin urmare, parametrii scării, conform relației (4.109).

Structurile filtrelor lattice-scară prezentate mai sus, necesită un minimum de memorie dar nu şi un număr minim de multiplicări. Deşi există structuri lattice cu un singur multiplicator pe treaptă, structurile lattice cu două multiplicatoare pe fiecare treaptă, descrise anterior sunt cele mai folosite în aplicațiile practice. În concluzie, modularitatea, stabilitatea structurii datorată coeficienților $\{K_m\}$ şi robustețea în ceea ce priveşte efectele lungimii finite a cuvintelor, fac structurile lattice foarte atractive în multe aplicații practice, care includ sistemele de procesare a vocii, filtrarea adaptivă şi procesarea semnalelor geofizice.

4. 4. Implementarea şi analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp pe baza variabilelor de stare

Până acum, analiza sistemelor liniare, invariante în timp a fost limitată la o descriere externă cu ajutorul unei relații funcționale intrare-ieşire. Cu alte cuvinte, sistemul a fost caracterizat de ecuații matematice ce leagă semnalul de intrare de semnalul de ieşire. În această secțiune se introduc conceptele de bază despre descrierea internă a sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, cauzale. Descrierea internă a sistemului implică o legătură între semnalele de intrare şi de ieşire şi, de asemenea, un set adițional de variabile numite *variabile de stare*. Astfel, ecuațiile matematice ce descriu un sistem, sunt uzual divizate în două părți:

1. Un set de ecuații matematice ce pun în evidență relația dintre variabilele de stare ale sistemului şi semnalul de intrare;

2. Un al doilea set de ecuații matematice ce stabilesc legătura între variabilele de stare şi intrarea curentă cu semnalul de ieşire.

Variabilele de stare dau informații despre toate semnalele interne ale sistemului. Ca urmare, descrierea internă dă informații mai detaliate despre sistem în comparație cu descrierea intrare-ieşire. Cu toate că analiza internă este aplicată în special la sisteme discrete, liniare, invariante în timp, cauzale cu o singură intrare şi o singură ieşire, tehnicile de analiză pot fi aplicate şi sistemelor neliniare, sistemelor variante în timp şi sistemelor cu intrări şi ieşiri multiple.

Descrierea aleasă (prin relație funcțională intrare – ieşire sau descrierea cu ajutorul variabilelor de stare) depinde de problemă, de informațiile disponibile, precum şi de întrebările cărora trebuie date răspunsuri. În continuare se prezintă tehnici de analiză a sistemelor în spațiul stărilor şi sunt dezvoltate structuri pe baza variabilelor de stare destinate implementării sistemelor discrete, liniare, invariante în timp.

4.4.1. Conceptul de stare

După cum s-a observat deja, determinarea ieşirii unui sistem necesită prezența semnalului de intrare şi un set de condiții inițiale. Dacă un sistem nu este relaxat la un moment inițial, fie acesta n_0, cunoaşterea semnalului de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, nu este suficientă pentru a determina în mod unic ieşirea $y[n]$, pentru $n \geq n_0$. Acest lucru este posibil numai dacă sunt cunoscute condițiile inițiale ale sistemului la $n = n_0$. Setul de condiții inițiale este denumit *starea* sistemului la momentul $n = n_0$.

Definiție. *Starea* unui sistem la momentul n_0 este cantitatea de informație ce trebuie furnizată la momentul n_0, care, împreună cu semnalul de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, determină în mod unic ieşirea pentru toți $n \geq n_0$.

Cu această definiție, conceptul de stare conduce la o descompunere a sistemului în două părți, o parte cu memorie şi o parte fără memorie. Informația stocată în locațiile de memorie constituie setul de condiții inițiale şi este denumită *starea sistemului*. Ieşirea curentă a sistemului devine o funcție de valoarea curentă a intrării şi de starea curentă. Dacă valoarea curentă a intrării este cunoscută, este necesar un mecanism pentru a actualiza starea sistemului. Prin urmare, starea sistemului la momentul n_0+1 trebuie să depindă de starea sistemului la momentul n_0 şi de valoarea semnalului de intrare $x[n]$, la $n=n_0$.

Următorul exemplu ilustrează abordarea descrierii interne a unui sistem. Fie un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal descris de ecuaţia cu diferenţe

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]+2x[n-1] \tag{4.111}$$

Figura 4.26a arată implementarea în formă directă II a acestui sistem. Se observă că sistemul conţine doar un singur element de întârziere, care este, de fapt, o celulă de memorie. Ieşirea $\upsilon[n]$ a elementului de întârziere reprezintă valoarea *prezentă* a memoriei, având în vedere că intrarea $\upsilon[n+1]$ a elementului de întârziere semnifică valoarea *următoare* ce trebuie memorată. De fapt, această celulă de memorare include toată memoria necesară pentru calculul ieşirii curente $y[n]$. Pentru a verifica acest lucru, se scriu ecuaţiile pentru implementarea indicată în figura 4.26a. Acestea sunt

$$\upsilon[n+1]=\frac{1}{2}\upsilon[n]+x[n] \tag{4.112}$$

$$y[n]=\upsilon[n+1]+2\upsilon[n] \tag{4.113}$$

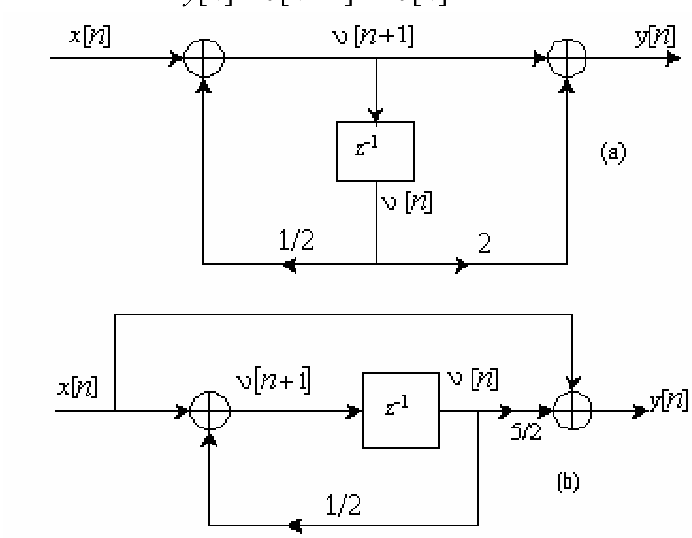


Figura 4.26. a) Implementarea în forma directă II, b) o implementare pe baza variabilelor de stare a sistemului descris de relaţia (4.111)

Înlocuind (4.112) în (4.113), se obține

$$y[n] = \frac{5}{2}\upsilon[n] + x[n]$$

care este o ecuație care descrie un sistem fără memorie. Din altă perspectivă, (4.112) reprezintă un mecanism pentru reactualizarea conținutului celulei de memorie, utilizând conținutul curent al acesteia şi valoarea curentă a intrării.

Perechea de ecuații

$$\upsilon[n+1] = \frac{1}{2}\upsilon[n] + x[n] \tag{4.114}$$

$$y[n] = \frac{5}{2}\upsilon[n] + x[n] \tag{4.115}$$

furnizează o descriere completă a sistemului. Variabila $\upsilon[n]$, care include toată informația anterioară este denumită *variabilă de stare* şi reprezintă chiar starea sistemului. Dacă există doar o singură variabilă de stare, ecuația de stare este unidimensională iar valoarea sa la orice moment de timp este reprezentată ca un punct într-un spațiu unidimensional. Se mai observă, de asemenea, că ecuațiile (4.114) şi (4.115) împart sistemul în două părți componente: un subsistem dinamic (cu memorie) şi un subsistem static (fără memorie), care furnizează o descriere internă a acestui sistem. Această descriere produce o implementare alternativă echivalentă a sistemului, aşa cum este indicată în figura 4.26b.

Descrierea internă se poate aplica şi sistemelor cauzale ce sunt variante în timp şi/sau neliniare. Pentru a ilustra acest lucru, se consideră un sistem care calculează dispersia unui semnal. Sistemul poate fi descris de ecuația

$$y[n] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[x[k] - \mu[n]\right]^2 \tag{4.116}$$

unde

$$\mu[n] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x[k] \tag{4.117}$$

este valoarea sa medie. Dezvoltând pătratul din relația (4.116) şi utilizând relația (4.117), se obține

$$y[n] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^2[k] - \mu^2[n] \tag{4.118}$$

Pentru a obține o descriere internă, se definesc următoarele variabile:

$$\upsilon_1[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \quad (4.119)$$

$$\upsilon_2[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x^2[k] \quad (4.120)$$

Apoi, combinând aceste relații cu (4.118) şi (4.117), se obține

$$y[n] = -\frac{1}{n^2}\upsilon_1^2[n] + \frac{1}{n}\upsilon_2[n] \quad (4.121)$$

care descrie un sistem fără memorie, ce exprimă ieşirea în funcție de variabilele de stare curente. Reactualizarea acestor variabile poate fi făcută cu ajutorul ecuațiilor

$$\upsilon_1[n+1] = \upsilon_1[n] + x[n] \quad (4.122)$$

$$\upsilon_2[n+1] = \upsilon_2[n] + x^2[n] \quad (4.123)$$

Ecuația (4.123) este neliniară, iar (4.121) este neliniară şi variantă în timp.

În general, descrierea internă a sistemelor cauzale conține două seturi de ecuații matematice:

- un set de ecuații, denumit *ecuații de stare*, ce exprimă variabilele de stare de la momentul n+1 în funcție de variabilele de stare şi intrarea la momentul n;
- o ecuație, denumită *ecuație de ieşire,* ce exprimă ieşirea la momentul n în funcție de variabilele de stare şi intrarea la acelaşi moment de timp.

În particular, pentru un sistem cauzal cu N variabile de stare $\upsilon_1[n], \upsilon_2[n], .., \upsilon_N[n]$, descrierea internă poate fi exprimată prin următoarele două seturi de ecuații:

Ecuațiile de stare

$$\upsilon_i[n+1] = f_i\left[\upsilon_1[n], \upsilon_2[n], ..., \upsilon_N[n], x[n]\right], \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.124)$$

Ecuația de ieşire

$$y[n] = g\left[\upsilon_1[n], \upsilon_2[n], ..., \upsilon_N[n], x[n]\right] \quad (4.125)$$

Cele N variabile de stare $\upsilon_i[n]$, i = 1,2,3,…,N, pot fi considerate componentele unui vector de dimensiune N, iar vârful acestui vector la un moment n poate fi văzut ca un punct în spațiul N-dimensional denumit *spațiu de stare*. Locul geometric al vârfului vectorului la diferite momente de timp determină o traiectorie a vectorului variabilelor de stare. Figura 4.27 ilustrează o traiectorie pentru starea unui sistem de ordinul al doilea, într-un spațiu bidimensional. În general, ecuațiile de stare descriu partea dinamică a sistemului, în timp ce ecuația de ieşire descrie partea statică (fără memorie) a acestuia. Numărul N al variabilelor de stare exprimă *ordinul* sistemului.

Cu toate că descrierea internă poate fi uşor generalizată la sisteme cu intrări şi ieşiri multiple (**M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput, MIMO), abordarea acestei probleme se va limita doar la sisteme cu o singură intrare şi o singură ieşire (**S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput, SISO).

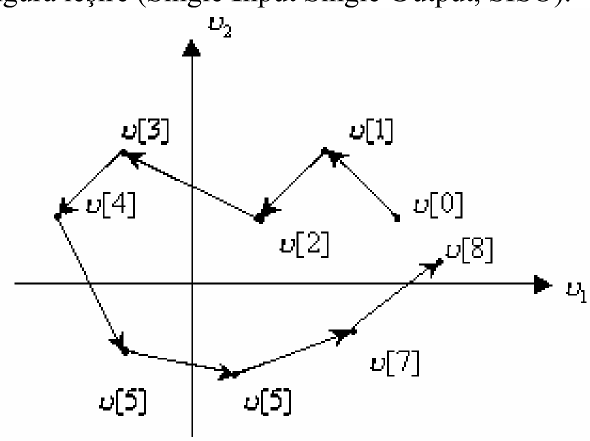


Figura 4.27. Traiectoria stării unui sistem de ordinul al doilea

4.4.2. Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

În această secțiune se vor obține ecuațiile de stare pentru sistemele discrete descrise de ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți, cu o intrare şi o ieşire. Pentru aceasta se consideră un sistem de ordinul al treilea, rezultatul fiind uşor de generalizat pentru sistemele de orice ordin N arbitrar, finit.

Fie un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal, caracterizat de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{3} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{3} b_k x[n-k] \tag{4.126}$$

Implementarea sistemului în formă directă II este indicată în figura 4.28a. Ca variabile de stare, se vor utiliza ieşirile celulelor de memorie ale sistemului. Ieşirea elementului de întârziere reprezintă valoarea prezentă memorată în celulă, iar intrarea reprezintă valoarea următoare ce urmează a fi memorată. În consecință, cu ajutorul figurii 4.28a, se poate scrie

$$\begin{aligned} \upsilon_1[n+1] &= \upsilon_2[n] \\ \upsilon_2[n+1] &= \upsilon_3[n] \\ \upsilon_3[n+1] &= -a_3\upsilon_1[n] - a_2\upsilon_2[n] - a_1\upsilon_3[n] + x[n] \end{aligned} \tag{4.127}$$

Se observă că expresiile variabilelor de stare pentru sistemul de ordinul al treilea descris de ecuația (4.126), implică trei ecuații cu diferențe de ordinul întâi date de (4.127). În general, un sistem de ordin N poate fi descris de N ecuații cu diferențe de ordinul întâi.

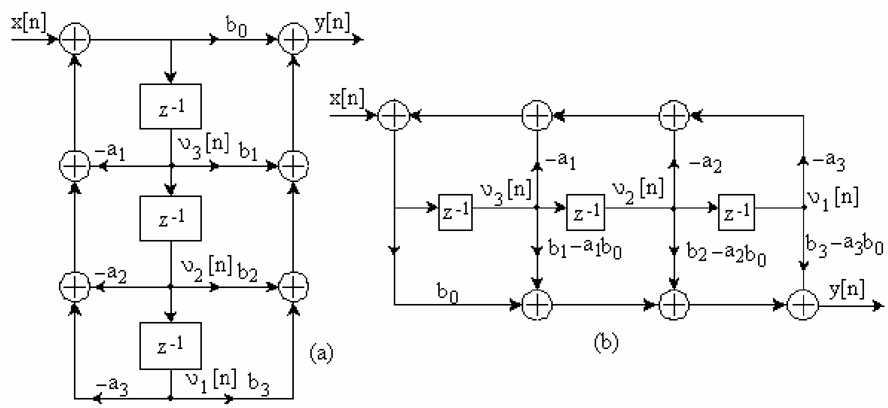


Figura 4.28 Realizarea (a) în forma directă II şi (b) în spațiul stărilor a sistemului descris de relația (4.126)

Ecuația de ieşire, ce exprimă pe $y[n]$ în funcție de variabilele de stare şi de valoarea prezentă a intrării, $x[n]$, poate fi, de asemenea, obținută din figura 4.28a.

$$y[n] = b_0\upsilon_3[n+1] + b_3\upsilon_1[n] + b_2\upsilon_2[n] + b_1\upsilon_3[n] \tag{4.128}$$

Înlocuind $\upsilon_3[n+1]$ din (4.127) în (4.128), ecuația de ieşire devine

$$\begin{aligned} y[n] &= (b_3 - b_0a_3)\upsilon_1[n] + (b_2 - b_0a_2)\upsilon_2[n] + \\ &+ (b_1 - b_0a_1)\upsilon_3[n] + b_0x[n] \end{aligned} \tag{4.128'}$$

Pe baza relațiilor (4.127) şi (4.128') rezultă implementarea sistemului în spațiul stărilor din figura 4.28b.

O descriere alternativă în spațiul stărilor pentru sistemul caracterizat de relația (4.126) poate fi obținută folosind structura în formă directă II transpusă, desenată în figura 4.29a.

Dacă se utilizează variabilele de stare indicate din această figură, se obține

$$\begin{aligned}\upsilon_1[n+1] &= b_3 x[n] - a_3 y[n] \\ \upsilon_2[n+1] &= \upsilon_1[n] + b_2 x[n] - a_2 y[n] \\ \upsilon_3[n+1] &= \upsilon_2[n] + b_1 x[n] - a_1 y[n]\end{aligned} \tag{4.129}$$

Ecuația de ieşire este

$$y[n] = b_0 x[n] + \upsilon_3[n] \tag{4.130}$$

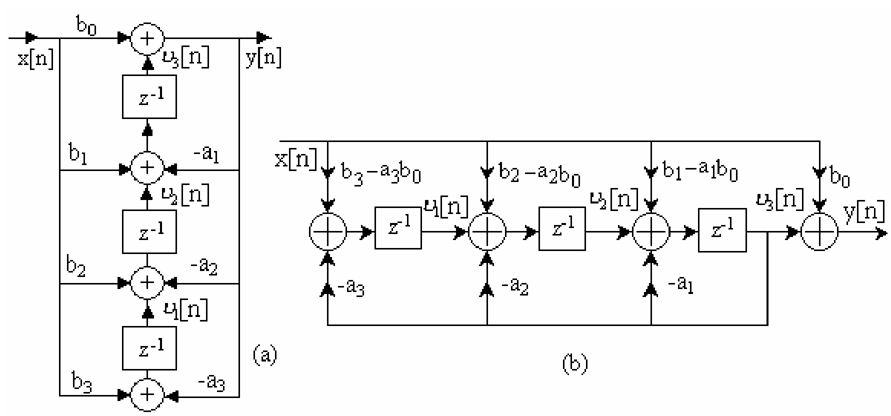


Figura 4.29 Realizarea (a) în forma directă II transpusă şi (b) în spațiul stărilor a sistemului descris de relația (4.126)

Eliminând $y[n]$ dat de (4.130) din (4.129), rezultă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}\upsilon_1[n+1] &= -a_3\upsilon_3[n] + (b_3 - b_0 a_3)x[n] \\ \upsilon_2[n+1] &= \upsilon_1[n] - a_2\upsilon_3[n] + (b_2 - b_0 a_2)x[n] \\ \upsilon_3[n+1] &= \upsilon_2[n] - a_1\upsilon_3[n] + (b_1 - b_0 a_1)x[n]\end{aligned} \tag{4.131}$$

Pe baza relațiilor (4.130) şi (4.131) rezultă implementarea în spațiul starilor din figura 4.29b.

Dacă ordinul sistemului creşte, atunci şi descrierea în spațiul stărilor devine mai complexă. Cu toate acestea, introducând notații matriceale, se pot exprima ecuațiile de stare într-o formă mult mai compactă, care simplifică manipularea lor şi permite utilizarea algebrei matriceale pentru analiza în spațiul stărilor.

Matriceal, relațiile (4.127) şi (4.128') se scriu sub forma

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1[n+1] \\ \upsilon_2[n+1] \\ \upsilon_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \\ \upsilon_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \tag{4.132}$$

$$y[n] = \left[(b_3 - b_0 a_3)(b_2 - b_0 a_2)(b_1 - b_0 a_1)\right] \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \\ \upsilon_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \tag{4.133}$$

Aceste ecuații sunt cunoscute sub denumirea de *implementarea în spațiul stărilor de tipul 1.*

Similar, relațiile (4.131) şi (4.130) pot fi exprimate în formă matriceală, astfel:

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1[n+1] \\ \upsilon_2[n+1] \\ \upsilon_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \\ \upsilon_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_3 - b_0 a_3) \\ (b_2 - b_0 a_2) \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x[n] \tag{4.134}$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \\ \upsilon_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \tag{4.135}$$

Această descriere se numeşte *implementare în spațiul stărilor de tipul 2.*

Cele două seturi de ecuații (4.132), (4.133) şi (4.134), (4.135) descriu complet sistemul, împărțindu-l, aşa cum s-a precizat, în două părți componente, una cu memorie şi una fără.

Generalizând exemplul anterior, se poate observa uşor faptul că sistemul descris de ecuația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] \tag{4.136}$$

poate fi descris în formă matriceală, de o realizare în spațiul stărilor, liniară, invariantă în timp.

Pentru un sistem cu *N* variabile de stare $\upsilon_1[n], \upsilon_2[n], ..., \upsilon_N[n]$, se defineşte starea **v**[n] sub forma unui vector coloană *N*-dimensional

$$\mathbf{v}[\mathrm{n}] = \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \\ \vdots \\ \upsilon_N[n] \end{bmatrix} \tag{4.137}$$

De asemenea, fie $\boldsymbol{F}$ o matrice $N \times N$, $\mathbf{q}$ şi $\mathbf{g}$ vectori coloană N-dimensionali, definiţi ca

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \tag{4.138}$$

unde $\{f_{ij}\}$, $\{q_k\}$, $\{g_k\}$ sunt constante şi, fie d, o constantă scalară.

Cu aceste notaţii ecuaţia de stare şi cea de ieşire pot fi scrise, după cum urmează:

Ecuaţia de stare

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \tag{4.139}$$

Ecuaţia de ieşire

$$y[n] = \mathbf{g}^{\mathbf{t}}\mathbf{v}[n] + d x[n] \tag{4.140}$$

Orice sistem discret ale cărui intrare $x[n]$, ieşire $y[n]$ şi stare $\mathbf{v}[n]$, pentru toţi $n \geq n_0$, sunt relaţionate cu ecuaţiile de mai sus, este *liniar* şi *invariant în timp*. Dacă cel puţin una din mărimile **F**, **q**, **g** şi d depinde de timp, sistemul este variant în timp.

Implementarea de tipul 1 liniară şi invariantă în timp se obţine, alegând

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \qquad d = b_0 \tag{4.141}$$

iar implementarea de tipul 2 se obţine cu alegerea:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & & & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad d = b_0 \tag{4.142}$$

Relațiile (4.139)-(4.140) descriu un *model în spațiul stărilor liniar şi invariant în timp*, care poate fi reprezentat printr-o diagramă bloc matriceală ca în figura 4.30. În această figură liniile duble reprezintă mărimi vectoriale iar blocurile, coeficienți ai mărimilor vectoriale sau matriceale.

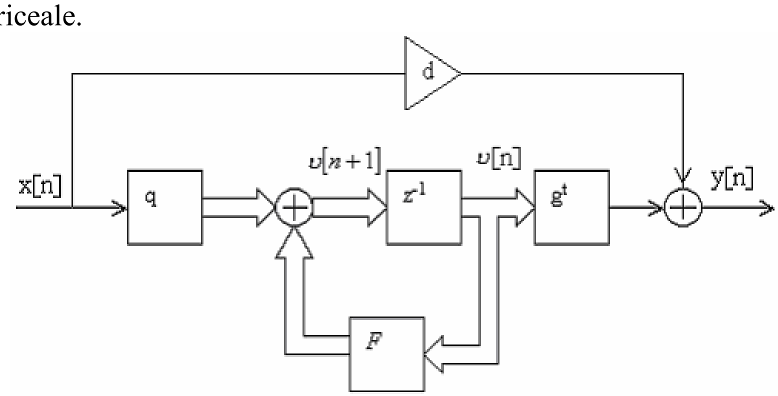


Figura 4.30. Descrierea generală în spațiul stărilor a unui sistem liniar, invariant în timp

Există mai multe variante de selectare a variabilelor de stare şi de structuri în spațiul stărilor care sunt echivalente pentru acelaşi sistem. Motivul pentru care se studiază o varietate de modele şi, prin urmare, de structuri, este de a le găsi pe acelea care sunt cel mai puțin senzitive la aritmetica lungimii finite a cuvintelor sau necesită o implementare mai puțin complexă, problemă tratată în Capitolul 5.

Exemplul 4.5.

Să se determine implementarea diagramei bloc a sistemului descris de următorul model în spațiul stărilor:

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1[n+1] \\ \upsilon_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}35 & 0{,}55 \\ -0{,}45 & 0{,}35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1[n] \\ \upsilon_2[n] \end{bmatrix} + x[n]$$

Soluție. Scriind ecuația de mai sus explicit, rezultă

$$\upsilon_1[n+1] = 1{,}35\upsilon_1[n] + 0{,}55\upsilon_2[n] + 0{,}5x[n]$$

$$\upsilon_2[n+1] = -0{,}45\upsilon_1[n] + 0{,}35\upsilon_2[n] + 0{,}5x[n]$$

$$y[n] = 3\upsilon_1[n] + \upsilon_2[n] + x[n]$$

Ecuațiile conduc la diagrama bloc din figura 4.31.

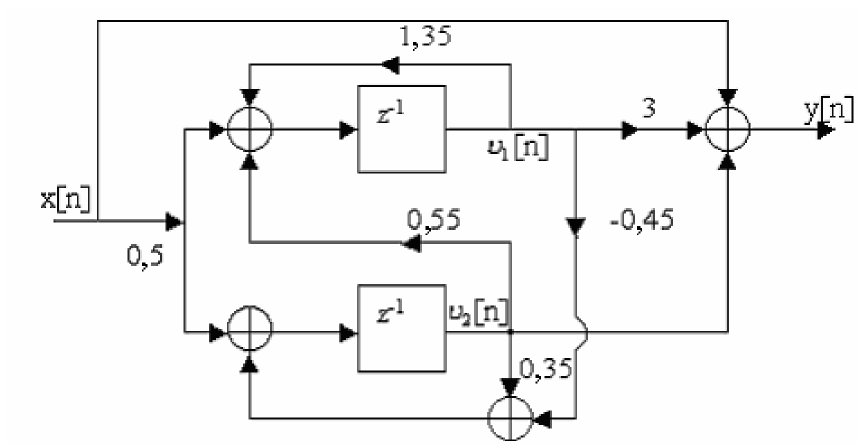


Figura 4.31. Implementarea sistemului din exemplul 4.5

Exemplul 4.6.

Să se determine forma directă II, forma directă II transpusă, realizările în spațiul stărilor de tipul 1 şi 2 pentru sistemul descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = 3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

Soluție. Comparând această ecuație cu (4.136), se obțin următorii parametrii

$$\mathrm{N} = 2 \quad a_1 = -3 \quad a_2 = 2 \quad b_0 = 1 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 0$$

Modificând corespunzător figurile 4.28 şi 4.29 se obţin implementările în forma directă II şi forma directă II transpusă din figura 4.32a şi b.

Pentru a obţine structurile interne, mai întâi se observă că din (4.141) rezultă pentru structura de tip 1

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{g}=\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}\quad d=1$$

Apoi, din (4.139) şi (4.140) rezultă

$$\upsilon_1[n+1]=\upsilon_2[n]$$
$$\upsilon_2[n+1]=-2\upsilon_1[n]+3\upsilon_2[n]+x[n]$$
$$y[n]=-2\upsilon_1[n]+4\upsilon_2[n]+x[n]$$

Aceste ecuaţii conduc la implementarea din figura 4.34c.

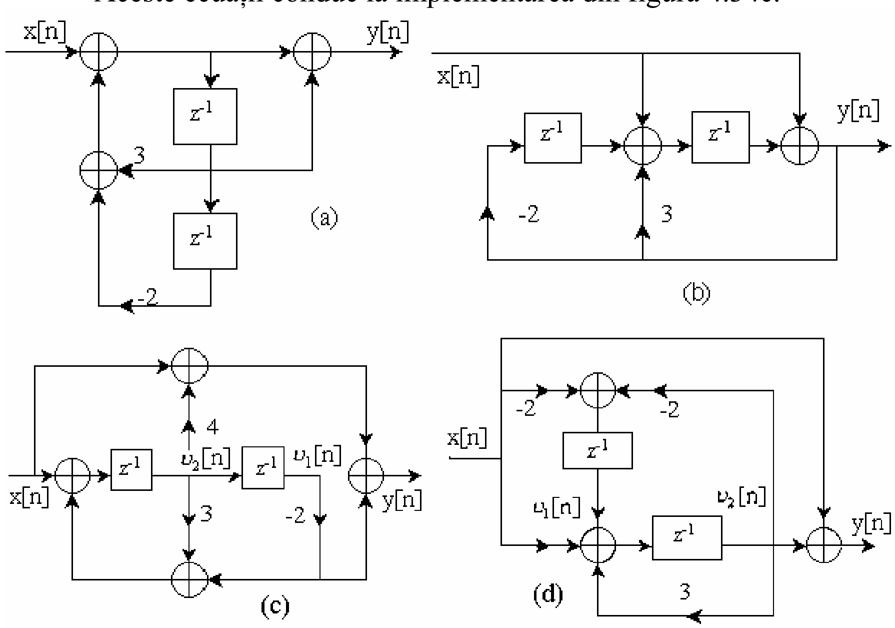


Figura 4.32. Realizarea (a) în forma directă II, (b) în forma directă II transpusă, (c) în spaţiul stărilor de tipul 1, (d) în spaţiul stărilor de tipul 2, pentru sistemul din exemplul 4.6.

Similar, pentru structura de tipul 2, rezultă

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}\quad \mathbf{g}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad d=1$$

sau

$$\upsilon_1[n+1] = -2\upsilon_2[n] - 2x[n]$$
$$\upsilon_2[n+1] = \upsilon_1[n] + 3\upsilon_2[n] + 4x[n]$$
$$y[n] = \upsilon_2[n] + x[n]$$

care conduc la implementarea din figura 2.32d. Se observă că toate implementările sunt diferite.

4.4.3. Soluția ecuațiilor cu diferențe în spațiul stărilor

Există diverse metode pentru rezolvarea ecuațiilor cu diferențe în spațiul stărilor. În cele ce urmează se va obține o soluție recursivă care face uz de faptul că ecuațiile în spațiul stărilor reprezintă un sistem de ecuații cu diferențe de ordinul întâi.

Pentru un model intern uni-dimensional ecuațiile de stare sunt

$$\upsilon[n+1] = f\upsilon[n] + qx[n] \qquad (4.143)$$

$$y[n] = g\upsilon[n] + dx[n] \qquad (4.144)$$

unde *f*, *q*, *g* şi *d* sunt coeficienții scalari, ficşi ai sistemului. Problema este de a determina ieşirea $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, cunoscându-se intrarea $x[n]$, $n \geq n_0$ şi starea inițială $\upsilon[n_0]$. Rezolvând ecuația (4.143) recursiv, rezultă:

$$\upsilon[n_0+1] = f\upsilon[n_0] + qx[n_0]$$
$$\upsilon[n_0+2] = f\upsilon[n_0+1] + qx[n_0+1] = f^2\upsilon[n_0] + fqx[n_0] + qx[n_0+1]$$
$$\upsilon[n_0+3] = f\upsilon[n_0+2] + qx[n_0+2] =$$
$$= f^3\upsilon[n_0] + f^2qx[n_0] + fqx[n_0+1] + qx[n_0+2]$$
$$....$$
$$\upsilon[n_0+m] = f^m\upsilon[n_0] + f^{m-1}qx[n_0] + f^{m-2}qx[n_0+1] + ...$$
$$+ fqx[n_0+m-2] + qx[n_0+m-1]$$

Cu notația $n = n_0 + m$, rezultă $m = n - n_0$, iar ecuația de mai sus devine

$$\upsilon[n] = f^{n-n_0}\upsilon[n_0] + f^{n-n_0-1}qx[n_0] + f^{n-n_0-2}qx[n_0+1] + ...$$
$$+ fqx[n-2] + qx[n-1]$$

Astfel, pentru orice $n > n_0$, se obține

$$\upsilon[n] = f^{n-n_0}\upsilon[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} f^{n-1-k}qx[k] \qquad (4.145)$$

Ecuaţia de ieşire se obţine înlocuind (4.145) în (4.144). Aceasta conduce la

$$y[n] = gf^{\,n-n_0}\upsilon[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} gf^{\,n-1-k} qx[k] + dx[n] \qquad (4.146)$$

care reprezintă răspunsul total al sistemului.

Dacă se alege starea iniţială $\upsilon[n_0] = 0,$ din (4.146) se obţine *răspunsul de stare zero* al sistemului [63]

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=n_0}^{n-1} gf^{\,n-1-k} qx[k] + dx[n] \qquad (4.147)$$

Dacă, însă, se impune $x[n] = 0$ în (4.146) pentru $n \geq n_0$, se obţine *răspunsul de intrare zero* [63]

$$y_{zi}[n] = gf^{\,n-n_0}\upsilon[n_0] \qquad (4.148)$$

Răspunsul total dat de (4.146) este suma răspunsurilor date de (4.147) şi (4.148)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \qquad (4.149)$$

Aceste rezultate pot fi uşor generalizate pentru modelul *N*-dimensional [48]

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \qquad (4.150)$$

$$y[n] = \mathbf{g}^{\mathbf{t}}\mathbf{v}[n] + dx[n] \qquad (4.151)$$

Într-adevăr, cunoscându-se $\mathbf{v}[n_0]$, pentru $n > n_0$ se poate scrie

$$\mathbf{v}[n_0+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n_0] + \mathbf{q}x[n]$$
$$\mathbf{v}[n_0+2] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n_0+1] + \mathbf{q}x[n_0+1]$$
$$= \mathbf{F}^2\mathbf{v}[n_0] + \mathbf{F}\mathbf{q}x[n_0] + \mathbf{q}x[n_0+1]$$

Dacă se continuă ca în cazul unidimensional, se obţine pentru $n>n_0$

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{F}^{\,n-n_0}\,\mathbf{v}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{F}^{n-1-k}\mathbf{q}x[k] \qquad (4.152)$$

Matricea $\mathbf{F}^0$ este definită ca matricea unitate de dimensiune $N \times N$. Matricea $\mathbf{F}^{i-j}$ este adesea notată $\mathbf{\Phi}(i-j)$, adică

$$\mathbf{\Phi}(i-j) = \mathbf{F}^{i-j} \qquad (4.153)$$

pentru orice $i \geq j$ întregi. Această matrice este numită *matricea de tranziţie* a sistemului.

Ieşirea sistemului se obţine substituind (4.152) în (4.151) şi ţinând cont de (4.153). Rezultatul acestei substituţii este

$$y[n] = \mathbf{g}^t\mathbf{F}^{\,n-n_0}\,\mathbf{v}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t\mathbf{F}^{n-1-k}\mathbf{q}x[k] + d x[n]$$

$$= \mathbf{g}^t\mathbf{\Phi}[n-n_0]\mathbf{v}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t\mathbf{\Phi}[n-1-k]\mathbf{q}x[k] + d x[n] \qquad (4.154)$$

Cu acest rezultat general, se poate determina ieşirea pentru două cazuri particulare. Răspunsul de intrare zero al sistemului este

$$y_{zi}[n] = \mathbf{g}^t\mathbf{F}^{\,n-n_0}\,\mathbf{v}[n_0] = \mathbf{g}^t\mathbf{\Phi}[n-n_0]\mathbf{v}[n_0] \qquad (4.155)$$

Răspunsul de stare zero al sistemului este

$$y_{zs}[n]= \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t\mathbf{\Phi}[n-1-k]\mathbf{q}x[k]+d x[n] \qquad (4.156)$$

Exemplul 4.7.

Să se calculeze răspunsul de stare zero pentru sistemul descris de

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n] = [-2 \quad 4]\ \mathbf{v}[n] + x[n]$$

dacă la intrare se aplică semnalul treaptă unitate.

Soluție. Semnalul de intrare este $x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

Deoarece se doreşte obținerea răspunsului de stare zero, se va impune vectorul de stare inițial egal cu zero

$$\mathbf{v}[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Atunci

$$y[0] = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x[0] = 1$$

$$\mathbf{v}[1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y[1] = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x[1] = 5$$

$$\mathbf{v}[2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y[2]=\begin{bmatrix}-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+x[2]=15$$

Continuând această procedură iterativă, se obține y[3] = 47, y[4] = 113 şi aşa mai departe.

Exemplul 4.8.
Să se calculeze răspunsul sistemului FIR

$$y[n]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$$

la un semnal oarecare $x[n], \quad n\geq 0$.

Soluție. Descrierea internă a sistemului este

$$\mathbf{v}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[1 \quad 2]\mathbf{v}[n]+x[n]$$

unde $\upsilon_1[n]$= x[n-2] şi $\upsilon_2[n]=x[n-1]$. Din ecuația de stare rezultă

$$\mathbf{v}[1]=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{v}[0]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x[0]$$

$$\mathbf{v}[2]=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{v}[1]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x[1]=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{v}[0]+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x[0]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x[1]$$

Se obține $\mathbf{F}^n=0$ pentru $n\geq 2$. Prin urmare starea inițială $\mathbf{v}[0]$ nu mai afectează starea sistemului după doi paşi. Acest lucru este evident deoarece sistemul FIR are o memorie finită egală cu 2. În consecință, influența stării inițiale asupra stărilor viitoare şi asupra ieşirilor dispare după doi paşi. Pentru $n_0=0$, ecuația (4.154) conduce la ieşirea

$$y[n]=\mathbf{g}^t\mathbf{F}^n\mathbf{v}[0]+\mathbf{g}^t\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{q}x[0]+.....+\mathbf{g}^t\mathbf{F}\mathbf{q}x[n-2]+\mathbf{g}^t\mathbf{q}x[n-1]+dx[n]$$

Deoarece $\mathbf{F}^n=0$ pentru $n\geq 2$, ieşirea devine

$$y[n]=\mathbf{g}^t\mathbf{F}\mathbf{q}x[n-2]+\mathbf{g}^t\mathbf{q}x[n-1]+dx[n] \qquad n\geq 2$$

Substituind valorile pentru **g**, **F**, **q** şi d, ecuația de mai sus se reduce la

$$y[n]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2] \qquad n\geq 2$$

care este descrierea intrare-ieşire a sistemului FIR.

Ca o generalizare a rezultatelor din exemplul de mai sus, pentru un sistem FIR de ordinul *N*, $\mathbf{F}^n=0$ pentru $n\geq N$ şi, în consecință, starea inițială a sistemului afectează doar primele *N* ieşiri.

Exemplul 4.9.

Să se calculeze răspunsul la treapta unitate a sistemului

$$\mathrm{v}[n+1]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\mathrm{v}[n]+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+2x[n]$$

Soluție. Cele două componente din ecuația de stare sunt

$$\upsilon_1[n+1]=\frac{1}{2}\upsilon_1[n]+x[n], \qquad \upsilon_2[n+1]=\frac{1}{3}\upsilon_2[n]+x[n]$$

Acesta este un sistem de două ecuații independente care pot fi uşor rezolvate recursiv, ca în cazul uni-dimensional. Într-adevăr, din (4.145) pentru n > 0, rezultă

$$\upsilon_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\upsilon_1[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}x[k]$$

$$\upsilon_2[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n\upsilon_2[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k}x[k]$$

Ieşirea sistemului este

$$y[n]=\upsilon_1[n]+\upsilon_2[n]+2x[n]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\upsilon_1[0]+\left(\frac{1}{3}\right)^n\upsilon_2[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k}+2 \qquad n>0$$

care se mai poate scrie sub forma

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\upsilon_1[0]+\left(\frac{1}{3}\right)^n\upsilon_2[0]+2(1-2^{-n})+\frac{3}{2}(1-3^{-n})+2 \qquad n>0$$

Se observă că soluția a putut fi obținută în formă compactă, deoarece matricea **F** este diagonală. Dacă matricea **F** este diagonală, sistemul N – dimensional poate fi descris în spațiul stărilor de N ecuații unidimensionale independente. Astfel, ecuațiile de stare devin ecuații cu diferențe de ordinul întâi, uşor de rezolvat.

4.4.4. Relații de legătură între descrierea intrare-ieşire şi descrierea în spațiul stărilor a SDLIT

Din prezentarea anterioară s-a văzut că nu există numai o singură posibilitate în ceea ce priveşte alegerea variabilelor de stare ale unui sistem cauzal. Valori diferite ale vectorului de stare conduc la structuri diferite pentru implementarea aceloraşi sisteme. În general, relaţiile intrare ieşire nu descriu în mod unic structura internă a sistemului.

Pentru a demonstra această afirmaţie, se consideră un sistem SISO (o singură intrare şi o singură ieşire), N-dimensional, având reprezentarea în spaţiul stărilor

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \tag{4.157}$$

$$y[n] = \mathbf{g}^t\mathbf{v}[n] + dx[n] \tag{4.158}$$

Fie **P** orice matrice $N \times N$ a cărei inversă, $\mathbf{P}^{-1}$, există. Se defineşte un nou vector de stare $\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}]$

$$\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}] = \mathbf{P}\mathbf{v}[\mathrm{n}] \tag{4.159}$$

de unde

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{v}}[n] \tag{4.160}$$

Dacă relaţia (4.157) este multiplicată la dreapta cu **P**, se obţine

$$\mathbf{P}\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{P}\mathbf{q}x[n]$$

Utilizând (4.159) şi (4.160), ecuaţia de stare de mai sus devine

$$\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}+1] = (\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}] + (\mathbf{P}\mathbf{q})\mathrm{x}[\mathrm{n}] \tag{4.161}$$

Similar, cu ajutorul relaţiei (4.160), ecuaţia de ieşire (4.158) devine

$$y[n] = (\mathbf{g}^{\mathbf{t}}\mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n] \tag{4.162}$$

Se definesc parametrii matriceali de sistem $\widehat{\mathbf{F}}$, $\widehat{\mathbf{q}}$, $\widehat{\mathbf{g}}$, sub forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}} &= \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} \\ \widehat{\mathbf{q}} &= \mathbf{P}\mathbf{q} \\ \widehat{\mathbf{g}}^{\mathbf{t}} &= \mathbf{g}^{\mathbf{t}}\mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \tag{4.163}$$

Cu aceste definiţii, ecuaţiile de stare pot fi exprimate ca

$$\hat{\mathbf{v}}[n+1] = \widehat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}}[n] + \widehat{\mathbf{q}}x[n] \tag{4.164}$$

$$y[n] = \widehat{\mathbf{g}}^t\hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n] \tag{4.165}$$

Prin compararea relaţiilor (4.157) şi (4.158) cu (4.164) şi (4.165), se observă că printr-o simplă transformare liniară a variabilelor de stare, se generează un nou set de ecuaţii de stare şi o ecuaţie de ieşire, în care intrarea $x[n]$ şi ieşirea $y[n]$ sunt neschimbate. Deoarece există un număr infinit de alegeri ale matricei de transformare **P**, există un număr infinit de ecuaţii de stare şi structuri pentru un sistem. Unele dintre aceste structuri sunt diferite, în timp ce altele sunt apropiate ca structură, diferind doar prin factorii de scalare.

Unei implementări în spațiul stărilor a unui sistem i se asociază conceptul de *implementare minimală*. O implementare internă se spune că este *minimală* dacă dimensiunea spațiului stărilor (a numărului variabilelor de stare) este cea mai mică din toate realizările posibile. Deoarece fiecare variabilă de stare reprezintă o cantitate ce trebuie stocată şi reactualizată la fiecare moment *n*, rezultă că o implementare minimală este aceea care necesită cel mai mic număr de celule de întârziere. Se reaminteşte faptul că implementarea în formă directă II necesită cel mai mic număr de celule de memorie şi, în consecință, o realizare în spațiul stărilor a acesteia are ca rezultat o implementare minimală. Similar, un sistem FIR realizat ca o structură în formă directă conduce la o implementare minimală internă, dacă valorile registrelor de stocare sunt definite ca variabile de stare. Implementarea în forma directă I a unui sistem IIR nu conduce la o implementare minimală.

În continuare se va determina răspunsul la impuls al sistemului descris în spațiul stărilor. Prin definiție, răspunsul la impuls $h[n]$ al unui sistem este răspunsul de stare zero al sistemului la excitația $x[n]=\delta[n]$ [63].

Prin urmare, acesta poate fi obținut din ecuația (4.154) dacă se impune $n_0=0$ (momentul când se aplică intrarea), $v[0]=0$ şi $x[n]=\delta[n]$. Astfel, răspunsul la impuls al sistemului descris de (4.157) şi (4.158) este dat de relația

$$\mathrm{h}[\mathrm{n}]=\mathbf{g}^{\mathrm{t}}\mathbf{F}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{q}\mathrm{u}[\mathrm{n}-1]+\mathrm{d}\delta[\mathrm{n}]=\mathbf{g}^{\mathrm{t}}\mathbf{\Phi}[\mathrm{n}-1]\mathbf{q}\mathrm{u}[\mathrm{n}-1]+\mathrm{d}\delta[\mathrm{n}] \quad (4.166)$$

Pentru o descriere internă dată este uşor de determinat răspunsul la impuls din relația (4.166). Invers, însă, nu este uşor, deoarece există un număr infinit de implementări interne pentru o aceeaşi descriere intrare-ieşire.

Exemplul 4.10.

Secvența Fibonacci este dată de $\left\{\begin{matrix}1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... \\ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\end{matrix}\right\}$

Să se determine al şaptesprezecelea termen fără a calcula termenii anteriori.

Soluție. Secvența Fibonacci poate fi scrisă ca fiind răspunsul la impuls al sistemului descris de ecuația cu diferențe

$$y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n]$$

Într-adevăr impunând $y[-1] = y[-2] = 0$, şi $x[n] = \delta[n]$, se obţine $h[0] = 1, h[1] = 1, h[2] = 2, h[3] = 3, h[4] = 5$ şi aşa mai departe.

Realizarea în spaţiul stărilor de tipul 1este descrisă de

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{d} = 1$$

Din (4.166), rezultă

$$h[17] = \mathbf{g}^t \mathbf{F}^{16} \mathbf{q}$$

Calculând $\mathbf{F}^2$, $\mathbf{F}^4$, $\mathbf{F}^8$ şi $\mathbf{F}^{16}$, se obţine

$$\mathbf{F}^{16} = \begin{bmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă $h[17] = 2584$.

4.4.4.1. Sistemul transpus

Transpusa matricei de sistem $\mathbf{F}$ este se notează cu $\mathbf{F}^{t}$ şi se obţine prin schimbarea coloanelor sale în linii.

Ţinând cont de relaţiile (4.157)-(4.158), se defineşte sistemul transpus, ca fiind caracterizat de relaţiile

$$\mathbf{v}'[n+1] = \mathbf{F}^t \mathbf{v}'[n] + \mathbf{g}x[n] \tag{4.167}$$

$$y'[n] = \mathbf{q}^t \mathbf{v}'[n] + dx[n] \tag{4.168}$$

Conform relaţiei (4.166), răspunsul la impuls al acestui sistem este dat de

$$h'[n] = \mathbf{q}^t (\mathbf{F}^t)^{n-1} \mathbf{g} u[n-1] + d\delta[n] \tag{4.169}$$

Din algebra matriceală se ştie că $(\mathbf{F}^t)^{n-1} = (\mathbf{F}^{n-1})^t$. Prin urmare

$$h'[n] = \mathbf{q}^t (\mathbf{F}^{n-1})^t \mathbf{g} u[n-1] + d\delta[n] \tag{4.169'}$$

Deoarece termenul $\mathbf{q}^t (\mathbf{F}^{n-1})^t \mathbf{g}$ este scalar, el este egal cu transpusul său, adică

$$\left[\mathbf{q}^t (F^{n-1})^t \mathbf{g}\right]^t = \mathbf{g}^t (\mathbf{F}^t)^{n-1} \mathbf{q}$$

ceea ce conduce la identitatea relaţiilor (4.166) şi (4.169') şi, deci, $h'[n] = h[n]$. Astfel un sistem SISO şi transpusul său au acelaşi răspuns la impuls şi, prin urmare, aceeaşi relaţie de legătură intrare-ieşire.

Realizările în spaţiul stărilor de tipul 1 şi tipul 2, descrise de relaţiile (4.132)÷(4.135), sunt structuri transpuse care provin de la aceeaşi relaţie de legătură intrare-ieşire (4.126).

Exemplul 4.11.

Să se deseneze diagrama bloc pentru sistemul transpus din Exemplul 4.5 cu realizarea din figura 4.31.

Soluție. Inversând direcția semnalului în toate ramurile şi înlocuind nodurile de branşare cu noduri de sumare, şi invers, în diagrama bloc din figura 4.31, se obține diagrama bloc din figura 4.33a.

Sistemul transpus este caracterizat de ecuațiile

$$\begin{bmatrix} v_1'[n+1] \\ v_2'[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}35 & -0{,}45 \\ 0{,}55 & 0{,}35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'[n] \\ v_2'[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'[n] \\ v_2'[n] \end{bmatrix} + x[n]$$

care conduc direct la diagrama bloc reprezentată în figura 4.33b.

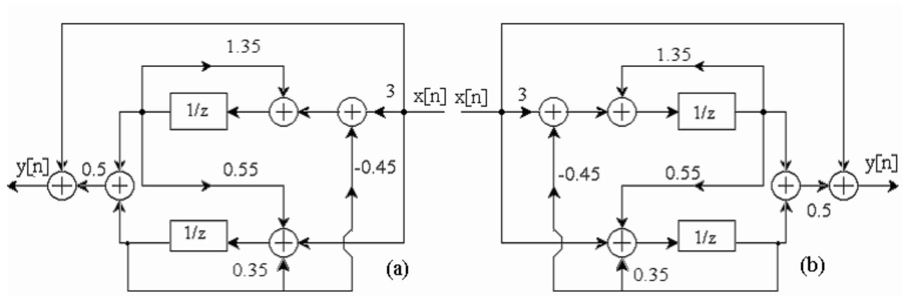


Figura 4. 33. (a) Sistemul transpus al celui din figura 4.31, (b) Realizarea sistemului din exemplul 4.11.

S-a folosit structura transpusă deoarece furnizează o metodă simplă de generare a unei noi structuri. Totuşi, câteodată această nouă structură poate diferi numai printr-un factor de multiplicare sau poate fi identică cu cea originală.

4.4.4.2. Sistemul diagonal

O soluție compactă a ecuațiilor în spațiul stărilor se obține, dacă matricea de sistem **F** este diagonală. Aceasta implică găsirea unei matrice **P**, astfel încât $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}$ să fie diagonală. Diagonalizarea matricei **F** poate fi realizată mai întâi determinând valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei.

Fie λ o valoare proprie a lui **F**. Un vector nenul **u** este un vector propriu asociat matricei **F**, dacă

$$\mathbf{Fu} = \lambda\mathbf{u} \tag{4.170}$$

Pentru a determina valorile proprii ale lui **F**, se observă că

$$(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0 \tag{4.171}$$

Ecuația are o soluție nenulă (netrivială) **u**, dacă matricea $\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}$ este singulară ($(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})$ neinversabilă), şi anume, dacă

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{4.172}$$

Determinantul din relația (4.172), conduce la polinomul caracteristic al matricei **F**. Pentru o matrice **F** de ordin $N \times N$, polinomul caracteristic este de grad N şi, prin urmare, are N rădăcini notate cu $\lambda_{i,}$ i = 1, 2, ….N. Rădăcinile pot fi distincte sau nu. În orice caz, pentru fiecare rădăcină λ_i, se poate determina un vector $\mathbf{u}_i$, numit vectorul propriu corespunzător valorilor proprii λ_i, din ecuația

$$\mathbf{Fu}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$$

Aceşti vectori proprii sunt ortogonali, adică $\mathbf{u}_i^t\mathbf{u}_j = 0$, pentru $i \neq j$.

Dacă se formează o matrice **U** ale cărei coloane sunt vectorii proprii $\{u_i\}$,

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \cdots & \mathbf{u_N} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{Bmatrix},$$

atunci matricea $\mathbf{F} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{FU}$ este diagonală.

Se observă faptul că valorile proprii ale matricei **F** sunt identice cu rădăcinile polinomului caracteristic. De exemplu, sistemul care generează secvența Fibonacci este caracterizat de ecuația cu diferențe omogenă

$$y[n] - y[n-1] - y[n-2] = 0 \tag{4.173}$$

Soluția ecuației omogene are forma

$$y_h[n] = \lambda^n$$

Substituția acestei soluții în (4.173) conduce la polinomul caracteristic

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

care este exact acelaşi polinom caracteristic obținut din determinantul matricei $(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})$.

Deoarece implementarea sistemului cu ajutorul variabilelor de stare nu este unică, nici matricea **F** nu este unică. Totuşi, valorile proprii ale sistemului sunt unice, astfel că ele sunt invariante la orice transformare liniară, nesingulară, a matricei **F**. În consecință, polinomul caracteristic corespunzător matricei **F**, poate fi determinat fie evaluând determinantul matricei $(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{I})$, fie din ecuația cu diferențe ce caracterizează sistemul.

În concluzie, descrierea internă realizează o caracterizare alternativă a sistemului, care este echivalentă cu o descriere intrare-ieşire. Un avantaj al descrierii sistemului în spațiul stărilor este că oferă un plus de informații în legătură cu variabilele interne ale sistemului, informații care nu se obțin uşor din descrierea intrare-ieşire. Formularea variabilelor de stare pentru un sistem liniar invariant în timp permite reprezentarea sistemul printr-un sistem de ecuații cu diferențe de ordinul întâi, independente. Aceată independență poate fi realizată prin intermediul unei transformări care poate fi obținută prin găsirea valorilor proprii şi vectorilor proprii ai sistemului.

Exemplul 4.12.

Să se găsească o formulă explicită pentru secvența Fibonacci din Exemplul 4.10.

Soluție. În Exemplul 4.10 s-a stabilit că secvența Fibonacci poate fi considerată ca fiind răspunsul la impuls al sistemului care satisface următoarele ecuații în spațiul stărilor:

$$\mathbf{v}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+x[n]$$

Aici se doreşte a se determina un sistem echivalent

$$\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}+1]=\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}]+\hat{\mathbf{q}}\mathrm{x}[\mathrm{n}]$$

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}]=\mathbf{g}^{\mathrm{t}}\hat{\mathbf{v}}[\mathrm{n}]+\mathrm{dx}[\mathrm{n}]$$

astfel încât matricea $\hat{\mathbf{F}}$ să fie diagonală. Conform relației (4.163), două sisteme sunt echivalente dacă

$$\hat{\mathbf{F}}=\mathbf{PFP}^{-1} \qquad \hat{\mathbf{q}}=\mathbf{Pq} \qquad \hat{\mathbf{g}}^{t}=\mathbf{g}^{t}\mathbf{P}^{-1}$$

Fiind dată matricea **F**, problema este de a determina o matrice **P** astfel încât $\hat{\mathbf{F}}=\mathbf{PFP}^{-1}$ să fie o matrice diagonală.

Întâi se calculează determinantul din (4.172), de unde rezultă valorile proprii.

$$\det(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Corespunzător acestor valori proprii, din (4.170) rezultă vectorii proprii

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Se observă că $\mathbf{u}_1^t\mathbf{u}_2 = 1 + \lambda_1\lambda_2 = 0$ (vectorii proprii sunt ortogonali). Matricea **U**, ale cărei coloane sunt vectori proprii ai matricei **F**, este

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Matricea $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U}$ este diagonală. Într-adevăr, se observă uşor că

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

şi deoarece matricea de transformare este $\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1}$ atunci

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Astfel, matricea diagonală $\hat{\mathbf{F}}$ are forma $\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, unde elementele diagonale sunt valorile proprii ai polinomului caracteristic.

Mai mult, $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ şi $\hat{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^t\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^t\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$

Răspunsul la impuls al acestui sistem diagonal echivalent este

$$h[n] = \hat{\mathbf{g}}^t\hat{\mathbf{F}}^{n-1}\hat{\mathbf{q}}u[n-1] + d\delta[n] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]u[n-1] + \delta[n]$$

care este formula generală pentru secvența Fibonacci.

O expresie alternativă poate fi găsită observând că secvența Fibonacci poate fi considerată ca fiind răspunsul de intrare zero al sistemului descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n]$$

cu condițiile inițiale y[-1] = 1, y[-2] = -1. Din implementarea în spațiul stărilor de tip 1 s-a observat că $\upsilon_1[0] = y[-2] = -1$ şi $\upsilon_2[0] = \mathrm{y}[-1] = 1$. Prin urmare

$$\begin{bmatrix} \hat{\upsilon}_1[0] \\ \hat{\upsilon}_2[0] \end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \upsilon_1[0] \\ \upsilon_2[0] \end{bmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

iar răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n] = \hat{\mathrm{g}}^t \hat{\mathrm{F}}^n \hat{\mathrm{v}}[0] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u[n],$$

care este o formă mai cunoscută a secvenței Fibonacci, în care primul termen al secvenței este zero. Prin urmare, secvența este {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... }.

4.4.5. Analiza SDLIT în spațiul stărilor în domeniul Z

Analiza în spațiul stărilor din paragraful anterior a fost realizată în domeniul timp, dar aceasta poate fi realizată şi în domeniul Z.

Fie ecuația de stare

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \tag{4.174}$$

ce este echivalentă cu un sistem de *N* ecuații cu diferențe de ordinul întâi

$$\begin{aligned} &\upsilon_1[\mathrm{n}+1] = \mathrm{f}_{11}\upsilon_1[\mathrm{n}] + \mathrm{f}_{12}\upsilon_2[\mathrm{n}] + \ldots\ldots + \mathrm{f}_{1\mathrm{N}}\upsilon_\mathrm{N}[\mathrm{n}] + \mathrm{q}_1\mathrm{x}[\mathrm{n}] \\ &\upsilon_2[\mathrm{n}+1] = \mathrm{f}_{21}\upsilon_1[\mathrm{n}] + \mathrm{f}_{22}\upsilon_2[\mathrm{n}] + \ldots\ldots + \mathrm{f}_{2\mathrm{N}}\upsilon_\mathrm{N}[\mathrm{n}] + \mathrm{q}_2\mathrm{x}[\mathrm{n}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\upsilon_\mathrm{N}[\mathrm{n}+1] = \mathrm{f}_{\mathrm{N}1}\upsilon_1[\mathrm{n}] + \mathrm{f}_{\mathrm{N}2}\upsilon_2[\mathrm{n}] + \ldots. + \mathrm{f}_{\mathrm{NN}}\upsilon_\mathrm{N}[\mathrm{n}] + \mathrm{q}_\mathrm{N}\mathrm{x}[\mathrm{n}] \end{aligned} \tag{4.175}$$

Presupunând că starea inițială a sistemului este zero, transformata Z a acestui sistem de ecuații este

$$\begin{bmatrix} zV_1(z) \\ zV_2(z) \\ \vdots \\ zV_N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & & & \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} X(z) \qquad (4.176)$$

unde $V_i(z)$ este transformata Z a lui $\upsilon_i[n]$, $i=1, 2, \ldots, N$.

Se defineşte vectorul $\mathbf{V}(z)$ ca

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix} \qquad (4.177)$$

Relaţia (4.176) poate fi exprimată matriceal, în forma

$$z\mathbf{V}(z) = \mathbf{F}\mathbf{V}(z) + \mathbf{q}X(z) \qquad (4.178)$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{V}(z) &= \mathbf{q}X(z) \\ \mathbf{V}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q}X(z) \end{aligned} \qquad (4.179)$$

Transformata *Z* inversă a relaţiei (4.179), conduce la soluţia pentru ecuaţia de stare în domeniul timp.

Ecuaţia de ieşire este dată de relaţia

$$y[n] = \mathbf{g}^t\mathbf{v}[n] + dx[n] \qquad (4.180)$$

sau, echivalent, în domeniul *Z*

$$Y(z) = \mathbf{g}^t\mathbf{V}(z) + dX(z) \qquad (4.181)$$

Utilizând soluţia dată de relaţia (4.179), se poate elimina vectorul de stare **V**(z) din relaţia (4.181) şi se obţine

$$Y(z) = [\mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d]X(z), \qquad (4.182)$$

care este transformata *Z* a răspunsului de stare zero al sistemului. Funcţia de sistem se obţine din (4.182), sub forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d \qquad (4.183)$$

Se observă că ecuaţia de stare dată de (4.179), ecuaţia de ieşire dată de (4.182) şi funcţia de sistem dată de (4.183), au toate în comun factorul $(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$, care este o mărime fundamentală ce este legată de transformata Z a matricei de tranziţie a sistemului. Această mărime se poate calcula astfel:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{g^t}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{q}u[n-1] + d\delta[n]\right]z^{-n} \\ &= \mathbf{g^t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}^{n-1}z^{-n}\right)\mathbf{q} + d \end{aligned} \qquad (4.184)$$

Termenul din paranteză poate fi scris ca

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}^{n-1}z^{-n} = z^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{F}z^{-1} + \mathbf{F}^2z^{-2} + ...) = \\ &= z^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{F}z^{-1})^{-1} = (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \end{aligned} \qquad (4.185)$$

Dacă se înlocuieşte rezultatul din relația (4.185) în (4.184), se obține expresia lui H(z) ca în relația (4.183). Deoarece matricea de tranziție este dată de $\mathbf{\Phi}[n] = \mathbf{F}^n$ transformata *Z* a lui $\mathbf{\Phi}[n]$ este

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^n z^{-n} = \mathbf{I} + \mathbf{F}z^{-1} + \mathbf{F}^2z^{-2} + ... = (\mathbf{I} - \mathbf{F}z^{-1})^{-1} = z(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \qquad (4.186)$$

Relația (4.186) reprezintă o metodă simplă de determinare matricei de tranziție cu ajutorul transformatei Z. Se reaminteşte că

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \frac{adj(z\mathbf{I} - \mathbf{F})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})} \qquad (4.187)$$

unde adj(**M**) este matricea adjunctă a lui **M,** iar det(**M**) determinantul matricei A. Înlocuind (4.187) în (4.183), rezultă

$$H(z) = \mathbf{g^t}\frac{adj(z\mathbf{I} - \mathbf{F})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})}\mathbf{q} + d \qquad (4.188)$$

În consecință, numitorul A(z) al funcției de transfer $H(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$, ce conține polii funcției de sistem este

$$A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{F}), \qquad (4.189)$$

dar det(z**I**-**F**) este chiar polinomul caracteristic al lui **F** şi rădăcinile sale, care sunt polii sistemului, sunt valorile proprii ale matricei **F**.

Exemplul 4.13.

Să se determine funcția de sistem H(z), răspunsul la impuls $h[n]$ şi matricea de tranziție $\mathbf{\Phi}[n]$ a sistemului care generează secvența Fibonacci. Acest sistem este descris în spațiul stărilor de ecuațiile

$$\begin{aligned}\mathbf{v}[n+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v[n] + x[n]\end{aligned} \tag{4.190}$$

Soluție. Pentru a determina $H(z)$ şi $h[n]$, se calculează $(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}$.

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2-z-1}\begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$

Prin urmare

$$\mathrm{H(z)} = \frac{1}{\mathrm{z}^2-\mathrm{z}-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{z}-1 & 1 \\ 1 & \mathrm{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}^2-\mathrm{z}-1} = \frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}-\mathrm{z}^{-2}}$$

Inversând $H(z)$, se obține $h[n]$ sub forma

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

Se observă că polii lui $H(z)$ sunt $p_1 = (1+\sqrt{5})/2$ şi $p_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Deoarece $|\mathrm{p}_1| > 1$, sistemul care generează secvența Fibonacci este instabil.

Matricea de tranziție $\mathbf{\Phi}[n]$ are transformata Z

$$z(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{z^2-z-1}\begin{bmatrix} z^2-z & z \\ z & z^2 \end{bmatrix}$$

Prin inversarea expresiei de mai sus, rezultă

$$\mathbf{\Phi}[\mathrm{n}] = \begin{bmatrix} \phi_{11}[\mathrm{n}] & \phi_{12}[\mathrm{n}] \\ \phi_{21}[\mathrm{n}] & \phi_{22}[\mathrm{n}] \end{bmatrix}$$

unde

$$\phi_{11}[\mathrm{n}] = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right]\mathrm{u}[\mathrm{n}]$$

$$\phi_{12}[\mathrm{n}] = \phi_{21}[\mathrm{n}] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right]\mathrm{u}[\mathrm{n}]$$

$$\phi_{22}[\mathrm{n}] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}+1}\right]\mathrm{u}[\mathrm{n}]$$

Răspunsul la impuls $h[n]$ poate fi, de asemenea, calculat din (4.166) utilizând matricea de tranziție $\mathbf{\Phi}[n]$.

Metoda de analiză indicată în Exemplul 4.13 se aplică mai ales la calcularea răspunsului de stare zero al sistemului, deoarece s-a folosit transformata Z bilaterală. Dacă se doreşte a se determina răspunsul total al sistemului, considerând starea inițială nenulă, fie aceasta $\mathbf{v}[n_0]$, trebuie folosită transformata Z unilaterală. Astfel, fiind dată o stare inițială $\mathbf{v}[n_0]$ şi o intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, se poate determina vectorul de stare $\mathbf{v}[n]$ pentru $n \geq n_0$ şi ieşirea $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, prin intermediul transformatei Z unilaterale.

Fără a pierde din generalitate, se presupune $n_0 = 0$. Apoi, fiind dată intrarea $x[n]$ pentru $n \geq 0$ şi un sistem cauzal, descris de ecuația de stare din (4.174), transformata Z unilaterală a ecuației de stare este

$$z\mathbf{V}^+(z) - z\mathbf{v}[0] = \mathbf{F}\mathbf{V}^+(z) + \mathbf{q}X(z)$$

sau, echivalent,

$$\mathbf{V}^+(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{v}[0] + (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q}X(z) \qquad (4.191)$$

Se observă că $X^+(z) = X(z)$, deoarece $x[n]$ s-a presupus cauzal.

Similar, transformata Z aplicată ecuației de ieşire dată de relația (4.180) este

$$Y^+(z) = \mathbf{g}^t\mathbf{V}^+(z) + dX(z) \qquad (4.192)$$

Înlocuind $\mathbf{V}^+(z)$ din relația (4.191) în (4.192), se obține

$$Y^+(z) = z\mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{v}[0] + [\mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d]X(z) \qquad (4.193)$$

Primul termen din membrul drept ai relației (4.193), reprezintă răspunsul de intrare zero datorat condițiilor inițiale, iar cel de-al doilea, răspunsul de stare zero. Prin inversarea relației (4.193) se obține răspunsul total al sistemului în domeniul timp.

Exemplul 4.14.

Să se determine răspunsul sistemului Fibonacci pentru $n \geq 0$ având starea inițială

$$\mathbf{v}[0] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluție. Răspunsul de stare zero al acestui sistem a fost determinat în Exemplul 4.13, astfel încât se va determina doar răspunsul de intrare zero, care va fi sumat cu răspunsul de stare zero.

Transformata Z unilaterală a răspunsului de intrare zero este

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{zi}}^{+}(\mathrm{z})=\mathrm{z}\mathbf{g}^{\mathrm{t}}(\mathrm{z}\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{v}[0]=\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}^{2}-\mathrm{z}-1}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{z}-1 & 1\\ 1 & \mathrm{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}^{2}-\mathrm{z}-1}$$

Transformata inversă a lui $Y_{zi}^{+}(z)$ este

$$y_{zi}[n]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]u[n]$$