INTRODUCERE

Prelucrarea numerică a semnalelor (PNS) este un domeniu al științei care s-a dezvoltat foarte rapid în ultimii 30 de ani, ca urmare a progresului înregistrat de tehnologia calculatoarelor și fabricarea circuitelor integrate. Prelucrarea numerică a semnalelor are aplicații în orice domeniu în care informația poate fi prezentată sub formă numerică. Dintre acestea se amintesc:

1. Procesarea de imagini: facsimil, harta vremii prin satelit, animație etc.
2. Instrumentație/control: analiză spectrală, controlul poziției și al vitezei, compresie de date etc.
3. Vorbire/audio: recunoașterea vocii, sinteza vorbirii, egalizare etc.
4. Militar: securitatea comunicațiilor, procesare radar, procesare sonar, ghidarea proiectilelor etc.
5. Telecomunicații: anulare ecou, egalizare adaptivă, conferințe video, comunicații de date etc.
6. Biomedical: scanare computer-tomografie, electroencefalografie, electrocardiografie etc.

Această enumerare ilustrează importanța prelucrării numerice a semnalelor în diverse domenii de activitate. Câteva dintre **avantajele** acestui mod de prelucrare a semnalelor sunt:

1. *Acuratețe garantată* – determinată de numărul de biți folosiți în reprezentarea semnalului;
2. *Reproductibilitate perfectă* – se obțin performanțe identice de la unitate la unitate, dacă nu variază toleranțele componentelor, de exemplu o înregistrare numerică poate fi copiată sau reprodusă fără vreo degradare a calității semnalului;
3. *Nu are abateri cu temperatura sau vechimea*;
4. Sistemele de PNS pot fi realizate sub *formă de circuite integrate* care prezintă siguranță crescută, gabarit redus, putere mică, cost mic;
5. *Flexibiliate crescută* – sistemele de PNS pot fi programate și reprogramate pentru a realiza o varietate de funcții, fără modificarea hardului;

6. *Performanțe superioare* – sistemele de PNS pot realiza funcții inaccesibile prelucrării analogice, de exemplu obținerea unui răspuns de fază liniară, implementarea de algoritmi pentru filtrarea adaptivă.

Evident, există și **dezavantaje** ale PNS:

1. *Viteză și cost* – sistemele de PNS pot fi scumpe când sunt implicate semnale de bandă largă. În prezent, convertoarele analog/numerice și numeric/analogice sunt costisitoare sau nu au suficientă rezoluție pentru aplicații PNS de bandă largă. Timpul necesar conversiei limitează viteza de lucru. Obișnuit, numai circuitele integrate specializate pot procesa semnale în domeniul MHz și sunt scumpe. Semnale de bandă mai mare de 100 MHz se prelucrează numai analogic;
2. *Timpul de proiectare* – uneori proiectarea unui circuit poate consuma nejustificat de mult timp;
3. *Problema lungimii finite a cuvintelor* – în situațiile de prelucrare în timp real, considerații economice impun ca algoritmii PNS să fie implementați pe un număr limitat de biți. Dacă acesta nu este suficient pentru a reprezenta variabilele, apar degradări serioase ale performanțelor circuitului. Sistemele numerice sunt afectate de zgomotul de cuantizare al convertoarelor analog/numerice, care este cu atât mai mare cu cât numărul de biți folosit în reprezentarea eșantioanelor semnalului de intrare este mai mic. Mai mult, în timpul prelucrării, datorită operației de rotunjire, apare un zgomot care, prin acumulare, poate conduce la instabilitate pentru sistemele de ordin superior.

Prelucrarea numerică a semnalelor implică reprezentarea, transmisia și prelucrarea semnalelor folosind tehnici numerice și procesoare numerice, deci, se poate spune că PNS se ocupă cu reprezentarea numerică a semnalelor și utilizarea procesoarelor numerice pentru a analiza, modifica sau extrage informații din semnale.

Deși domeniul prelucrării numerice a semnalelor este foarte dinamic, ajungându-se, în funcție de aplicație la dezvoltarea unor algoritmi și metode de analiză foarte sofisticate, în lucrarea de față se urmărește prezentarea principiilor fundamentale care stau la baza prelucrării numerice de semnal. Obiectivele acestei cărți constau în prezentarea unitară și documentată a teoriei sistemelor discrete liniare și introducerea unor metode și tehnici de analiză de bază folosite în prelucrarea numerică a semnalelor. Conceptele descrise în această carte pot fi împărțite în patru categorii: analiză, sinteză, transformări și filtrare liniară. Semnalele și sistemele se analizează în domeniul timp și frecvență pentru a le determina caracteristicile. În domeniul timp un filtru numeric este caracterizat de *răspunsul la impuls* $\{h[n]\}$. *Suma de convoluție* permite determinarea ieșirii $\{y[n]\}$, cunoscute fiind secvența de intrare $\{x[n]\}$ și răspunsul la impuls. Cunoașterea răspunsului la impuls permite determinarea stabilității filtrului. *Ecuațiile cu diferențe* constituie o descriere alternativă a filtrelor în domeniul timp, utilă în implementarea lor.

De obicei, specificațiile filtrelor se dau în domeniul frecvență, motiv pentru care va fi folosită *transformata Fourier* pentru examinarea proprietăților semnalelor și sistemelor în acest domeniu. Transformata Fourier a răspunsului la impuls $\{h[n]\}$ determină *funcția de transfer* $H(\omega)$ a filtrului și reprezintă câștigul filtrului la diferite frecvențe. Transformata Fourier a unei secvențe $\{x[n]\}$ definește *spectrul* $X(\omega)$ al acesteia. *Transformata Fourier discretă* este folosită pentru analiza spectrală cu ajutorul calculatorului numeric, folosind algoritmi rapizi de calcul. Tot pentru analiza semnalelor și sistemelor discrete se folosește o tehnică mai generală oferită de transformata Z, cu ajutorul căreia se obține o interpretare facilă a răspunsului în frecvență al filtrului. *Funcția de sistem* H(z) este transformata Z a răspunsului la impuls. Metodele de sinteză implică aflarea coeficienților pentru satisfacerea specificațiilor dorite ale filtrelor. De asemenea, sunt prezentate câteva metode simple de obținere a unor filtre numerice selective de frecvență.

În capitolul 1 sunt descrise operațiile de bază ce intervin în conversia analog - numerică a semnalelor analogice, este descris în detaliu procesul de eșantionare a unui semnal armonic și este explicat fenomenul alias.

Capitolul 2 este dedicat caracterizării și analizei sistemelor discrete liniare invariante în timp în domeniul timp. Este intodusă suma de convoluție și se efectuează clasificarea sistemelor în funcție de caracteristicile lor. Sistemele discrete liniare invariante în timp sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe și se determină răspunsul acestora la semnale de intrare arbitrare în condiții inițiale nenule.

În capitolul 3 se introduc transformata Z bilaterală și unilaterală și proprietățile acestora. Se ilustrează folosirea transformatei Z în caracterizarea sistemelor liniare invariante în timp și se reformulează proprietățile de cauzalitate și stabilitate ale sistemelor în funcție de transformata Z. Transformata Z unilaterală este folosită pentru determinarea răspunsului unui sistem discret, liniar, invariant în timp la un semnal de intrare dat, în condiții inițiale.

Capitolul 4 tratează analiza semnalelor în domeniul frecvență. Sunt introduse seria și transformata Fourier ca instrumente de analiză a semnalelor periodice, respectiv aperiodice, atât în domeniul analogic, cât și discret.

În capitolul 5 sistemele discrete liniare invariante în timp sunt caracterizate în domeniul frecvență. Sunt prezentate câteva metode simple de proiectare a unor filtre de tip FIR și IIR.

Capitolul 6 este dedicat eșantionării semnalelor și spectrelor lor și problematicii refacerii acestora din eșantioanele prelevate. Se are în vedere eșantionarea în domeniul timp atât a semnalelor analogice aperiodice și periodice, cât și a semnalelor discrete. De asemenea, se tratează eșantionarea spectrelor semnalelor aperiodice analogice și discrete și refacerea lor.

În capitolul 7 este tratată transformata Fourier discretă: proprietăți, legătura cu alte transformate și aplicații ale DFT în filtrarea liniară.

Capitolul 8 introduce algoritmi rapizi pentru calculul convoluției şi ai transformatei Fourier rapide.

În capitolul 9 sunt introduse diverse structuri de implementare ale filtrelor numerice care, în practică, au comportări diferite la cuantizarea coeficienților filtrelor.

Capitolele 10 şi 11 prezintă separat metode de proiectare folosite pentru obținerea filtrelor cu răspuns finit şi, respectiv, infinit la impuls.

Capitolul 12 analizează efectul lungimii finite a reprezentării valorilor numerice asupra performanțelor sistemelor, în diverse structuri de implementare.

În capitolul 13 sunt introduse metodele neparametrice şi parametrice de estimare a spectrului de putere al semnalelor.

Capitolul 14 tratează problematica predicției liniare şi a filtrării liniare optimale.

În capitolul 15 sunt introduse noțiuni fundamantale referitoare la dispozitivele de modificare a frecvenței de eşantionare a semnalelor si analiza multirezoluție a semnalelor prin descompunerea subbandă.

Cartea de față cuprinde 53 de exemple și 86 de probleme, selectate în scopul ilustrării aspectelor teoretice prezentate, și se adresează atât studenților de la studii de zi sau aprofundate, cât si specialiștilor doritori de o tratare unitară a unui domeniu atât de dinamic.

CAPITOLUL 1

NOŢIUNI ŞI OPERAŢII DE BAZĂ ÎN CONVERSIA ANALOG/NUMERICĂ ŞI NUMERIC/ANALOGICĂ

1.1. Semnale

Prin *semnal* se înţelege orice cantitate sau calitate fizică care variază cu timpul, spaţiul sau oricare altă sau alte variabile independente şi transportă sau conţine informaţie.

Aşa, de exemplu, dacă un vapor circulă pe timp de ceaţă, pentru a evita o eventuală coliziune cu altul, el emite semnale sonore care, recepţionate de alte nave, "aduc" informaţii cu privire la prezenţa şi poziţia sa.

Semnalele au natură fizică foarte diversă: biologice, acustice, mecanice, electrice, chimice, video etc.

Metodele folosite în prelucrarea semnalelor sau în analiza răspunsului unui sistem la un anumit tip de semnal depind de natura şi caracteristicile semnalelor, motiv pentru care se va prezenta o clasificare a acestora.

1.1.1. Semnale multidimensionale şi multicanal

Deşi semnalele pot fi reprezentate în multe moduri, în toate cazurile informaţia este conţinută în modelul adoptat. Matematic, semnalele sunt modelate ca funcţii de una sau mai multe variabile independente.

De exemplu, un semnal sonor este reprezentat ca o funcţie de o singură variabilă, şi anume, timpul. Dacă, însă, se consideră o înregistrare fotografică alb-negru, caracterizată în fiecare punct de o nuanţă de gri, aceasta constituie "valoarea" semnalului. Ea nu depinde de timp, ci de poziţia punctului investigat în cadrul imaginii. În acest caz, semnalul nu are o evoluţie temporală, ci se modifică în funcţie de coordonatele carteziene ale punctului din imagine, fiind o funcție de două variabile spațiale $I(x,y)$.

Evident, se poate imagina o succesiune de fotograme, cum este cazul peliculei cinematografice, caz în care nuanțele de gri într-un punct se modifică de la o fotogramă la alta. În acest caz, semnalul este atât funcție de coordonatele carteziene, cât și de timp și poate fi descris de un semnal tridimensional $I(x,y,t)$.

Un semnal se numește *monodimensional* dacă este reprezentat în funcție de o singură variabilă independentă.

Un semnal se numește *M-dimensional* dacă valoarea sa este o funcție de M variabile independente. Semnalul generat de o singura sursă sau senzor și care este o funcție de una sau mai multe variabile independente se numește *semnal monocanal* sau *scalar*.

În unele aplicații, semnalele pot fi generate de mai multe surse sau senzori. Astfel de semnale pot fi reprezentate în formă vectorială. Un exemplu în acest sens îl constituie accelerația determinată de un cutremur de pământ, care este rezultatul suprapunerii a trei tipuri de unde elastice: primară, secundară și de suprafață.

Multe surse generează semnale scalare care, uneori, din considerente matematice sau de notație, sunt tratate drept componente ale unui vector. Un exemplu în acest sens îl constituie ieșirea unui electrocardiograf care are trei electrozi (senzori) plasați în trei locuri diferite pe piele. Dacă notăm cu $s_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, semnalul electric de la electrodul k drept funcție de timp, setul de $p = 3$ semnale poate fi reprezentat ca

$$S_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

O astfel de matrice sau vector de semnale reprezintă un *semnal multicanal*.

În continuare, se consideră cazul unei imagini TV color, care poate fi descrisă de trei funcții de forma $I_r(x,y,t)$, $I_g(x,y,t)$ și $I_b(x,y,t)$ corespunzătoare strălucirii celor trei culori fundamentale (roșu, verde și albastru) ca funcții de timp și coordonatele pixelului. Imaginea TV color reprezintă astfel un semnal tricanal, tridimensional, ce poate fi reprezentat de vectorul

$$I(x,y,t)=\begin{bmatrix} I_r(x,y,t) \\ I_g(x,y,t) \\ I_b(x,y,t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

În cele ce urmează, se va opera cu semnale unicanal, unidimensionale, reale sau complexe, care vor fi numite simplu, semnale.

În electronica uzuală, variabila după care se produce modificarea valorii semnalului este de obicei timpul, motiv pentru care se va considera acest caz, marcând explicit excepțiile. În vederea prelucrării semnalului se utilizează circuite electronice, analogice sau numerice. În consecință, un semnal de o natură fizică oarecare, să zicem biologică, trebuie mai întâi "tradus" într-un semnal electric sau, în general, într-un semnal ușor prelucrabil ulterior. Acesta trebuie să reflecte cât mai fidel caracteristicile semnalului original. Conversia unui semnal de natură oarecare în semnal electric se realizează cu ajutorul unui traductor.

Evident, va apărea și problema inversă. De exemplu, în orientarea unei antene pe o anumită direcție, semnalul electric de comandă trebuie să fie tradus în poziția unghiulară cerută antenei prin intermediul unui "sistem" care admite o comandă electrică (tensiune sau curent) și furnizează ca răspuns o mișcare mecanică de unghi determinat.

1.1.2. Semnale definite în timp continuu și în timp discret

Semnalele pot fi clasificate după caracteristicile variabilei independente și valorile pe care le iau. Variabila independentă poate fi continuă sau discretă. *Semnalele definite în timp continuu* sunt definite pentru orice valoare a variabilei independente dintr-un interval finit sau infinit. Acestea mai sunt cunoscute sub numele de semnale *analogice*. Considerații asupra amplitudinii semnalului vor fi făcute în paragraful următor.

Un exemplu de semnal definit în timp continuu este reprezentat de semnalul de forma

$$s(t)=\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\cdot\sin\left[2\pi F_i(t)+\theta_i(t)\right] \quad (1.3)$$

unde $\{A_i(t)\}$, $\{F_i(t)\}$ și $\{\theta_i(t)\}$ reprezintă mulțimile amplitudinilor, frecvențelor și fazelor (posibil variante în timp) ale sinusoidelor componente și N – numărul de componente. În figura 1.2a este reprezentat un semnal definit în timp continuu.

Este posibil ca un semnal definit în timp continuu să nu fie o funcție continuă de variabila independentă, cum este cazul semnalului reprezentat în figura 1.1.

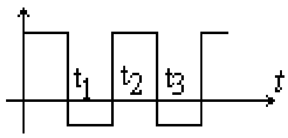

Figura 1.1. Semnal discontinuu definit în timp continuu

Spre deosebire de semnalele definite în timp continuu, există o a doua mare categorie de *semnale definite în timp discret*, care sunt definite numai pentru valori discrete de timp. Acestea nu trebuie neapărat să fie echidistante, dar, în practică, din considerente de comoditate a tratării matematice, de cele mai multe ori, se iau uniform distanțate. Un semnal definit în timp discret poate fi reprezentat matematic de o *secvență* de numere *reale* sau *complexe*.

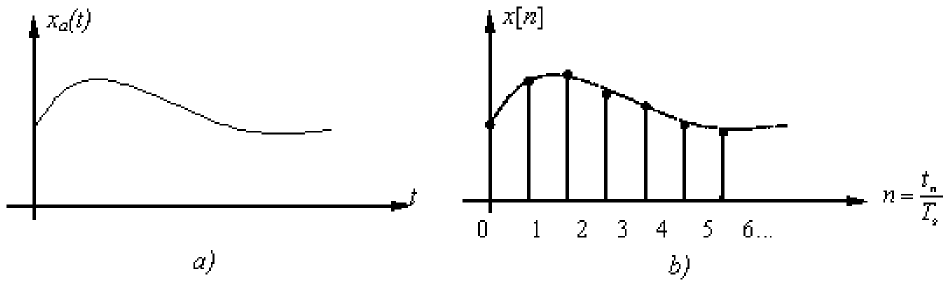

Figura 1.2. Semnal definit în timp discret (b) obținut prin eșantionarea unui semnal analogic (a)

Pentru a putea prelucra un semnal cu ajutorul calculatorului numeric este necesară discretizarea în timp a semnalului definit în timp continuu, operație denumită *eșantionarea* semnalului. *Eșantioanele* reprezintă valorile pe care le ia semnalul la anumite momente de timp $t_n = nT_s$, $n \in Z$, T_s fiind pasul sau perioada de eșantionare. Se poate norma timpul t_n prin împărțirea la T_s, astfel încât timpul (normat) este n, o variabilă discretă. Prin abuz de limbaj, variabila discretă n este denumită timp discret, deși este o mărime adimensională. În plus, această mărime poate proveni și dintr-un semnal care nu are evoluție temporală. În figura 1.2a se prezintă un semnal $x_a(t)$ ce evoluează în timp continuu t. Din el se prelevează eșantioane la momentele nT_s, rezultând semnalul $x[n]$ în timp discret, $n \in Z$. Semnalul $x[n]$ nu este definit decât la valori întregi ale timpului discret n, obținut prin normare cu T_s. Valoarea semnalului discret la un moment n este egală cu valoarea semnalului analogic la momentul de eșantionare nT_s, adică

$$x_a(nT_s) \equiv x[n] \tag{1.4}$$

unde prin $[.]$ s-a indicat faptul că variabila este discretă.

În mod asemănător, se poate imagina că cele două coordonate x și y ale unei înregistrări fotografice se discretizează cu pașii Δx și Δy, obținându-se coordonatele punctelor de eșantionare sub forma unei grile (m·Δx , n·Δy), unde $m \in Z$ și $n \in Z$. După normare, în plan rezultă coordonatele (m , n).

În practică există și semnale intrinsec definite în timp discret, cum ar fi indicele de bursă; un alt exemplu ar fi cel care indică, la o mulțime finită de persoane procentul din acestea care au publicat 0 cărți, o carte, 2 cărți ș.a.m.d., ca în figura 1.3. "Semnalul" care arată procentul de persoane ce au n cărți publicate este un semnal dependent intrinsec de o variabilă discretă (număr de cărți). El nu provine din eșantionarea unui semnal analogic.

Notațiile folosite în literatura de specialitate pentru semnalele definite în timp discret sunt $x[n]$, $x(n)$, x_n sau chiar $x(nT_s)$. În continuare, se va prefera și utiliza notația cu paranteze pătrate pentru argument, pentru a sublinia caracterul discret al timpului.

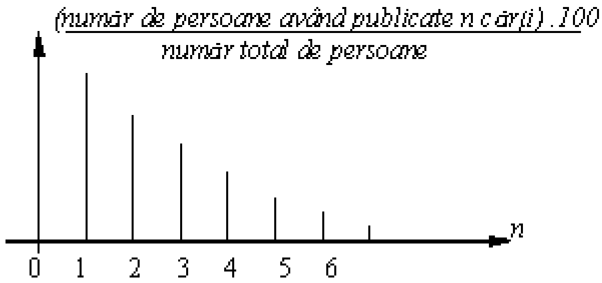

Figura 1.3

1.1.3. Semnale cu valori continue și discrete

Valorile pe care le poate lua un semnal pot fi continue sau discrete. Dacă un semnal poate lua toate valorile posibile dintr-un interval finit sau infinit, el se numește cu *valori continue*. Acesta este cazul semnalelor reprezentate în figura 1.2 a și b. Se observă că atât semnalele analogice cât și cele discrete pot avea valori continue.

Dacă un semnal ia valori dintr-o mulțime finită de valori posibile, el se numește cu *valori discrete*. În mod obișnuit, valorile discrete sunt exprimate ca multiplu întreg al diferenței dintre două valori succesive posibile. Procesul de transformare a unui semnal cu valori continue într-unul cu valori discrete se numește *cuantizare*. Atât semnalele definite în timp continuu cât și cele definite în timp discret pot avea valori discrete.

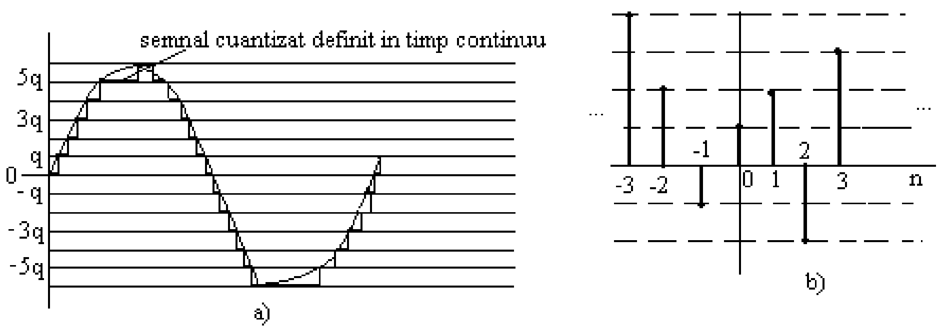

Figura 1.4. Semnal cuantizat a) definit în timp continuu, b) definit în timp discret

În figura 1.4a este reprezentat un semnal analogic cuantizat cu cuanta q. În prelucrarea numerică a semnalelor, pe lângă discretizarea acestora în timp, este necesară și cuantizarea valorilor eșantioanelor, deoarece calculatorul acceptă la intrare numere ce pot fi reprezentate cu un număr finit de cifre binare. Sunt cunoscute sub numele de *semnale numerice* sau *digitale* cele pentru care atât timpul sau, mai general, variabila independentă, cât și amplitudinea semnalului au valori discrete. În figura 1.4b este reprezentat un semnal numeric. Semnalele definite în timp discret se mai numesc și *semnale discrete*, indiferent dacă sunt sau nu cuantizate.

Procesarea numerică a semnalelor se ocupă cu transformări ale semnalelor care sunt discrete atât în timp, cât și în amplitudine. Procesoarele numerice analizează, modifică sau extrag informații din astfel de semnale.

1.1.4. Semnale deterministe și aleatoare

Pentru analiza și procesarea semnalelor este necesară descrierea matematică a acestora, care se referă, de fapt, la modelul ales pentru semnal. Aceasta conduce la o altă clasificare importantă a semnalelor.

Un semnal se numește *determinist* dacă poate fi descris în mod unic de o expresie matematică explicită, o lege sau un tabel de atribuire. Acest termen se folosește pentru a evidenția faptul că orice valoare trecută, prezentă sau viitoare a semnalului este cunoscută precis, fără nici o incertitudine.

În practică, există semnale care fie nu pot fi descrise de formule matematice convenabile din punctul de vedere al fidelității, fie această descriere este prea complicată pentru a fi utilizată. Un semnal se numește *aleator* dacă evoluția acestuia în timp este imprevizibilă. Analiza și descrierea semnalelor aleatoare se realizează cu ajutorul metodelor *statistice*.

1.2. Conceptul de frecvență pentru semnale analogice și discrete

În scopul stabilirii unei analogii între noțiunile de frecvență definite pentru semnale analogice și discrete, se vor considera semnale descrise de o funcție armonică.

a) Fie $x_a(t)$ o oscilație armonică, descrisă matematic în timp continuu de relația

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta)\ ,\quad -\infty < t < +\infty \tag{1.5}$$

unde indicele *a* indică un semnal analogic.

Semnalul $x_a(t)$ este complet caracterizat de trei parametri:

A – amplitudinea oscilației;

Ω – pulsația, exprimată în radiani/secundă;

θ – faza, exprimată în radiani.

Mărimea Ω este legată de frecvența *F*, exprimată în cicluri/perioadă, prin relația

$$\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_p} \tag{1.6}$$

unde T_p este perioada oscilației.

Cu (1.6), relația (1.5) se mai scrie

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \theta)\ ,\qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.7}$$

Prin abuz de limbaj, pulsația Ω este uneori denumită tot frecvență, dar cu specificarea unității de măsură de radiani/secundă, în timp ce F are unitatea de măsură cicluri/perioadă sau Hz.

Semnalul dat de relația (1.7) este caracterizat de următoarele proprietăți:

1. Pentru o frecvență fixă F, $x_a(t)$ este periodic, de perioadă fundamentală $T_p = \dfrac{1}{F}$, adică $x_a(t+T_p) = x_a(t)$ (1.8)

2. Semnalele armonice cu frecvențe distincte sunt distincte.

3. Creșterea frecvenței semnalului are ca rezultat obținerea mai multor perioade ale semnalului în același interval de timp.

Semnalele armonice pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor exponențiale și invers, utilizând relația lui Euler

$$e^{\pm j(\Omega t+\theta)} = \cos(\Omega t+\theta) \pm j\sin(\Omega t+\theta) \qquad (1.9)$$

Rezultă atunci

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)} \qquad (1.10)$$

Se observă folosirea unui termen ce conține pulsație negativă. Aceasta se utilizează datorită comodității de calcul pe care o oferă exponențialele (reproducere prin integrare sau derivare). Termenul corespunzător pulsației pozitive determină un fazor ce se rotește în sens opus acelor de ceasornic cu viteza unghiulară Ω, iar cel cu pulsație negativă, un fazor ce se rotește în sens orar cu aceeași viteză unghiulară.

b) Fie semnalul armonic discret

$$x[n] = A\cos(\omega n+\theta)\ , \qquad n \in Z \qquad (1.11)$$

unde A este amplitudinea sinusoidei, ω – pulsația, θ – faza.

Pentru a păstra analogia cu cazul semnalelor analogice, pulsația se măsoară în radiani/eșantion, iar faza în radiani. Tot prin abuz de limbaj, pulsației ω i se mai spune frecvență, dar cu specificarea unității de măsură. În locul pulsației ω se poate folosi frecvența f

$$\omega = 2\pi f \qquad (1.12)$$

adică $x[n] = A\cos(2\pi f n+\theta)\ ,\ n \in Z$ (1.13)

În paragraful (1.3.1) se va stabili legătura dintre frecvențele f și F, dar pentru moment se evidențiază câteva proprietăți ale semnalului discret $x[n]$ dat de relația (1.13), în comparație cu cele stabilite pentru semnalul analogic.

1. Periodicitatea în timp discret este definită prin relația

$$x[n \pm N] = x[n],\ \forall n \in Z \text{ și N întreg} \qquad (1.14)$$

Cea mai mică valoare pozitivă a lui N pentru care (1.14) este adevărată se numește *perioadă fundamentală*.

Pentru ca semnalul dat de (1.13) de frecvență f_0 să fie periodic trebuie ca

$$\cos[2\pi f_0(n+N)+\theta]=\cos[2\pi f_0 n+\theta]$$

(1.15) Relația (1.15) este adevărată dacă și numai dacă

$$2\pi f_0 N = 2k\pi \tag{1.16}$$

sau, echivalent

$$f_0=\frac{k}{N} \tag{1.17}$$

adică f_0 este un *număr rațional*.

2. Semnalele armonice discrete sunt identice dacă pulsațiile lor diferă printr-un multiplu întreg de 2π sau, echivalent, frecvențele diferă printr-un număr întreg, adică semnalele

$$x_k[n]=A\cos(\omega_k n+\theta),\quad k=0,1,2,\dots, \tag{1.18}$$

sunt identice, dacă

$$\omega_k=\omega_0+2k\pi\ ;\ -\pi<\omega_0\le\pi\ ,\ \text{sau}\ f_k=f_0+k,\ -\frac{1}{2}<f_0\le\frac{1}{2},\ k=0,1,2,.. \tag{1.19}$$

Pe de altă parte, secvențele corespunzătoare oricărui semnal armonic discret cu pulsația cuprinsă în intervalul $(-\pi,\pi]$ sau frecvența în intervalul $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sunt distincte. Intervalele $(-\pi,\pi]$ și $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ se numesc *fundamentale*. Datorită periodicității descrise de (1.19), orice secvență armonică de altă pulsație sau frecvență decât cele din intervalul fundamental este identică cu o secvență armonică având pulsația $-\pi<\omega_0\le\pi$, respectiv frecvența $-\frac{1}{2}<f_0\le\frac{1}{2}$. Din acest motiv semnalele armonice ale căror frecvențe $f_k\notin\left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right]$ se numesc *alias*-uri ale semnalului armonic corespunzător frecvenței f_0. Adoptarea acestei denumiri va fi justificata în paragraful 1.3.1.

3. Frecvență maximă de oscilație se atinge atunci când $\omega=\pi$ (sau $\omega=-\pi$) sau, echivalent, $f=\frac{1}{2}$ (sau $f=-\frac{1}{2}$).

1.3. Conversia analog-numerică și numeric-analogică

Cele mai multe din semnalele de interes practic (vorbire, biologice, seismice, radar, sonar, de comunicații, audio, video) sunt analogice. Pentru a prelucra astfel de semnale cu metode numerice este nevoie a le transforma mai întâi într-o formă numerică, adică într-o secvență de numere $x_q[n]$, cu o anumită precizie. Această operație se numește conversie analog-numerică, iar dispozitivul care realizează acest lucru se numește convertor analog-numeric (A/N). După prelucrarea acestora, urmează adesea o nouă conversie, numeric-analogică (N/A), prin care datele numerice $y[n]$ sunt transformate într-o mărime analogică $y_r(t)$.

Operațiile descrise anterior sunt realizate de un sistem a cărui schemă bloc este reprezentată în figura 1.5.

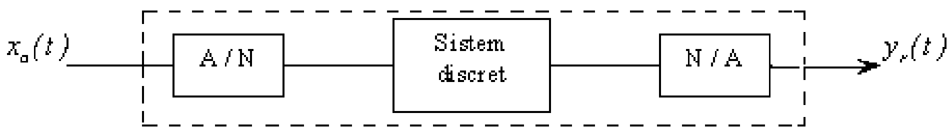

Figura 1.5. Sistem discret pentru procesarea semnalelor analogice

Conversia analog-numerică poate fi văzută ca un proces în trei etape, ilustrat în figura 1.6.

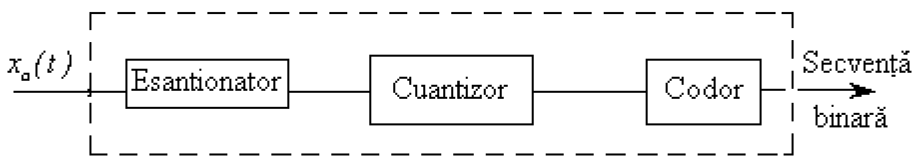

Figura 1.6. Părțile componente ale unui convertor A / N

Cele trei etape ale conversiei A/N sunt:

1. *Eșantionarea,* care constă în reținerea valorilor semnalului definit în timp continuu la momente discrete de timp. Dacă intrarea este $x_a(t)$, ieșirea din blocul de eșantionare este $x_a(nT) = x[n]$, unde T este perioada de eșantionare.
2. *Cuantizarea,* prin care se alocă fiecărui eșantion o valoare dintr-o mulțime finită. Diferența dintre eșantionul necuantizat ($x[n]$) și cel cuantizat ($x_q[n]$) reprezintă *eroarea de cuantizare.*
3. *Codarea*, care reprezintă atribuirea unei secvențe binare fiecărui eșantion cuantizat $x_q[n]$. În practică, există circuite care realizează toate aceste funcții. După ce mărimea $x_q[n]$ este prelucrată numeric, se obține mărimea $y[n]$ care, de obicei, este supusă unei operații inverse, de conversie N/A, pentru a putea fi văzută, auzită etc.

Eșantionarea nu conduce la pierdere de informații și nici nu introduce distorsiuni dacă banda semnalului este limitată și frecvența de eșantionare este adecvat aleasă pentru a nu apărea suprapuneri sau interferențe spectrale, cunoscute și sub numele de eroare de *aliere sau eroare alias* [13].

Cuantizarea conduce la pierdere de informație, fiind un proces ireversibil care are ca rezultat distorsionarea semnalului. Mărimea distorsiunilor depinde de numărul de biți folosiți în procesul de conversie A/N [29].

1.3.1. Eșantionarea semnalelor analogice

Există multe metode de a eșantiona un semnal analogic. În cele ce urmează, se va considera numai eșantionarea *periodică* sau *uniformă*, care este cea mai întâlnită în practică. Aceasta este descrisă de relația

$$x[n] = x_a(nT) \ , \ n \in Z \tag{1.20}$$

unde $x[n]$ este semnalul discret obținut prin reținerea valorilor semnalului analogic $x_a(t)$ la fiecare T secunde. Această procedură este ilustrată în figura 1.7.

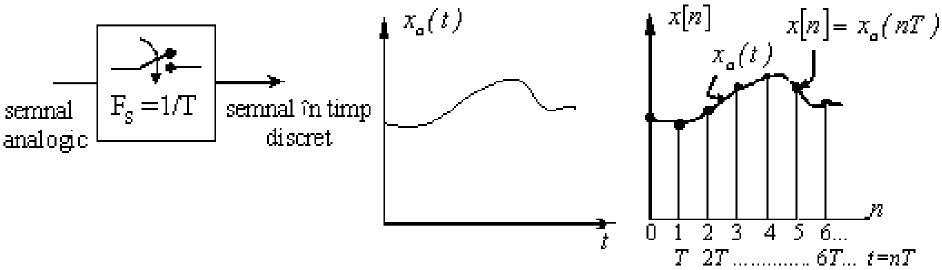

Figura 1.7. Eșantionarea periodică a unui semnal analogic

Intervalul de timp T dintre două eșantioane succesive se numește *perioadă de eșantionare* sau *interval de eșantionare*. Inversa acestei mărimi ($1/T = F_s$) se numește *viteză* sau *rată de eșantionare* (eșantioane/secundă) sau *frecvență de eșantionare* (Hertz). Eșantionarea periodică implică existența unei relații între variabilele independente ale semnalului analogic și discret, adică între *t* și *n*.

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \tag{1.21}$$

În consecință, va exista o relație și între frecvența F (sau Ω) a semnalului analogic și f (sau ω) a semnalului discret. Pentru a stabili această relație, se consideră un semnal analogic, de forma

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta) \tag{1.22}$$

care, eșantionat periodic cu $F_s = 1/T$ eșantioane pe secundă, produce semnalul

$$x_a(nT) = x[n] = A\cos(2\pi FnT + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right) \tag{1.23}$$

Dacă se compară (1.23) cu (1.13) se observă că frecvențele F și f sunt legate prin relația

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{1.24}$$

sau, echivalent,

$$\omega = \Omega T \tag{1.25}$$

Relația (1.24) justifică numele de frecvență *relativă* sau *normalizată*, care se folosește uneori pentru mărimea f.

Se reamintește (paragraful 1.2) că domeniile în care pot lua valori mărimile F și Ω pentru semnale analogice sunt

$$-\infty < F < +\infty \ , \ -\infty < \Omega < +\infty, \tag{1.26}$$

în timp ce, pentru semnale discrete, f și ω iau valori în domeniile

$$-\frac{1}{2} < f \le \frac{1}{2} \ , \ -\pi < \omega \le \pi \tag{1.27}$$

Înlocuind (1.24) și (1.25) în (1.27), rezultă

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} < F \le \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \tag{1.28}$$

respectiv

$$-\frac{\pi}{T} = \pi F_s < \Omega \le \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.29}$$

Din cele prezentate anterior se observă că diferența esențială între semnalele definite în timp continuu și discret constă în domeniile de valori ale frecvențelor F și f sau Ω și ω.

Eșantionarea periodică a semnalelor analogice implică transformarea domeniului infinit pentru frecvență F (sau Ω) într-unul finit pentru mărimea f (sau ω).

Deoarece cea mai mare frecvență a unui semnal discret este $\omega = \pi$ sau $f = \frac{1}{2}$, rezultă că folosind o frecvență de eșantionare F_s, valorile maxime corespunzătoare pentru F și Ω sunt

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}\ , \ \Omega_{\max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.30}$$

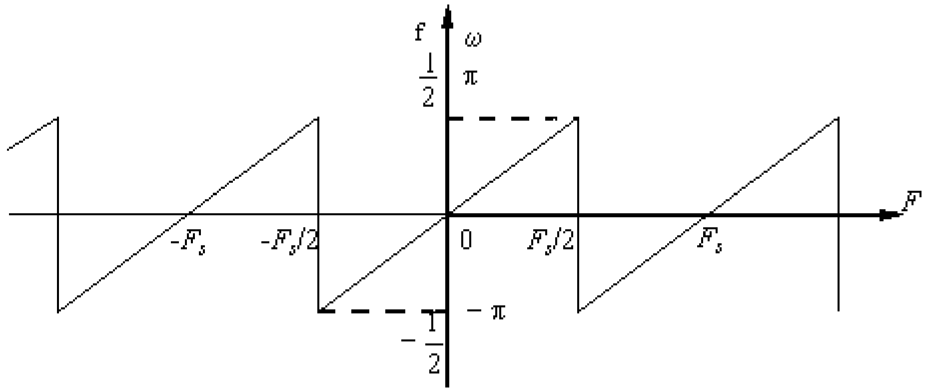

Figura 1.8. Relația dintre *f* și *F*

Eșantionarea poate introduce ambiguitate atunci când $F_s < 2|F|$, deoarece cea mai mare frecvență a unui semnal analogic ce poate fi unic determinată când semnalul este eșantionat cu $F_s = \frac{1}{T}$ este $F_{\max} = \frac{F_s}{2}$ sau $\Omega_{\max} = \pi F_s$. Relația dintre frecvențele din domeniul continuu și discret este ilustrată în figura 1.8.

Exemplul 1.1.

Pentru a evidenția ambiguitatea ce poate fi introdusă prin eșantionare, se consideră cazul a două semnale analogice armonice:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos 2\pi (10) t \\ x_2(t) &= \cos 2\pi (50) t \end{aligned} \tag{1.31}$$

care sunt eșantionate la $F_s = 40$ Hz.

Semnalele discrete corespunzătoare sunt

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos 2\pi \left(\frac{10}{40}\right) n = \cos \frac{\pi}{2} n \\ x_2[n] &= \cos 2\pi \left(\frac{50}{40}\right) n = \cos \frac{5\pi}{2} n \end{aligned} \tag{1.32}$$

Dar $\cos\frac{5\pi}{2}n = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\frac{\pi n}{2}$, deci $x_2[n] = x_1[n]$.

Se observă că semnalele discrete obținute prin eșantionarea lui $x_1(t)$ și $x_2(t)$ cu $F_s = 40$ Hz sunt identice și, dat fiind semnalul $\cos\frac{\pi}{2}n$, există ambiguitate în a spune că el provine din $x_1(t)$ sau $x_2(t)$.

Deoarece $x_2(t)$ produce exact aceleași eșantioane ca și $x_1(t)$ prin eșantionarea la $F_s = 40$ Hz, se spune că frecvența F_2 = 50 Hz este un *alias* al frecvenței F_1 = 10 Hz la viteza de eșantionare de 40 Hz. Termenul provine din limba engleză, având sensul de "a se da drept altcineva", încetățenit și în limba română. Într-adevăr, în domeniul fundamental discret $(-1/2, 1/2]$ intră frecvențe ce provin din eșantionarea unor semnale analogice ale căror frecvențe nu aparțin intervalului $(-F_s/2, F_s/2]$. Apariția acestor aliasuri determină fenomenul de *interferență* sau *suprapunere spectrală,* fenomen întâlnit și sub denumirea de *aliere.*

Frecvența F_2 nu este singurul alias al frecvenței F_1 la frecvența de eșantionare de 40 Hz. Toate semnalele de forma $\cos 2\pi(F_1 + 40k)t$, k = 1,2,3... , eșantionate la frecvența $F_s = 40$ Hz produc aceleași eșantioane și, în consecință, fecvențele $F_k = F_1 + 40k$ sunt aliasuri pentru F_1 = 10 Hz, la frecvența de eșantionare F_s=40Hz.

În general, eșantionarea semnalului analogic

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) \tag{1.33}$$

cu frecvența de eșantionare $F_s = \frac{1}{T}$, conduce la semnalul discret

$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \tag{1.34}$$

unde $f_0 = \frac{F_0}{F_s}$ este frecvența relativă a sinusoidei.

Dacă se impune $F_s \geq 2|F_0|$, rezultă $|f_0| \leq \frac{1}{2}$, caz în care relația dintre F_0 și f_0 este bijectivă și, deci, este posibilă refacerea semnalului analogic $x_a(t)$ din eșantioanele $x[n]$.

Dacă, însă, semnalele

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta), \tag{1.35}$$

unde

$$F_k = F_0 + kF_s\,,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.36}$$

sunt eșantionate cu frecvența F_s, semnalul eșantionat obținut este

$$x[n] \equiv x_a(nT) = A\cos\left(2\pi\frac{F_0 + kF_s}{F_s}\cdot n + \theta\right) = A\cos\left(2\pi n\frac{F_0}{F_s} + \theta + 2\pi kn\right) = \\ = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \tag{1.37}$$

adică un număr infinit de semnale armonice analogice sunt reprezentate după eșantionare de același semnal discret. Cu alte cuvinte, dat fiind $x[n]$ de relația (1.37), nu se poate, în general, preciza semnalul analogic din care a fost obținut. Deoarece frecvența $F_s/2$ a unui semnal armonic analogic este cea mai înaltă frecvență ce poate fi unic reprezentată la frecvența de eșantionare F_s, transformarea oricărei frecvențe (alias) mai mari ca $F_s/2$ ($\omega = \pi$) într-o frecvență echivalentă mai mică decât $F_s/2$ se poate face în felul următor: se ia punctul de la $F_s/2$ ca pivot și se "reflectă" sau se "pliază" frecvența alias în domeniul $-F_s/2<F\leq F_s/2$. Frecvența $F_s/2$ se numește frecvență de *reflexie (folding)*. La același rezultat se ajunge și prin scăderea unui multiplu întreg de F_s din frecvența F_k.

1.3.2. Teorema eșantionării

Pentru a se putea stabili perioada de eșantionare T sau, echivalent, frecvența de eșantionare F_s optimă pentru refacerea semnalului analogic din cel eșantionat, trebuie cunoscută frecvența cea mai înaltă din spectrul semnalului analogic. În multe cazuri acest lucru este posibil. De exemplu, frecvența componentelor unui semnal vocal este mai mică de 3000 Hz, un semnal TV conține componente importante de frecvență până la 5 MHz. Informația acestor semnale este conținută în amplitudinile, frecvențele și fazele componentelor sale. Uneori însă nu se cunosc astfel de detalii despre semnal (valoarea maxima a fecvenței), scopul prelucrării fiind chiar obținerea acestora.

Dacă se cunoaște valoarea maximă a frecvenței componentelor unei clase de semnal (vocal, TV etc.), se poate specifica frecvența de eșantionare pentru transformarea semnalului analogic în semnal discret, astfel încât să poată fi realizată fără ambiguitate și transformarea inversă.

Fie un semnal analogic reprezentat ca o sumă de sinusoide de diferite amplitudini, frecvențe și faze

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \tag{1.38}$$

unde N este numărul componentelor, A_i – amplitudinea componentelor, F_i – frecvențele componentelor, θ_i – fazele componentelor.

În cadrul unei clase de semnale (de exemplu cel vocal), frecvența maximă variază lent de la realizare la realizare (de exemplu de la vorbitor la vorbitor) și trebuie determinată valoarea maximă posibilă F_{max}.

Din paragraful precedent se știe că cea mai mare frecvență a semnalului analogic care poate fi reconstruită fără ambiguitate atunci când acesta este eșantionat cu frecvența F_s este $F_s/2$. Eșantionarea componentelor a căror frecvență este mai mare de $F_s/2$ sau mai mică decât $-F_s/2$ are ca rezultat obținerea de eșantioane identice cu cele corespunzătoare frecvențelor din intervalul $-\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2}$. Rezultă atunci că pentru evitarea ambiguităților ce rezultă din aliere, frecvența de eșantionare trebuie aleasă, astfel încât

$$F_s \geq 2F_{\max} \tag{1.39}$$

unde F_{max} este cea mai mare frecvență din spectrul semnalului analogic. Cu această frecvență de eșantionare, orice componentă de frecvență $|F_i| \leq F_{\max}$ a semnalului analogic se transformă într-un semnal discret cu frecvența

$$-\frac{1}{2} < f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2} \tag{1.40}$$

sau, echivalent

$$-\pi < \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi \tag{1.41}$$

În concluzie, alegerea frecvenței de eșantionare astfel încât să fie îndeplinită relația (1.39) asigură transformarea componentelor sinusoidale ale semnalului analogic în componente de frecvență ale semnalului discret, care aparțin intervalului fundamental de frecvență. În aceste condiții, semnalul analogic poate fi reconstruit din eșantioanele sale. În continuare se va enunța teorema eșantionării, demonstrația sa fiind dată în paragraful 6.1.2.

Teorema eșantionării

Dacă frecvența cea mai înaltă conținută într-un semnal analogic $x_a(t)$ este $F_{max} = B$ și semnalul este eșantionat cu o frecvență $F_s \geq 2F_{\max} = 2B$, atunci semnalul $x_a(t)$ poate fi refăcut din eșantioanele sale, folosind funcția de interpolare ideală

$$g(t) = \frac{\sin \pi F_s t}{\pi F_s t} \tag{1.42}$$

caz în care semnalul analogic $x_a(t)$ este dat de relația

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right), \tag{1.43}$$

unde $x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = x_a(nT) \equiv x[n]$ sunt eșantioanele lui $x_a(t)$.

Dacă eșantionarea se realizează la frecvența minimă $F_s = 2B$, relația (1.43) devine

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin 2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)}{2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)} \tag{1.44}$$

Frecvența de eșantionare $F_N = 2B = 2F_{max}$ poartă numele de *frecvență Nyquist*. Relația (1.43) se numește *formula de interpolare ideală* pentru reconstrucția semnalului analogic $x_a(t)$ din eșantioanele sale. Se observă că în fiecare punct de eșantionare la formarea semnalului contribuie o singură funcție de interpolare. În intervalul dintre două eșantionări, la formarea semnalului contribuie toate funcțiile de interpolare, așa cum este ilustrat în figura 1.9. Conform relațiilor (1.43) și (1.44), refacerea semnalului analogic este complicată, deoarece presupune o sumă ponderată infinită a funcției de interpolare $g(t)$ și a versiunilor sale întârziate. Datorită acestei complexități, relațiile (1.43) și (1.44) prezintă în principal interes teoretic, în practică folosindu-se metode de interpolare mai simple. Subiectul va fi reluat și tratat pe larg în capitolul 6.

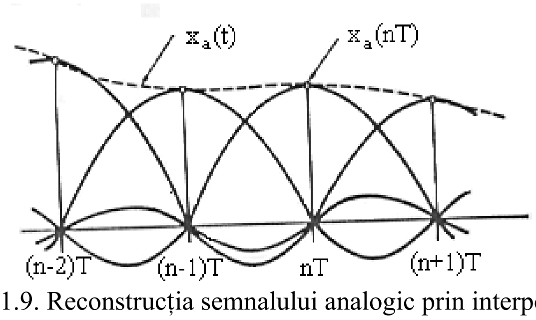

Figura 1.9. Reconstrucția semnalului analogic prin interpolare ideală

Exemplul 1.2.

Se consideră semnalul analogic

$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$. Să se determine frecvența Nyquist pentru semnal.

Frecvențele prezente în semnalul analogic $x_a(t)$ sunt:
$F_1 = 25$ Hz, $F_2 = 150$ Hz, $F_3 = 50$ Hz.
$F_{max} = 150$ Hz și, conform relației (1.39), $F_s \geq 2F_{max} = 300$ Hz. Frecvența Nyquist este $F_N = 2F_{max} = 300$ Hz.

Discuție. Se observă că prin eșantionarea componentei de semnal $10\sin 300\pi t$ cu $F_N = 300$ Hz rezultă semnalul discret $10\sin \pi n$, care este egal cu zero. Aceasta înseamnă că semnalul sinusoidal a fost eșantionat în punctele în care valoarea sa era egală cu zero și această componentă va dispărea din semnalul discret. Această situație se poate evita în două moduri:
a) se introduce un offset de θ° în sinusoida respectivă, caz în care rezultă semnalul $10\sin(300\pi t + \theta)$ care, eșantionat la $F_N = 300$ Hz, produce eșantioanele

$$x[n] = 10\sin(\pi n + \theta) = 10\sin \pi n \cdot \cos\theta + \cos\pi n \cdot \sin\theta = (-1)^n \cdot 10\sin\theta$$

Pentru $\theta \neq 0$ și $\theta \neq \pi$ eșantioanele semnalului vor fi diferite de zero.
b) se eșantionează semnalul la o frecvență superioară frecvenței Nyquist, metodă care este agreată și folosită frecvent în astfel de cazuri.

Exemplul 1.3.
Fie semnalul analogic
$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$

a) Să se determine frecvența Nyquist pentru semnal.
b) Se presupune semnalul eșantionat la $F_s = 5000$ Hz. Ce semnal discret se obține după eșantionare ?
c) Care este semnalul analogic $y_a(t)$ ce poate fi refăcut din eșantioanele de la punctul b), prin interpolare ideală ?

a) Frecvențele prezente în semnalul analogic sunt: $F_1 = 1$ KHz, $F_2 = 3$ KHz, $F_3 = 6$ KHz.

$$F_{max} = 6 \text{ KHz} \Rightarrow F_N = 12 \text{ KHz}$$

b) Dacă semnalul analogic se eșantionează cu $F_s = 5$ KHz, după eșantionare se obține semnalul discret

$$x[n] = x_a(nT) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3\cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5\sin 2\pi\left(\frac{3}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(\frac{6}{5}\right)n =$$

$$= 3\cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5\sin 2\pi\left(1-\frac{2}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(1+\frac{1}{5}\right)n = 3\cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n +$$

$$+ 5\sin 2\pi\left(-\frac{2}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n = 13\cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n - 5\sin 2\pi\left(\frac{2}{5}\right)n.$$

c) Deoarece numai componentele de 1 KHz și 2 KHz sunt prezente în semnalul eșantionat și ținând seama că t=nT sau n=t/T=tF_s, semnalul analogic ce poate fi refăcut este: $y_a(t) = 13\cos 2000\pi t - 5\sin 4000\pi t$, care, evident, diferă de cel original. Distorsionarea semnalului analogic original a fost determinată de apariția erorii alias datorată frecvenței de eșantionare scăzute folosite.

1.3.3. Cuantizarea semnalelor de amplitudine continuă

În paragraful 1.3, s-a definit *cuantizarea* ca fiind procesul de conversie a unui semnal discret, care ia valori într-un domeniu continuu, într-un semnal discret ce ia valori într-o mulțime finită de valori posibile. Eroarea introdusă prin reprezentarea valorilor continue ale unui semnal prin valori ale unei mulțimi finite se numește *eroare de cuantizare*.

Operația de cuantizare a eșantionului $x[n]$ se notează cu $Q[x[n]]$, iar valoarea eșantionului cuantizat obținut la ieșirea cuantizorului se notează cu $x_q[n]$, adică

$$x_q[n] = Q[x[n]] \tag{1.45}$$

Eroarea de cuantizare $e_q[n]$ se definește ca diferența dintre valoarea cuantizată și cea necuantizată a eșantionului

$$e_q[n] = x_q[n] - x[n] \tag{1.46}$$

Pentru ilustrarea operației de cuantizare se consideră următorul **exemplu**:

Fie semnalul definit în timp discret $x[n] = \begin{cases} 0{,}9^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, care a fost obținut prin eșantionarea semnalului analogic $x_a(t) = 0{,}9^t$, t > 0 cu o frecvență F_s = 1 Hz. În tabelul 1 sunt prezentate valorile primelor 10 eșantioane ale lui $x[n]$ cu n zecimale. Este evident că aceste valori nu vor putea fi prelucrate de un calculator, deoarece numai un număr finit de zecimale pot fi stocate și prelucrate. Dacă se lucrează numai cu o singură zecimală, eliminarea celorlalte se poate face fie prin trunchiere, fie prin rotunjire.

Tabelul 1

n	$x[n]$	$x_q[n]$ trunchiere	$x_q[n]$ rotunjire	$e_q[n]=x_q[n]-x[n]$ rotunjire
0	1,0	1,0	1,0	0,00
1	0,9	0,9	0,9	0,00
2	0,81	0,8	0,8	-0,01
3	0,729	0,7	0,7	-0,029
4	0,6561	0,6	0,7	0,0439
5	0,59049	0,5	0,6	0,00951
6	0,531441	0,5	0,5	-0,031441
7	0,4782969	0,4	0,5	0,0217031
8	0,43046721	0,4	0,4	-0,03046721
9	0,387420489	0,3	0,4	0,012579511

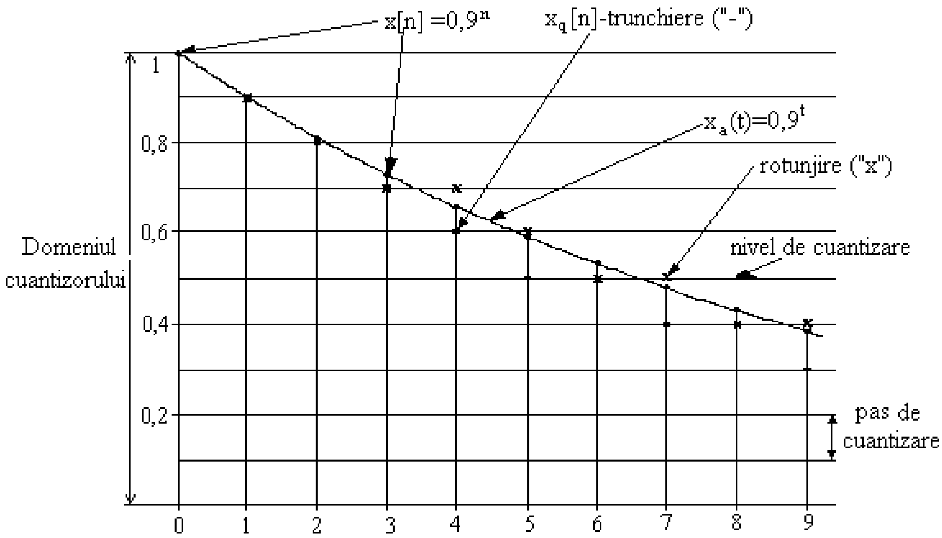

Figura 1.10. Ilustrarea operației de cuantizare

Valorile permise pe care le poate lua semnalul cuantizat se numesc *nivele de cuantizare*, iar distanța dintre două nivele de cuantizare succesive se numește *pas de cuantizare* sau *rezoluție*.

Cuantizorul cu *rotunjire* atribuie fiecărui eșantion al lui $x[n]$ valoarea celui mai apropiat nivel de cuantizare. Cuantizorul cu *trunchiere* atribuie fiecărui eșantion al lui $x[n]$ nivelul de cuantizare inferior sau egal eșantionului. Eroarea de cuantizare în cazul rotunjirii este

$$-\frac{\Delta}{2} \le e_q[n] \le \frac{\Delta}{2} \ , \tag{1.47}$$

iar în cazul trunchierii $$0 \le e_q[n] < \Delta \, , \tag{1.48}$$

unde Δ este pasul de cuantizare.

Dacă se notează cu x_{min} și x_{max} valoarea minimă și respectiv, maximă a lui $x[n]$ și cu L numărul nivelelor de cuantizare, atunci

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L-1} \tag{1.49}$$

Valoarea $x_{\max} - x_{\min}$ reprezintă *domeniul dinamic al cuantizorului*.

Pentru exemplul considerat anterior, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 0$, $L = 11$, ceea ce conduce la $\Delta = 0{,}1$. Evident, cu cât numărul nivelelor de cuantizare crește, cu atât pasul de cuantizare scade și, implicit, și eroarea de cuantizare.

Cuantizarea semnalelor analogice are ca rezultat o pierdere de informație, datorită atribuirii aceluiași nivel de cuantizare tuturor eșantioanelor ce se găsesc la distanță mai mică sau egală cu $\Delta/2$ de nivelul de cuantizare (în cazul rotunjirii).

1.3.4. Codarea eșantioanelor cuantizate

Prin procesul de codare, în cadrul convertorului A/N se atribuie o secvență binară unică fiecărui nivel de cuantizare.

Dacă există L nivele de cuantizare, vor fi necesare L secvențe binare distincte. Cu o lungime de b biți pe secvență, numită și cuvânt, se pot forma 2^b secvențe binare distincte. Este necesar ca $2^b \ge L$ sau, echivalent, $b \ge \log_2 L$, adică numărul de biți necesar codorului este cel mai mic întreg mai mare sau egal cu $\log_2 L$. Obișnuit, convertoarele A/D sunt pe 16 biți sau mai puțin. Evident, cu creșterea numărului de biți convertorul este mai scump, dar mai precis.

Calculatoarele lucrează cu numere reprezentate prin secvențe de 0 și 1. Lungimea acestor secvențe (lungimea cuvintelor) este fixă și de obicei este 8, 12, 16 sau 32. În procesare, lungimea finită a cuvintelor determină complicații în analiza sistemelor de prelucrare numerică a semnalelor. Pentru evitarea acestora, în general, se neglijează faptul că semnalele numerice provin în urma cuantizării și, unde este posibil sunt tratate ca semnale eșantionate [24].

1.3.5. Conversia numeric-analogică

Pentru a converti mărimea numerică obținută în urma prelucrării numerice în una analogică, se folosește un convertor numeric-analogic, a cărui sarcină este de a realiza o interpolare între eșantioane.

Teorema eșantionării specifică forma optimă a funcției de interpolare pentru un semnal de bandă limitată, dar, așa cum s-a arătat anterior, aceasta este prea complicată pentru a fi implementată practic.

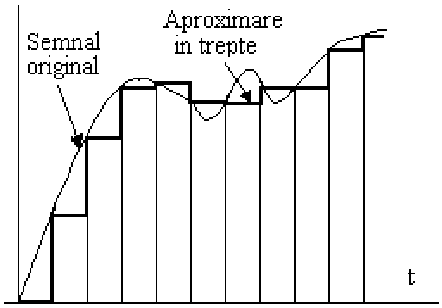

Figura 1.11. Conversia N/A (cu memorie) de ordinul zero

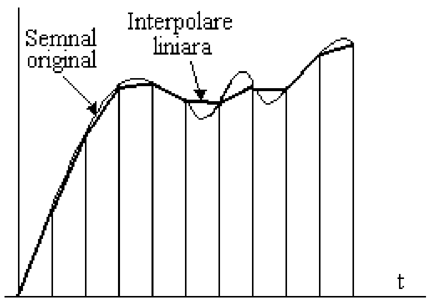

Figura 1.12. Conversia N/A prin interpolare liniară

Cel mai simplu convertor D/A este cel de ordinul zero [24], ca re păstrează valoarea constantă a eșantionului până la apariția următorului eșantion. Această situație este ilustrată în figura 1.11.

O îmbunătățire a semnalului analogic refăcut în urma conversiei N/A se poate obține cu un convertor cu interpolare liniară [24], care furnizează un semnal obținut prin conectarea eșantioanelor succesive prin linii, așa cum este arătat în figura 1.12. Problema refacerii semnalului din eșantioanele sale va fi reluată în capitolul 6.

1.4. Probleme propuse

1.1. Să se stabilească dacă următoarele semnale a) prețul de închidere la diferite produse la bursă; b)un film color; c) poziția volanului unei mașini în mișcare, dacă sistemul de referință este legat de mașină; d) poziția volanului unei mașini în mișcare, dacă sistemul de referință este pământul; e) greutatea și înălțimea unui copil măsurate în fiecare lună; sunt 1) uni sau multidimensionale; 2) mono sau multicanal; 3) continue sau discrete în timp; 4) continue sau discrete în amplitudine. Să se argumenteze pe scurt răspunsul.

1.2. Să se determine care din următoarele semnale sunt periodice și pentru cele care sunt să se determine perioada fundamentală.

a) $x[n] = \cos 0.01\pi\, n$;

b) $x[n] = \cos\left(\pi \dfrac{30n}{105}\right)$;

c) $x[n] = \cos 3\pi\, n$;

d) $x[n] = \sin 3n$;

e) $x[n] = \sin\left(\pi \dfrac{62n}{10}\right)$;

f) $x_a(t) = 3\cos\left(5t + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

g) $x[n] = 3\cos\left(5n + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

h) $x[n] = 2\exp\left[j\left(\dfrac{n}{6} - \pi\right)\right]$;

i) $x[n] = \cos\left(\dfrac{n}{18}\right)\cos\left(\dfrac{\pi\, n}{8}\right)$;

j) $x[n] = \cos\left(\dfrac{\pi\, n}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi\, n}{8}\right) + 3\cos\left(\dfrac{\pi\, n}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.3. a) Să se arate că perioada fundamentală N_p a semnalului

$$s_k[n] = e^{j2\pi\, kn/N};\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

este $N_p = N/\text{c.m.m.d.c}(k, N)$, unde c.m.m.d.c. este cel mai mare divizor comun al lui k și N.

b) Care este N_p pentru $N = 7$?

c) Care este N_p pentru $N = 16$?

1.4. Se consideră următorul semnal analogic sinusoidal

$$x_a(t) = 3\sin(100\pi\ t)$$

a) Să se reprezinte $x_a(t)$ pentru $0 \le t \le 30$ ms;
b) Semnalul $x_a(t)$ este eșantionat cu F_s = 300 eșantioane/sec. Să se determine frecvența semnalului discret $x[n] = x_a(nT)$, $T = \frac{1}{F_s}$ și să se arate că acesta este periodic.
c) Să se calculeze valorile lui $x[n]$ dintr-o perioadă și să se reprezinte $x[n]$ pe același grafic cu $x_a(t)$. Care este perioada semnalului discret ?
d) Se poate găsi o frecvență de eșantionare astfel încât semnalul $x[n]$ să atingă valoarea maximă de 3 ? Care este frecvența minimă pentru acest lucru ?

1.5. Un semnal analogic $x_a(t) = \sin(480\pi\ t) + 3\sin(720\pi\ t)$ este eșantionat cu o frecvență F_s = 600 eșantioane/sec.
a) Să se determine frecvența Nyquist pentru $x_a(t)$;
b) Să se determine frecvența de folding;
c) Care sunt frecvențele conținute de semnalul discret $x[n]$;
d) Dacă $x[n]$ este trecut printr-un convertor D/A ideal, ce semnal $y_a(t)$ se reface ?

1.6. Pe un canal de comunicații se transmit cuvinte binare care reprezintă eșantioane ale semnalului de intrare
$x_a(t) = 3\cos 600\pi t + 2\cos 1800\pi t$.
Pe canal se pot transmite 10000 biți/secundă și fiecărui eșantion de intrare îi poate fi atribuit unul din 1024 nivele diferite de tensiune.
a) Care este frecvența de eșantionare și frecvența de folding ?
b) Care este frecvența Nyquist pentru semnalul $x_a(t)$?
c) Care sunt frecvențele semnalului discret ?
d) Care este rezoluția Δ a convertorului ?

1.7. Semnalul discret $x[n] = 6.35\cos\frac{\pi}{10}n$ este cuantizat cu o rezoluție
a) $\Delta = 0.1$ sau
b) $\Delta = 0.02$. Câți biți sunt necesari convertorului A/D în fiecare caz ?