CAPITOLUL 4

ESTIMAREA PARAMETRILOR

Teoria estimării stă la baza a numeroase sisteme de procesare de semnal proiectate în scopul extragerii de informații. Aceste sisteme au aplicații în domenii cum ar fi: radar, sonar, vorbire, analiza imaginilor, biomedicină, comunicații, seismologie, control etc., în toate cazurile apărând necesitatea estimării valorilor unui grup de parametri. În problematica generală a estimării parametrilor se foloseşte teoria deciziilor statistice. Parametrii pot fi amplitudinea, frecvența sau faza unui semnal, deviația de frecvență în cazul țintelor mobile datorită efectului Doppler etc.

4.1. Schema bloc a unui sistem de transmisiuni care realizează estimarea unui parametru

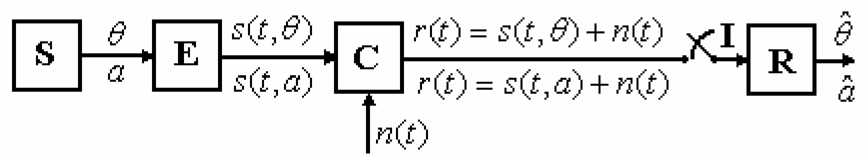

Fig. 4.1. Schema bloc a unui sistem de transmisiune pentru estimarea unui parametru aleator θ sau determinist a

Sursa de informație S este caracterizată fie printr-o variabilă aleatoare continuă θ, fie printr-un parametru determinist a, necunoscut receptorului R.

Variabila aleatoare continuă θ sau parametrul determinist a modulează un semnal purtător, respectiv un parametru al acestuia (amplitudine, frecvență, fază etc.), astfel încât la ieşirea emițătorului E se generează semnalul $s(t,\theta)$ sau $s(t,a)$.

Pe canalul de transmisiuni C apar perturbațiile P, materializate de zgomotul aditiv $n(t)$, care degradează informația transmisă de sursa S.

Semnalul recepționat, de forma:

$$r(t) = s(t,\theta) + n(t) \tag{4.1}$$

sau:

$$r(t) = s(t,a) + n(t) \tag{4.2}$$

este observat în intervalul de timp $[0,T]$ fie la momentele discrete de timp $t_1, t_2, ..., t_N$, dacă întrerupătorul I se închide la aceste momente de timp, fie în mod continuu, dacă întrerupătorul I stă închis pe tot timpul de observare.

Pe baza acestor observații, receptorul trebuie astfel proiectat, încât să furnizeze la ieşire estimatul $\hat{\theta}$ sau â. Eroarea de estimare se defineşte astfel:

$$\varepsilon_\theta = \hat{\theta} - \theta \tag{4.3}$$

respectiv:

$$\varepsilon_a = \hat{a} - a \tag{4.4}$$

Pentru a ține seama de importanța pe care o are această eroare pentru destinatar, se definesc diverse funcții de cost, care sunt funcții de eroarea de estimare, notate în continuare cu $C(\varepsilon)$.

Se va considera, pentru început, cazul când informația sursei S este caracterizată de variabila aleatoare continuă θ, urmând ca apoi să se analizeze cazul unui parametru determinist, a.

Cele mai frecvente funcții de cost folosite în aplicații sunt:

- funcția de cost pătratul erorii;
- funcția de cost uniformă.

În primul caz, funcția de cost este definită prin relația:

$$C(\varepsilon) = \left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 \tag{4.5}$$

având reprezentarea din figura 4.2.

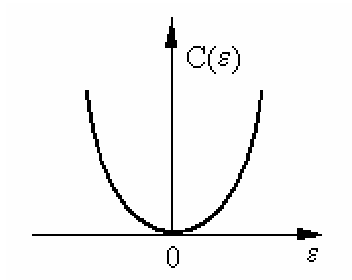

Fig. 4.2. Reprezentarea grafică a funcției de cost pătratul erorii

Atât din relația (4.5), cât şi din figura 4.2 rezultă că în acest caz funcția de cost ține seama de faptul că importanța erorii pentru destinatar creşte odată cu creşterea erorii.

În al doilea caz, funcția de cost este definită prin relația:

$$C(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| \le \dfrac{E}{2} \\ 1, & |\varepsilon| > \dfrac{E}{2} \end{cases} \tag{4.6}$$

având reprezentarea din figura 4.3.

Atât din relația (4.6), cât şi din figura 4.3 rezultă că, în cazul funcției de cost uniforme, erorile mai mici decât $|E/2|$ nu au nici o importanță, în timp ce erorile mai mari decât $|E/2|$ au aceeaşi importanță pentru destinatar, indiferent de mărimea lor.

Pragul E este impus de aplicația în care se realizează estimarea parametrului, fiind în general de valori suficient de mici.

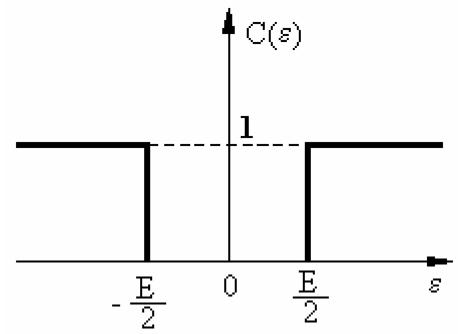

Fig. 4.3. Reprezentarea grafică a funcției de cost uniforme

La momente de timp discrete, $t_1, t_2, ..., t_N$, din semnalul recepționat se selectează eşantioanele $r(t_j),\ j = \overline{1, N}$. Pentru simplificarea scrierii se face notația:

$$r(t_j) \stackrel{not}{=} r_j\ ,\ j = \overline{1, N} \tag{4.7}$$

Cele N eşantioane se pot considera componentele vectorului:

$$\vec{r} = (r_1\ r_2\ ...\ r_N) \tag{4.8}$$

iar spațiul semnalului recepționat, un spațiu vectorial N dimensional.

Notând volumul diferențial din acest spațiu cu:

$$d_{r_1} \cdot d_{r_2} \cdot ... \cdot d_{r_N} \stackrel{not.}{=} dV \tag{4.9}$$

rezultă că produsul $\mathrm{w}(\vec{\mathrm{r}} \cap \theta)\,\mathrm{dVd}\theta$ reprezintă probabilitatea ca punctul reprezentativ al semnalului recepționat (vârful vectorului $\vec{\mathrm{r}}$) să aparțină volumului diferențial dV şi parametrul θ intervalului elementar $d\theta$.

Deoarece pentru fiecare din punctele reprezentative ale semnalului recepționat se alocă un cost, rezultă că $\mathrm{w}(\vec{\mathrm{r}} \cap \theta)\,\mathrm{dVd}\theta$ reprezintă probabilitățile costurilor $C(\varepsilon)$.

Dacă se notează cu Δ domeniul ocupat de punctele reprezentative ale semnalului recepționat şi se consideră cazul cel mai defavorabil când $-\infty < \theta < \infty$, atunci valoarea medie a costurilor, numită *risc* şi notat cu R, se poate determina cu relația:

$$R = \int_{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon) w(\vec{r} \cap \theta) dV d\theta \qquad (4.10)$$

4.2. Determinarea estimatului în cazul funcțiilor de cost pătratul erorii şi uniforme

Strategia în luarea deciziei constă în minimizarea riscului în cazul celor două funcții de cost definite în paragraful 4.1, determinarea estimaților care minimizează riscul şi apoi implementarea receptoarelor care pot furniza la ieşire astfel de estimați.

Deoarece totdeauna se poate scrie:

$$w(\vec{r} \cap \theta) = w(\vec{r}) w(\theta \mid \vec{r}) \qquad (4.11)$$

relația (4.10) poate fi scrisă echivalent, sub forma:

$$R = \int_{\Delta} w(\vec{r}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon) w(\theta \mid \vec{r}) d\theta \right] dV \qquad (4.12)$$

În cazul utilizării funcției de cost pătratul erorii, substituind relația (4.5) în (4.12), rezultă:

$$R = \int_{\Delta} w(\vec{r}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 w(\theta \mid \vec{r}) d\theta \right] dV \qquad (4.13)$$

Deoarece densitățile de repartiție $w(\vec{r})$ şi $w(\theta \mid \vec{r})$ sunt totdeauna nenegative, valoarea minimă a riscului R, dat de relația (4.13), se obține odată cu valoarea minimă a integralei:

$$I\left(\hat{\theta}, \vec{r}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 w(\theta \mid \vec{r}) d\theta \qquad (4.14)$$

Condiția necesară de extrem a integralei (4.14) se determină cu relația:

$$\frac{\partial I(\hat{\theta},\vec{r})}{\partial\hat{\theta}}=0 \tag{4.15}$$

Înlocuind (4.14) în relația (4.15), rezultă:

$$\hat{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\theta\, w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta \tag{4.16}$$

Deoarece totdeauna se poate scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta=1 \tag{4.17}$$

rezultă că, în cazul utilizării funcției de cost pătratul erorii, estimatul se determină cu relația:

$$\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{\infty}\theta\, w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta \tag{4.18}$$

Extremul integralei (4.14) este într-adevăr un minim, deoarece:

$$\frac{\partial^2 I(\hat{\theta},\vec{r})}{\partial\theta^2}=2\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta=2>0 \tag{4.19}$$

Datorită formei funcției de cost (4.5) şi faptului că estimatul se obține prin minimizarea integralei din relația (4.14), în acest caz, se spune că acesta a fost obținut pe baza erorii pătratice medii minime.

Dacă funcția de cost este uniformă, estimatul se obține înlocuind relația (4.6) în (4.12):

$$R=\int_{\Delta} w(\vec{r})\left[\int_{-\infty}^{\hat{\theta}-\frac{E}{2}} w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta+\int_{\hat{\theta}+\frac{E}{2}}^{\infty} w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta\right]dV \tag{4.20}$$

sau, ținând cont de (4.17), rezultă:

$$R=\int_{\Delta} w(\vec{r})\left[1-\int_{\hat{\theta}-\frac{E}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{E}{2}} w(\theta\,|\,\vec{r})d\theta\right]dV \tag{4.21}$$

Riscul dat de relația (4.21) devine minim odată cu maximul integralei:

$$\int_{\hat{\theta}-\frac{E}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{E}{2}} w(\theta \mid \vec{r}) d\theta \tag{4.22}$$

În cele ce urmează, se va considera că pragul E este suficient de mic, ceea ce corespunde situațiilor reale, motiv pentru care se poate considera, cu bună aproximație, că densitatea de repartiție condiționată $w(\theta \mid \vec{r})$ are o variație neglijabilă pe domeniul de integrare, astfel încât se poate scrie:

$$\int_{\hat{\theta}-\frac{E}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{E}{2}} w(\theta \mid \vec{r}) d\theta \cong w(\theta \mid \vec{r}) \int_{\hat{\theta}-\frac{E}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{E}{2}} d\theta = E \cdot w(\theta \mid \vec{r}) \overset{not}{=} I(\theta, \vec{r}) \tag{4.23}$$

Din (4.23) rezultă că maximul lui $I\,(\theta, \vec{r}\,)$ este dat de maximul densității de repartiție $w(\theta \mid \vec{r})$, numită *densitate de repartiție aposteriori*.

Valoarea lui θ care determină ca $w(\theta \mid \vec{r})$ să aibă valoarea maximă, se notează $\hat{\theta}_{\text{map}}$ şi se numeşte *estimatul maximum aposteriori.*

Condiția necesară de extrem este dată de relația:

$$\left. \frac{\partial w(\theta \mid \vec{r})}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{4.24}$$

Dacă din relația (4.24) rezultă un estimat $\hat{\theta}_{\text{map}}$ care determină un maxim absolut al densității condiționate $w(\theta \mid \vec{r})$, atunci acesta este estimatul în cazul utilizării funcției de cost uniforme.

Deoarece, în general, $w(\theta \mid \vec{r})$ are o formă exponențială, este mai convenabil să se determine maximul funcției $ln\left[w(\theta \mid \vec{r})\right]$, având în vedere proprietatea de monotonie a funcției logaritmice şi faptul că $w(\theta \,|\, \vec{r}) \geq 0$.

Cu alte cuvinte, estimatul maximum aposteriori se poate calcula echivalent şi din relaţia:

$$\left.\frac{\partial \ln w(\theta \,|\, \vec{r})}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{4.25}$$

În fine, deoarece totdeauna se poate scrie relaţia:

$$w(\vec{r} \cap \theta) = w(\vec{r})w(\theta \,|\, \vec{r}) = w(\theta)w(\vec{r} \,|\, \theta) \tag{4.26}$$

unde:

$$w(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{r} \cap \theta)d\theta \tag{4.27}$$

rezultă:

$$w(\theta \,|\, \vec{r}) = \frac{w(\theta)w(\vec{r} \,|\, \theta)}{w(\vec{r})} \tag{4.28}$$

Înlocuind (4.28) în relaţia (4.25), rezultă o nouă relaţie de calcul pentru estimatul maximum aposteriori, adică:

$$\left.\frac{\partial \ln w(\vec{r} \,|\, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \left.\frac{\partial \ln w(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{4.29}$$

Din relaţia (4.27) rezultă că $w(\vec{r})$ nu depinde de θ.

Dacă parametrul care trebuie estimat, este o mărime deterministă, a, necunoscută la recepţie, metodele precedente nu mai pot fi aplicate.

Într-adevăr, dacă parametrul a este determinist, el poate fi considerat o variabilă aleatoare, α, cu o densitate de repartiţie dată de distribuţia Dirac, adică:

$$w(\alpha \,|\, \vec{r}) = \delta(\alpha - a) \tag{4.30}$$

Înlocuind relaţia (4.30) în (4.18), se obţine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot \delta(\alpha - a)d\alpha = a \tag{4.31}$$

rezultat evident corect, dar inutil.

Pentru a determina un estimat şi în cazul unui parametru determinist, se defineşte o funcţie de plauzibilitate de forma:

$$L(a) = w(\vec{r} \mid a) \tag{4.32}$$

sau logaritmul ei:

$$ln\, L(a) = ln\, w(\vec{r} \mid a) \tag{4.33}$$

Prin definiţie, se numeşte *estimat maximum plauzibil* sau de *maximă plauzibilitate* şi va fi notat cu $\hat{a}_{mp}$, valoarea parametrului a pentru care funcţia de plauzibilitate $L(a)$, respectiv $\ln[L(a)]$, îşi atinge valoarea maximă.

Dacă $\hat{a}_{mp}$ aparţine domeniului de existenţă a parametrului a, atunci estimatul parametrului determinist, adică estimatul maximum plauzibil se determină cu relaţia:

$$\left.\frac{\partial \ln w(\vec{r} \mid a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{mp}} = 0 \tag{4.34}$$

Comparând relaţia (4.29) cu relaţia (4.34), se constată că estimatul maximum plauzibil $\hat{a}_{mp}$ poate fi considerat un caz particular al estimatului maximum aposteriori $\hat{\theta}_{map}$, când variabila aleatoare θ are o lege de repartiţie uniformă, adică $w(\theta) = const$.

4.3. Criterii de evaluare a estimatului

Criteriile de evaluare a "calităţii" estimatului, pentru orice tip de estimare sunt, în general, valoarea medie şi dispersia erorii de estimare.

Dacă se notează cu Δ domeniul semnalului recepţionat, şi se consideră cazul cel mai defavorabil, când domeniul posibil de valori al parametrului ce urmează a fi estimat ocupă toată axa reală $(-\infty,\infty)$, valoarea medie a estimatului unui parametru, reprezentat de o variabilă aleatoare continuă, se determină cu relația:

$$\overline{\overline{\hat{\theta}}} = \int_{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}\, w(\vec{r} \mid \theta) d\theta dV \tag{4.35}$$

unde $\overline{\overline{[\bullet\ ]}}$ reprezintă o dublă mediere, atât în raport cu $\vec{r}$, cât şi în raport cu θ.

În cazul estimării unui parametru determinist, necunoscut la recepție, valoarea medie a estimatului se determină cu relația:

$$\overline{\hat{a}} = \int_{\Delta} \hat{a} w(\vec{r} \mid a) dV \tag{4.36}$$

adică medierea numai în raport cu $\vec{r}$.

Dacă:

$$\overline{\overline{\hat{\theta}}} = \theta \tag{4.37}$$

atunci media erorii de estimare devine:

$$\overline{\overline{\varepsilon_{\theta}}} = \overline{\overline{\hat{\theta} - \theta}} = \overline{\overline{\hat{\theta}}} - \theta = 0 \tag{4.38}$$

În mod analog, dacă:

$$\overline{\hat{a}} = a \tag{4.39}$$

atunci media erorii de estimare este:

$$\overline{\varepsilon_a} = \overline{\hat{a} - a} = \overline{\hat{a}} - a = 0 \tag{4.40}$$

Dacă au loc relațiile (4.37), respectiv (4.39), estimatul se numeşte *nedeplasat*.

Dacă:

$$\overline{\overline{\hat{\theta}}} = \theta + c \tag{4.41}$$

sau:

$$\overline{\hat{a}} = a + c \tag{4.42}$$

unde c este o constantă care nu depinde de valoarea parametrului ce urmează a fi estimat, se spune că estimatul are o *deplasare cunoscută.*

Dacă:

$$\overline{\overline{\hat{\theta}}} = \theta + b(\theta) \tag{4.43}$$

sau:

$$\overline{\hat{a}} = a + b(a) \tag{4.44}$$

se spune că estimatul are o *deplasare necunoscută* care depinde de valoarea parametrului ce urmează a fi estimat.

În cazul cel mai defavorabil al estimării cu deplasare necunoscută, dispersia erorii de estimare se calculează cu relațiile:

$$\sigma_{\varepsilon_\theta}^2 = \overline{\overline{\varepsilon_\theta^2}} - \left[\overline{\overline{\varepsilon_\theta}} \right]^2 \tag{4.45}$$

respectiv:

$$\sigma_{\varepsilon_a}^2 = \overline{\varepsilon_a^2} - \left[\overline{\varepsilon_a} \right]^2 \tag{4.46}$$

Dar:

$$\overline{\overline{\varepsilon_\theta}} = \overline{\overline{\hat{\theta} - \theta}} = \overline{\overline{\hat{\theta}}} - \theta = \theta + b(\theta) - \theta = b(\theta) \tag{4.47}$$

Analog:

$$\overline{\varepsilon_a} = \overline{\hat{a} - a} = \overline{\hat{a}} - a = a + b(a) - a = b(a) \tag{4.48}$$

Înlocuind (4.47) şi (4.48) în (4.45), respectiv (4.46), rezultă:

$$\sigma_{\varepsilon_\theta}^2 = \overline{\overline{(\hat{\theta} - \theta)^2}} - b^2(\theta) \tag{4.49}$$

respectiv:

$$\sigma_{\varepsilon_a}^2 = \overline{(\hat{a} - a)^2} - b^2(a) \tag{4.50}$$

Deşi estimatul cel mai bun este cel nedeplasat şi cu o dispersie a erorii de estimare minimă, în cazurile practice se preferă un estimat cu deplasare şi dispersie a erorii de estimare rezonabil de mici, în locul unui estimat cu o deplasare nulă şi cu o dispersie a erorii de estimare mare.

4.4. Determinarea estimatului unui parametru invariant în timp în cazul observării la momente discrete de timp

Se va presupune, pentru început, că sursa de informație este caracterizată de parametrul θ, care este o variabilă aleatoare continuă, invariantă în timp.

Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni se notează cu $n(t)$, iar semnalul recepționat cu $r(t)$, rezultă:

$$r(t) = \theta + n(t) \tag{4.51}$$

Se va presupune, de asemenea, că zgomotul de pe canalul de transmisiuni poate fi considerat alb, repartizat după o lege normală, cu valoare medie nulă şi dispersie σ_n^2.

Eşantionând semnalul recepționat la momentele discrete de timp, $t_1, t_2, ..., t_N$, în intervalul de observare, rezultă:

$$r(t_i) = \theta + n(t_i) \ , \quad i = \overline{1, N} \tag{4.52}$$

Notând:

$$\left.\begin{aligned} r(t_i) &\overset{not.}{=} r_i \\ n(t_i) &\overset{not.}{=} n_i \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

rezultă:

$$r_i = \theta + n_i \ , \quad i = \overline{1, N} \tag{4.54}$$

Legea de repartiție a unui eşantion din zgomot este:

$$w_1(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}} \ , \quad i = \overline{1, N} \tag{4.55}$$

Zgomotul fiind presupus alb, eşantioanele sale sunt statistic independente şi deci:

$$w(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{N} w_1(n_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N} n_i^2} \tag{4.56}$$

Datorită relației (4.54) şi faptului că zgomotul este statistic independent de parametrul θ, rezultă că şi mărimile $(r_i \mid \theta)$ vor fi repartizate tot normal. Pentru aflarea expresiei legii de repartiție a mărimilor $(r_i \mid \theta)$, vor trebui determinate valorile medii şi dispersiile acestora, adică:

$$m_1\{(r_i \mid \theta)\} \overset{not}{=} (\overline{r_i} \mid \theta) = m_1\{\theta + n_i\} = \theta + \overline{n_i} = \theta \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} D\{(r_i \mid \theta)\} &= m_1\{[(r_i \mid \theta) - (\overline{r_i} \mid \theta)]^2\} = \\ &= m_1\{(\theta + n_i - \theta)^2\} = \overline{n_i^2} = \sigma_n^2 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Cu relațiile (4.57) şi (4.58), rezultă că legea de repartiție a mărimilor $(r_i \mid \theta)$ este de forma:

$$w_1(r_i \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r_i-\theta)^2}{2\sigma_n^2}} \tag{4.59}$$

Deoarece zgomotul s-a presupus alb şi independent de parametrul θ, rezultă:

$$\begin{aligned} w(\vec{r} \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{N} w_1(r_i \mid \theta) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i-\theta)^2} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Dacă parametrul θ se consideră, de asemenea, repartizat după o lege normală, cu valoarea medie nulă şi dispersia σ_θ^2, se poate scrie:

$$w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}} \tag{4.61}$$

Înlocuind (4.60) şi (4.61) în relaţia (4.28), se obţine:

$$w(\theta\,|\,\vec{r}\,)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;\sigma_n}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i-\theta)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_\theta}\,e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}}\cdot\frac{1}{w(\vec{r}\,)} \tag{4.62}$$

sau:

$$w(\theta\,|\,\vec{r}\,)=K(\vec{r}\,)\,e^{-p\,\theta^2+q\,\theta} \tag{4.63}$$

unde:

$$K(\vec{r}\,)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_n}\right)^N\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;\sigma_\theta}\,\frac{1}{w(\vec{r}\,)}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}r_i^2} \tag{4.64}$$

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_\theta^2}+\frac{N}{\sigma_n^2}\right) \tag{4.65}$$

$$q=\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}r_i \tag{4.66}$$

Pentru a calcula estimatul în cazul funcţiei de cost pătratul erorii sau, echivalent, pe baza erorii pătratice medii minime, se înlocuieşte (4.63) în relaţia (4.18), rezultând:

$$\hat{\theta}=K(\vec{r}\,)\int_{-\infty}^{\infty}\theta\,e^{-p\,\theta^2+q\,\theta}\,d\theta \tag{4.67}$$

Pentru determinarea constantei $K(\vec{r})$, care nu depinde de θ se integrează relaţia (4.63) pe domeniul $(-\infty,\infty)$ şi se ţine cont de (4.17), adică:

$$K(\vec{r}\,)=\frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p\,\theta^2+q\,\theta}\,d\theta} \tag{4.68}$$

Înlocuind (4.68) în (4.67), rezultă:

$$\hat{\theta} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{-p\,\theta^2 + q\,\theta}\, d\theta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-p\,\theta^2 + q\,\theta}\, d\theta} \tag{4.69}$$

Deoarece se poate scrie:

$$-p\,\theta^2 + q\,\theta = -\left[\left(\sqrt{p}\,\theta\right)^2 - q\,\theta\right] = -\left(\sqrt{p}\,\theta - \frac{q}{2\sqrt{p}}\right)^2 + \frac{q^2}{4\,p} \tag{4.70}$$

relația (4.69) devine:

$$\hat{\theta} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{-\left(\sqrt{p}\,\theta - \frac{q}{2\sqrt{p}}\right)^2} d\theta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{p}\,\theta - \frac{q}{2\sqrt{p}}\right)^2} d\theta} \tag{4.71}$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\sqrt{p}\,\theta - \frac{q}{2\sqrt{p}} = t \Rightarrow \theta = \frac{t}{\sqrt{p}} + \frac{q}{2\,p}\ ,\quad d\,\theta = \frac{dt}{\sqrt{p}} \tag{4.72}$$

se poate scrie:

$$\hat{\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt + \frac{q}{2\,p}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt} \tag{4.73}$$

Dar:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt = 0 \tag{4.74}$$

şi deci:

$$\hat{\theta} = \frac{q}{2p} \tag{4.75}$$

Înlocuind (4.65) şi (4.66) în relația (4.75), rezultă:

$$\hat{\theta} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i \tag{4.76}$$

Dacă numărul eşantioanelor prelevate din semnalul recepţionat este suficient de mare, atunci se realizează condiţia:

$$\frac{\sigma_n^2}{N} << \sigma_\theta^2 \tag{4.77}$$

În cazul satisfacerii relaţiei (4.77), relaţia (4.76) devine:

$$\hat{\theta} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i \tag{4.78}$$

adică estimatul se poate deduce uşor prin media aritmetică a eşantioanelor prelevate din semnalul recepţionat.

În cazul utilizării funcţiei de cost uniforme, estimatul maximum aposteriori se poate calcula, de exemplu, cu relaţia (4.25). Ţinând cont de (4.63), rezultă:

$$\ln w(\theta \mid \vec{r}) = \ln K(\vec{r}) - p\,\theta^2 + q\,\theta \tag{4.79}$$

Înlocuind (4.79) în (4.63) şi ţinând cont că $\ln[K(\vec{r})]$ nu depinde de parametrul θ, se obţine:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{q}{2p} \tag{4.80}$$

adică acelaşi estimat ca în cazul utilizării funcţiei de cost pătratul erorii.

Deşi au fost utilizate două funcţii de cost diferite, s-a obţinut acelaşi estimat, lucru care nu este adevărat în general. Se poate demonstra că, atunci când densitatea de repartiţie $w(\theta \mid \vec{r})$ este simetrică în raport cu dreapta $\theta = \hat{\theta}_{map}$, atunci estimatul obţinut cu funcţia de cost pătratul erorii este egal cu cel obţinut când se utilizează funcţia de cost uniformă.

Dacă, în continuare, se presupune că sursa de informaţie este caracterizată de parametrul determinist a, necunoscut destinatarului, semnalul recepționat va fi de forma:

$$r(t) = a + n(t) \tag{4.81}$$

Presupunând şi în acest caz aceleaşi ipoteze asupra zgomotului, se poate scrie o relație similară cu (4.60), înlocuind θ cu a, adică:

$$w(\vec{r} \mid a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - a)^2} \tag{4.82}$$

Estimatul maximum plauzibil se poate atunci calcula cu relația (4.34).

Dar

$$\ln w(\vec{r} \mid a) = -N \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n \right) - \frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - a)^2 \tag{4.83}$$

Înlocuind (4.83) în relația (4.34), rezultă:

$$\hat{a}_{mp} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \tag{4.84}$$

Din relația finală (4.84) rezultă că estimatul maximum plauzibil este riguros egal cu media aritmetică a eşantioanelor prelevate din semnalul recepționat.

4.5. Estimarea liniară a unui parametru în cazul observării continue

Estimarea se spune că este *liniară* atunci când semnalul generat de emițător depinde liniar de parametrul care trebuie estimat.

Astfel, în cazul în care parametrul de estimat este o variabilă aleatoare continuă, θ, se poate scrie:

$$s(t, \theta) = \theta f(t) \tag{4.85}$$

unde $f(t)$ este un semnal cunoscut la recepție.

Când parametrul de estimat este o mărime deterministă, a:

$$s(t,a) = a\, f(t) \tag{4.86}$$

Se va considera la început că parametrul de estimat este o variabilă aleatoare continuă. În acest caz, semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = \theta\, f(t) + n(t) \tag{4.87}$$

unde $n(t)$ este zgomotul de pe canalul de transmisiuni.

În cazul observării continue a semnalului recepționat pe intervalul $[0,T]$, se consideră un sistem complet, ortonormat de funcții deterministe, $v_i(t)$, pe acest interval, adică:

$$\int_0^T v_i(t) v_j(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad i \neq j \\ 1, & \text{dacă} \quad i = j \end{cases} \tag{4.88}$$

În cazul observării continue, se descompune semnalul recepționat într-o serie, de forma:

$$r(t) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=1}^{N} r_i v_i(t) \tag{4.89}$$

unde:

$$r_i = \int_0^T r(t)\, v_i(t)\, dt \;\;,\;\; i = \overline{1, N} \tag{4.90}$$

Dacă se alege:

$$v_1(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{E}} \tag{4.91}$$

unde

$$E = \int_0^T f^2(t)\, dt \tag{4.92}$$

reprezintă energia semnalului determinist $f(t)$, atunci se poate demonstra că numai pe baza componentei r_1 se poate determina estimatul maximum aposteriori, utilizând, deci, funcția de cost uniformă. Mai mult, celelalte funcții ortonormate $v_i(t), i \geq 2$, nu trebuie cunoscute.

Într-adevăr, înlocuind (4.87) în (4.90) şi ținând cont de (4.91), rezultă:

$$r_1 = \int_0^T r(t) v_1(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T [\, \theta f(t) + n(t) \,] f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt{E}} \int_0^T f^2(t)\, dt + \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T n(t) f(t)\, dt = \tag{4.93}$$

$$= \theta \sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T n(t) f(t)\, dt$$

Pentru $i \geq 2$, rezultă:

$$r_i = \int_0^T [\, \theta f(t) + n(t) \,] v_i(t)\, dt = \int_0^T \left[\, \theta v_1(t) \sqrt{E} + n(t) \,\right] v_i(t)\, dt =$$

$$= \theta \sqrt{E} \int_0^T v_1(t) v_i(t)\, dt + \int_0^T n(t) v_i(t)\, dt = \int_0^T n(t) v_i(t)\, dt \tag{4.94}$$

deoarece:

$$\int_0^T v_1(t)\, v_i(t)\, dt = 0 \quad , \quad \text{pentru } i \geq 2 \tag{4.95}$$

Din relația (4.94) se constată că celelalte componente $r_i, i \geq 2$ nu depind de θ, deci se poate scrie relația:

$$w_1(r_1 \mid \theta) = w_1(r_i), i \geq 2 \tag{4.96}$$

Pe de altă parte, dacă zgomotul de pe canal se consideră alb, sau eşantioanele $r_1, r_2, ..., r_N$ sunt prelevate cu perioada $T_1 = 1/(2 f_0)$, unde f_0 este frecvența cea mai mare din spectrul zgomotului, este adevărată relația:

$$w(\vec{r}\,|\,\theta) = \prod_{i=1}^{N} w_1(r_i\,|\,\theta) \tag{4.97}$$

sau, ţinând cont de (4.96), rezultă:

$$w(\vec{r}\,|\,\theta) = w_1(r_1\,|\,\theta) w_1(r_2)...w_1(r_N), N \to \infty \tag{4.98}$$

Folosind funcţia de cost uniformă şi considerând că parametrul θ este repartizat normal, conform relaţiei (4.61), rezultă:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta} \ln w_1(r_1\,|\,\theta)\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} - \frac{\hat{\theta}_{map}}{\sigma_\theta^2} = 0 \tag{4.99}$$

Din relaţia (4.93) rezultă că şi variabila aleatoare $(r_1\,|\,\theta)$ este repartizată normal, dacă zgomotul $n(t)$ este repartizat după o lege normală.

Valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare $(r_1\,|\,\theta)$ se determină după cum urmează:

$$m_1\{(r_1\,|\,\theta)\} \overset{not.}{=} (\overline{r_1}\,|\,\theta) =$$

$$= m_1\left\{\theta\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^T n(t) f(t)\,dt\right\} = \tag{4.100}$$

$$= \theta\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^T \overline{n(t)} f(t)\,dt = \theta\sqrt{E}$$

S-a presupus că valoarea medie a zgomotului este nulă $(\overline{n(t)} = 0)$.

$$D\{(r_1\,|\,\theta)\} = m_1\left\{[(r_1\,|\,\theta) - (\overline{r_1}\,|\,\theta)]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{E} m_1\left\{\left[\int_0^T n(t) f(t)\,dt\right]^2\right\} \tag{4.101}$$

Dacă zgomotul se poate considera alb pe canalul respectiv, înlocuind pătratul unei integrale cu produsul a două integrale identice, dar cu variabile de integrare distincte, şi ţinând cont că funcţia de autocorelație a zgomotului alb este proporțională cu distribuția Dirac, rezultă:

$$D\{(r_1|\theta)\}\overset{not.}{=}\sigma_n^2=\frac{1}{E}m_1\left\{\int_0^T n(t)f(t)dt\int_0^T n(u)f(u)du\right\}=$$

$$=\frac{1}{E}\int_0^T\int_0^T f(t)f(u)\overline{n(t)n(u)}dtdu=$$

$$=\frac{1}{E}\int_0^T\int_0^T f(t)f(u)S_0\delta(u-t)dtdu=\frac{S_0}{E}\int_0^T f^2(t)dt=S_0 \qquad (4.102)$$

unde S_0 este densitatea spectrală de putere a zgomotului alb.

În cazul când zgomotul de pe canalul de transmisiuni este cvasialb, având densitatea spectrală de putere constantă, S_0, în banda $-\omega_0<\omega<\omega_0$, atunci se poate scrie [48]:

$$D\{(r_1|\theta)\}\overset{not.}{=}\sigma_n^2=\frac{S_0}{2\pi E}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}|F(j\omega)|^2d\omega \qquad (4.103)$$

unde $F(j\omega)$ este transformata Fourier a semnalului $f(t)$.

Cu (4.100), (4.102) sau (4.103), densitatea de repartiție de ordinul unu a variabilei aleatoare $(r_1|\theta)$ se poate scrie sub forma:

$$w_1(r_1|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(r_1-\theta\sqrt{E}\right)^2} \qquad (4.104)$$

unde dispersia σ_n^2 se înlocuieşte cu S_0, în cazul zgomotului alb, sau se calculează cu relația (4.103), în cazul zgomotului cvasialb.

Înlocuind (4.104) în (4.99), rezultă:

$$\hat{\theta}_{map}\left(\frac{E}{\sigma_n^2}+\frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)=\frac{r_1\sqrt{E}}{\sigma_n^2} \qquad (4.105)$$

Pe de altă parte, conform relațiilor (4.90) şi (4.91), se poate scrie:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T r(t) f(t)\, dt \tag{4.106}$$

Înlocuind (4.106) în (4.105), rezultă:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{1}{E + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2}} \int_0^T r(t) f(t)\, dt \tag{4.107}$$

Se observă că în luarea deciziei intervine numai componenta r_1 a semnalului recepționat, celelalte neafectând decizia. Din acest motiv r_1 reprezintă o statistică suficientă.

Conform relației (4.107) schema bloc a receptorului care calculează estimatul maximum aposteriori este cea dată în figura 4.4.

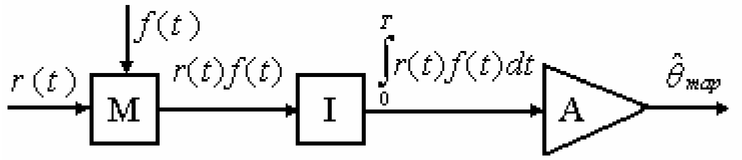

Fig. 4.4. Schema bloc a receptorului care calculează estimatul maximum aposteriori în cazul observării continue

Semnalul $f(t)$ este cunoscut la recepție, așa încât acesta este generat local. După blocul M, de multiplicare a semnalului recepționat, $r(t)$, cu semnalul generat local, $f(t)$, urmează un integrator, I, și apoi un amplificator, sau atenuator, A, după cum factorul:

$$F = \frac{1}{E + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2}} \tag{4.108}$$

este supraunitar sau subunitar.

Dacă parametrul care urmează a fi estimat este determinist și necunoscut la recepție, estimatul maximum plauzibil, sau de maximă plauzibilitate, se determină cu relația (4.34). În acest caz, semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = a\, f(t) + n(t) \tag{4.109}$$

Urmând aceleaşi etape de calcul ca în cazul parametrului θ, rezultă o densitate de repartiție de ordinul unu, $w_1(r_1 \mid a)$, de aceeaşi formă cu aceea calculată în relația (4.104), înlocuind θ cu a, adică:

$$w_1(r_1 \mid a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(r_1 - a\sqrt{E})^2} \tag{4.110}$$

Ca şi în cazul precedent, $w_1(r_i \mid a)$, pentru $i \geq 2$, nu depind de parametrul determinist, necunoscut, a, astfel încât relația (4.34) devine:

$$\left.\frac{\partial}{\partial a} \ln w_1(r_1 \mid a)\right|_{a = \hat{a}_{mp}} = 0 \tag{4.111}$$

Înlocuind (4.110) în relația (4.111), estimatul de maximă plauzibilitate se determină cu relația:

$$\hat{a}_{mp} = \frac{1}{E}\int_0^T r(t)\, f(t)\, dt \tag{4.112}$$

Schema bloc a receptorului care calculează un astfel de estimat este identică cu aceea din figura 4.4, cu deosebirea că amplificatorul, sau atenuatorul, A, are factorul de amplificare, respectiv atenuare, egal cu $1/E$.

În cazul particular când:

$$s(t, \theta) = \theta \tag{4.113}$$

sau:

$$s(t, a) = a \tag{4.114}$$

se ajunge din nou la cazul estimării unui parametru invariant în timp, dar în cazul observării continue. Deoarece, în acest caz particular:

$$f(t) = 1 \tag{4.115}$$

şi

$$E = \int_0^T f^2(t)\,dt = T \tag{4.116}$$

relațiile (4.107) şi (4.112) devin:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \frac{\sigma_n^2}{T}} \frac{1}{T} \int_0^T r(t)\,dt\,, \tag{4.117}$$

respectiv:

$$\hat{a}_{mp} = \frac{1}{T} \int_0^T r(t)\,dt \tag{4.118}$$

Comparând relația (4.76) cu (4.117) şi relația (4.84) cu (4.118), rezultă că, în cazul estimării unui parametru invariant în timp, pentru observarea continuă se pot folosi relațiile de la observarea la momente de timp discrete, înlocuind suma cu o integrală definită, la care limitele de integrare sunt egale cu 0, respectiv T.

4.6. Estimarea neliniară a unui parametru în cazul observării continue

Dacă semnalul generat de emițător nu este o funcție liniară de parametrul care urmează a fi estimat, atunci estimarea este denumită *neliniară.*

În acest caz, semnalul recepționat $r(t)$ este de forma:

$$r(t) = s(t,\theta) + n(t)\,, \tag{4.119}$$

dacă parametrul care urmează a fi estimat este o variabilă aleatoare continuă θ şi de forma:

$$r(t) = s(t,a) + n(t) \tag{4.120}$$

dacă parametrul ce urmează a fi estimat este determinist.

Se va considera, pentru început, cazul parametrului θ, care urmează a fi estimat prin observarea continuă a semnalului recepționat pe intervalul $[0,T]$.

În general, în acest caz, nu există o statistică suficientă, aşa că problema trebuie abordată în mod diferit față de cazul estimării liniare.

Fie semnalul recepționat $r(t)$, reprezentat prin seria:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i \, v_i(t), \; N \to \infty \tag{4.121}$$

unde:

$$r_i = \int_0^T r(t) \, v_i(t) \, dt, \tag{4.122}$$

iar funcțiile $v_i(t)$ formează un sistem ortonormat, complet pe intervalul $[0,T]$, satisfăcând relația (4.88).

Pentru o valoare θ dată, rezultă că, dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni poate fi considerat alb, cu densitatea spectrală de putere S_0, repartizat normal, cu valoarea medie nulă, atunci, ținând cont de relațiile (4.119) şi (4.122), rezultă că şi componentele r_i vor fi repartizate normal. Pentru determinarea legii de repartiție, va trebui să se determine valoarea medie şi dispersia acestora.

Valoare medie a componentelor r_i se determină cu relația:

$$\begin{aligned} m_1\{ r_i \} &\overset{not.}{=} \overline{r_i} = m_1 \left\{ \int_0^T [\, s(t,\theta) + n(t) \,] \, v_i(t) \, dt \right\} = \\ &= \int_0^T s(t,\theta) \, v_i(t) \, dt + \int_0^T \overline{n(t)} \, v_i(t) \, dt \end{aligned} \tag{4.123}$$

Deoarece $\overline{n(t)} = 0$, rezultă:

$$\overline{r_i} = \int_0^T s(t,\theta) \, v_i(t) \, dt \tag{4.124}$$

Ținând cont de relațiile (4.121) şi (4.122), din (4.124) rezultă:

$$s\,(t,\theta)=\sum_{i=1}^{N}\overline{r_i}\;v_i(t)\quad,\quad N\to\infty \tag{4.125}$$

Dispersia componentelor r_i se poate calcula cu relația:

$$D\{\,r_i\,\}=m_1\left\{\left(\,r_i-\overline{r_i}\,\right)^2\right\}=m_1\left\{\left[\,\int_0^T n\,(t)\,v_i\,(t)\,dt\,\right]^2\right\} \tag{4.126}$$

Înlocuind pătratul unei integrale cu produsul a două integrale identice, dar cu variabile de integrare diferite şi ținând cont că funcția de autocorelație a zgomotului alb este proporțională cu distribuția Dirac, din (4.126) rezultă:

$$\begin{aligned} D\{\,r_i\,\}&=m_1\left\{\int_0^T n\,(t)\,v_i(t)\,dt\int_0^T n\,(u)\,v_i(u)\,du\right\}= \\ &=\int_0^T\!\!\int_0^T v_i\,(t)\,v_i\,(u)\,\overline{n\,(t)\,n\,(u)}\,dt\,du= \\ &=S_0\int_0^T\!\!\int_0^T v_i\,(t)\,v_i\,(u)\,\delta\,(u-t)\,dt\,du \end{aligned} \tag{4.127}$$

Datorită proprietății de filtrare a distribuției Dirac, din (4.127) rezultă:

$$D\{\,r_i\,\}=S_0\int_0^T v_i^2\,(t)\,dt=S_0 \tag{4.128}$$

Cu alte cuvinte, legea de repartiție a variabilei aleatoare $(r_i\,|\,\theta)$ se poate scrie sub forma:

$$w_1(r_i\,|\,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi S_0}}\,e^{-\frac{(r_i-\overline{r_i})^2}{2S_0}} \tag{4.129}$$

Zgomotul fiind presupus alb şi independent de semnalul util transmis pe canal, rezultă că eşantioanele prelevate din zgomot sunt statistic independente, după cum statistic independente vor fi şi variabilele $(r_i \mid \theta)$.

Rezultă atunci că:

$$w(r_1, r_2, ..., r_N \mid \theta) = w(\vec{r} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{N} w_1 (r_i \mid \theta) \ , \quad N \to \infty \quad (4.130)$$

Înlocuind (4.129) în relația (4.130), se obține:

$$w(\vec{r} \mid \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \pi S_0}} \right)^N e^{-\frac{1}{2 S_0} \sum_{i=1}^{N} (r_i - \overline{r_i})^2} \quad , \quad N \to \infty \quad (4.131)$$

Deoarece:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 S_0} \sum_{i=1}^{N} \left(r_i - \overline{r_i} \right)^2 &= \frac{1}{2 S_0} \sum_{i=1}^{N} r_i^2 - \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^{N} r_i \overline{r_i} + \\ &+ \frac{1}{2 S_0} \sum_{i=1}^{N} (\overline{r_i})^2 , N \to \infty \end{aligned} \quad (4.132)$$

conform relațiilor (4.121) şi (4.124), se poate scrie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} r_i \overline{r_i} &= \sum_{i=1}^{N} r_i \int_0^T s(t, \theta) v_i(t) \, dt = \\ &= \int_0^T s(t, \theta) \sum_{i=1}^{N} r_i v_i(t) \, dt = \int_0^T s(t, \theta) \, r(t) \, dt , N \to \infty \end{aligned} \quad (4.133)$$

Analog, conform relațiilor (4.124) şi (4.125) rezultă:

$$\sum_{i=1}^{N} (\overline{r_i})^2 = \sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \int_0^T s(t,\theta) v_i(t) dt =$$

$$= \int_0^T s(t,\theta) \sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} v_i(t) dt = \int_0^T s^2(t,\theta) dt, N \to \infty \quad (4.134)$$

Înlocuind (4.132) în (4.131) şi ținând cont de relațiile (4.133) şi (4.134), rezultă, după logaritmare, expresia:

$$\ln w(\vec{r}\mid\theta) = -N\ln\sqrt{2\pi S_0} - \frac{1}{2S_0}\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + \\ + \frac{1}{S_0}\int_0^T s(t,\theta)\, r(t)\, dt - \frac{1}{2S_0}\int_0^T s^2(t,\theta) dt,\ N\to\infty \tag{4.135}$$

Utilizând funcția de cost uniformă, estimatul maximum aposteriori, $\hat{\theta}_{\text{map}}$ se poate determina înlocuind (4.135) în (4.29). ținând cont că primii doi termeni din membrul drept al relației (4.135) nu depind de θ, se poate scrie:

$$\frac{1}{S_0}\int_0^T [\, r(t) - s(t,\theta)\,] \frac{\partial s(t,\theta)}{\partial\theta} dt \Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \\ + \frac{\partial}{\partial\theta}\ln w(\theta)\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{4.136}$$

Dacă parametrul θ are o lege de repartiție normală, cu valoare medie nulă și dispersie σ_θ^2, dată de (4.61), relația (4.136) devine:

$$\frac{1}{S_0}\int_0^T [\, r(t) - s(t,\theta)\,] \frac{\partial s(t,\theta)}{\partial\theta} dt \Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} - \frac{\hat{\theta}_{map}}{\sigma_\theta^2} = 0 \tag{4.137}$$

În cazul în care parametrul este determinist, estimatul de maximă plauzibilitate $\hat{a}_{mp}$ se poate determina cu relația (4.34), unde $\ln[w(\vec{r}\mid a)]$ se obține din (4.135), înlocuind θ cu a.

Efectuând această înlocuire, estimatul de maximă plauzibilitate rezultă din relația:

$$\int_0^T [\, r(t) - s(t,a)\,] \frac{\partial s(t,a)}{\partial a} dt \Bigg|_{a=\hat{a}_{mp}} = 0 \tag{4.138}$$

Particularizând relația (4.137) pentru cazul estimării liniare, adică atunci când $s(t,\theta)$ este dat de relația (4.85), rezultă:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{1}{E + \dfrac{S_0}{\sigma_\theta^2}} \int_0^T r(t)\, f(t)\, dt\,, \qquad (4.139)$$

adică aceeaşi relaţie (4.107) pentru cazul zgomotului alb, când $\sigma_n^2 = S_0$.

Particularizând relaţia (4.138) pentru cazul estimării liniare, adică atunci când este satisfăcută relaţia (4.86) rezultă estimatul de maximă plauzibilitate dat de relaţia (4.112).

4.7. Erori de estimare

Prin *eroare de estimare* se înţelege diferenţa dintre estimatul $\hat{\theta}$ sau $\hat{a}$, obţinut după un criteriu oarecare, şi valoarea reală a parametrului ce trebuie estimat, adică

$$\varepsilon_\theta = \hat{\theta} - \theta \qquad (4.140)$$

sau:

$$\varepsilon_a = \hat{a} - a \qquad (4.141)$$

Se va calcula o margine inferioară a dispersiei erorii de estimare care, pentru simplificarea calculelor, se va efectua în cazul unui estimat nedeplasat, deşi margini similare pot fi calculate în cazul general.

Se consideră, pentru început, cazul când parametrul ce urmează a fi estimat este o variabilă aleatoare, continuă, θ. În acest caz, eroarea de estimare depinde de două variabile aleatoare şi anume, de semnalul observat $\vec{r}$ şi de parametrul aleator θ.

Valoarea medie a erorii de estimare se va calcula atunci cu relaţia:

$$\overline{\overline{\varepsilon_\theta}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}\left(\hat{\theta} - \theta\right) w\left(\vec{r} \cap \theta\right) d\theta dV = 0 \tag{4.142}$$

deoarece s-a considerat cazul unui estimat nedeplasat, pentru care are loc relația (4.38).

Valoarea pătratică medie a erorii de estimare, calculată, de asemenea, în raport cu ambele variabile aleatoare $\vec{r}$ si θ se calculează cu relația:

$$\overline{\overline{\varepsilon_\theta^2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 w\left(\vec{r} \cap \theta\right) d\theta dV \tag{4.143}$$

Ținând cont de (4.142) si (4.143), dispersia erorii de estimare este:

$$\sigma_{\varepsilon_\theta}^2 = \overline{\overline{\varepsilon_\theta^2}} - \left[\overline{\overline{\varepsilon}}\right]^2 = \overline{\overline{\varepsilon_\theta^2}} \tag{4.144}$$

Derivând relația (4.142) în raport cu θ, rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}\left(\hat{\theta} - \theta\right)\frac{\partial w\left(\vec{r} \cap \theta\right)}{\partial \theta} d\theta dV - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} w\left(\vec{r} \cap \theta\right) d\theta dV = 0 \tag{4.145}$$

Deoarece:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} w\left(\vec{r} \cap \theta\right) d\theta dV = 1 \tag{4.146}$$

rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}\left(\hat{\theta} - \theta\right)\frac{\partial w\left(\vec{r} \cap \theta\right)}{\partial \theta} d\theta \mathrm{d}V = 1 \tag{4.147}$$

Pe de altă parte, pentru două funcții $f(\vec{r},\theta)$ şi $g(\vec{r},\theta)$ de pătrat sumabil, se poate scrie inegalitatea lui Schwartz - Buniakovski:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} f(\vec{r},\theta) g(\vec{r},\theta) d\theta dV\right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} f^2(\vec{r},\theta) d\theta dV \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} g^2(\vec{r},\theta) d\theta dV \tag{4.148}$$

sau, echivalent:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} f^2(\vec{r},\theta)d\theta dV \geq \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} f(\vec{r},\theta)g(\vec{r},\theta)d\theta dV\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} g^2(\vec{r},\theta)d\theta dV} \tag{4.149}$$

Dacă se face notația:

$$\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 w\left(\vec{r} \cap \theta\right) \overset{not.}{=} f^2(\vec{r},\theta) \tag{4.150}$$

relația (4.143) se poate scrie sub formă echivalentă:

$$\overline{\overline{\varepsilon_\theta^2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 w\left(\vec{r} \cap \theta\right) d\theta dV = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} f^2\left(\vec{r},\theta\right) d\theta dV \tag{4.151}$$

Deoarece totdeauna se poate scrie:

$$w(\vec{r} \cap \theta) = e^{\ln w(\vec{r} \cap \theta)} \tag{4.152}$$

rezultă:

$$\frac{\partial w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta} = w(\vec{r} \cap \theta)\frac{\partial \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta} \tag{4.153}$$

Înlocuind (4.153) în (4.147), se obține:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}(\hat{\theta} - \theta)w(\vec{r} \cap \theta)\frac{\partial \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta}d\theta dV = 1 \tag{4.154}$$

Se face în continuare următoarea notație:

$$\left[\frac{\partial \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta}\right]^2 w(\vec{r} \cap \theta) \overset{not.}{=} g^2(\vec{r},\theta) \tag{4.155}$$

Cu (4.150) şi (4.155), relația (4.154) devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} f(\vec{r},\theta)g(\vec{r},\theta)d\theta dV = 1 \tag{4.156}$$

Înlocuind relațiile (4.155) şi (4.156) în (4.149) şi ținând cont de (4.144) şi (4.151), rezultă:

$$\sigma_{\varepsilon_\theta}^2 \geq \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\Delta}\left[\frac{\partial \ln w(\vec{r}\cap\theta)}{\partial\theta}\right]^2 w(\vec{r}\cap\theta)d\theta dV} \tag{4.157}$$

respectiv:

$$\sigma_{\varepsilon_\theta}^2 \geq \frac{1}{\overline{\overline{\left[\frac{\partial \ln w(\vec{r}\cap\theta)}{\partial\theta}\right]^2}}} \tag{4.158}$$

unde medierea se calculează în raport cu ambele variabile aleatoare $\vec{r}$ şi θ.

Inegalitatea (4.158) este cunoscută sub numele de *inegalitatea Cramér - Rao* şi dă limita inferioară a dispersiei erorii de estimare.

Este binecunoscut faptul că în inegalitatea lui Schwartz-Buniakovski se obţine egalitatea atunci când:

$$g(\vec{r},\theta) = kf(\vec{r},\theta) \tag{4.159}$$

unde k este o constantă.

Ţinând cont de notaţiile (4.150) şi (4.155), conform relaţiei (4.159), respectiv dacă:

$$\frac{\partial \ln w(\vec{r}\cap\theta)}{\partial\theta} = k(\hat{\theta} - \theta) \tag{4.160}$$

inegalitatea(4.158) devine egalitate.

Prin definiţie, un estimat care satisface relaţia (4.160) se numeşte *estimat eficient* şi va fi notat cu $\hat{\theta}_{ef}$. Estimatul eficient determină cea mai mică dispersie a erorii de estimare, adică:

$$\sigma_{\varepsilon_{\theta_{ef}}}^2 = \frac{1}{\overline{\overline{\left[\frac{\partial \ln w(\vec{r}\cap\theta)}{\partial\theta}\right]^2}}}, \tag{4.161}$$

Relaţia (4.158) se poate scrie într-o formă echivalentă, dacă se pleacă de la relaţia evidentă:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} w\left(\vec{r}\cap\theta\right)d\theta dV=1 \tag{4.162}$$

Derivând relația (4.162) în raport cu θ şi ținând cont de (4.153), se obține:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} w\left(\vec{r}\cap\theta\right)\frac{\partial \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta}d\theta dV=0 \tag{4.163}$$

Derivând relația (4.163) în raport cu θ şi ținând cont de (4.153), rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} w\left(\vec{r}\cap\theta\right)\left[\frac{\partial \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta}\right]^2 d\theta dV+ \tag{4.164}$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} w\left(\vec{r}\cap\theta\right)\frac{\partial^2 \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta^2}d\theta dV=0,$$

cu condiția ca $\dfrac{\partial^2 \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta^2}$ să fie absolut integrabilă în raport cu θ si $\vec{r}$.

Din (4.164) rezultă atunci:

$$\overline{\overline{\left[\frac{\partial \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta}\right]^2}}=-\overline{\overline{\left[\frac{\partial^2 \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]}} \tag{4.165}$$

Înlocuind (4.165) în (4.158) se obține o formă echivalentă a marginii Cramér- Rao, de forma:

$$\sigma^2_{\varepsilon_\theta}=\overline{\overline{\left[\hat{\theta}-\theta\right]^2}}\geq-\frac{1}{\overline{\overline{\left[\dfrac{\partial^2 \ln w\left(\vec{r}\cap\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]}}} \tag{4.166}$$

Eroarea de estimare a unui parametru determinist, a, necunoscut receptorului se poate obține uşor dacă se consideră parametru determinist a o variabilă aleatoare α cu o densitate de repartiție egală cu distribuția Dirac, adică:

$$w(\alpha) = \delta\,(\alpha - a) \tag{4.167}$$

Deoarece totdeauna se poate scrie:

$$w\,(\vec{r} \cap \alpha) = w\,(\alpha)\,w\,(\vec{r} \mid \alpha\,), \tag{4.168}$$

cu relația (4.167), rezultă:

$$w\,(\vec{r} \cap \alpha) = w\,(\vec{r} \mid \alpha)\,\delta\,(\alpha - \mathrm{a})$$

Considerând şi în acest caz un estimat nedeplasat, valoarea medie a erorii se determina cu relația:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\varepsilon_\alpha}} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} (\hat{\alpha} - \alpha)\,w(\vec{r} \cap \alpha)\,d\alpha\,dV = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Delta} (\hat{\alpha} - \alpha)\,w(\vec{r} \mid \alpha)\,\delta\,(\alpha - a)\,d\alpha\,dV = \\ &= \int_{\Delta} (\hat{a} - a)\,w(\vec{r} \mid \mathrm{a})\,dV = \overline{\varepsilon_a} = 0\end{aligned} \tag{4.169}$$

deoarece s-a considerat cazul unui estimat nedeplasat, pentru care este adevărată relația (4.40).

Trebuie remarcat că, în cazul estimării unui parametru determinist, medierea se efectuează numai în raport cu $\vec{r}$.

Urmând aceleaşi etape de calcul şi ținând cont de proprietatea de filtrare a distribuției Dirac, se ajunge, în cele din urmă, la expresia dispersiei erorii de estimare a unui parametru determinist, de forma:

$$\sigma_{\varepsilon_a}^2 = \overline{[\hat{a} - a\,]^2} \geq \frac{1}{\displaystyle\int_{\Delta} \left[\frac{\partial \ln w(\vec{r} \mid a)}{\partial a}\right]^2 w(\vec{r} \mid a\,)\,dv} \tag{4.170}$$

respectiv:

$$\sigma_{\varepsilon_a}^2 = \overline{[\hat{a} - a\,]^2} \geq \frac{1}{\overline{\overline{\left[\dfrac{\partial \ln w(\vec{r} \mid a)}{\partial a}\right]^2}}} \tag{4.171}$$

În mod analog, dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{\partial \ln w(\vec{r}\mid a)}{\partial a} = k\left(\ \hat{a} - a\right) \tag{4.172}$$

unde k este o constantă, se obține un estimat eficient, notat $\hat{a}_{ef}$, care determină o dispersie minimă a erorii de estimare, adică:

$$\sigma^2_{\varepsilon_{a_{ef}}} = \overline{\left[\ \hat{a}_{ef} \text{ - } a\ \right]^2} = \frac{1}{\overline{\left[\dfrac{\partial \ln w(\vec{r}\mid a)}{\partial a}\right]^2}} \tag{4.173}$$

Relația (4.171) se poate scrie într-o formă echivalentă, dacă se pleacă de la relația evidentă:

$$\int_{\Delta} w(\ \vec{r}\mid a)\, dV = 1 \tag{4.174}$$

Urmând aceleaşi etape de calcul ca în cazul estimării parametrului aleator θ, se obține şi în acest caz, următoarea expresie echivalentă:

$$\sigma^2_{\varepsilon_a} = \overline{\left[\ \hat{a} \text{ - } a\right]^2} \geq -\frac{1}{\overline{\left[\dfrac{\partial^2 \ln w(\vec{r}\mid a)}{\partial a^2}\right]}} \tag{4.175}$$

4.8. Eroarea de estimare în cazul estimării liniare

În cazul estimării liniare tratate în paragraful 4.5, atât în cazul unui parametru aleator, cât si în cazul unui parametru determinist, s-a stabilit o statistică suficientă, adică posibilitatea efectuării estimării dintr-o singură componentă, r_1, a semnalului recepționat, reprezentat prin vectorul:

$$\vec{r} = (\ r_1\ , r_2\ , \ldots , r_N\ ) \tag{4.176}$$

În cazul unui parametru aleator s-a stabilit relația (4.104).

Dacă legea de repartiție a parametrului θ este data de relația

(4.61), atunci cu (4.104) si (4.61) se poate scrie:

$$w_1(r_1 \cap \theta) = w_1(r_1 \mid \theta) \cdot w(\theta) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(r_1 - \theta\sqrt{\mathrm{E}})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}} \tag{4.177}$$

de unde:

$$\ln w_1(r_1 \cap \theta) = -\frac{1}{2\sigma_n^2}(r_1 - \theta\sqrt{E})^2 - \frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2} + C \tag{4.178}$$

unde C este o constantă, care nu depinde de θ.

Derivând relația (4.178) în raport cu θ, rezultă:

$$\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{E}}{\sigma_n^2}(r_1 - \theta\sqrt{E}) - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \tag{4.179}$$

Înlocuind relația (4.105) în (4.179), rezultă:

$$\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta} = \left(\frac{E}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \right)(\hat{\theta}_{map} - \theta) \tag{4.180}$$

Ținând cont de relația (4.160), rezultă din (4.180) că, în cazul estimării liniare, s-a obținut un estimat eficient, în care constanta k are valoarea:

$$k = \frac{E}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \tag{4.181}$$

Ținând cont de (4.181), relația (4.179) devine:

$$\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{E}}{\sigma_n^2} r_1 - k\theta \tag{4.182}$$

iar $$\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta} \right]^2 = \frac{E}{\sigma_n^4} r_1^2 - \frac{2k\sqrt{E}}{\sigma_n^2} r_1\theta + k^2\theta^2 \tag{4.183}$$

Efectuând mai întâi medierea în raport cu r_1, rezultă:

$$\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta} \right]^2} = \frac{E}{\sigma_n^4}\overline{r_1^2} - \frac{2k\theta\sqrt{E}}{\sigma_n^2}\overline{r_1} + k^2\theta^2 \tag{4.184}$$

Ținând cont de relațiile (4.100), (4.102) sau (4.103), se poate scrie:

$$\overline{r_1^2} = \sigma_n^2 + \left[\overline{r_1}\right]^2 = \sigma_n^2 + E\theta^2 \tag{4.185}$$

Cu (4.185) şi (4.100), relația (4.184) devine

$$\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta}\right]^2} = \frac{E}{\sigma_n^2} + \left(\frac{E}{\sigma_n^2} - k\right)^2 \theta^2 \tag{4.186}$$

Înlocuind relația (4.181) în (4.186), rezultă:

$$\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta}\right]^2} = \frac{E}{\sigma_n^2} + \frac{\theta^2}{\sigma_\theta^4} \tag{4.187}$$

Mediind relația (4.187) în raport cu θ si ținând cont ca această variabilă aleatoare are valoarea medie nulă si dispersia σ_θ^2, rezultă $\overline{\theta^2} = \sigma_\theta^2$ şi atunci:

$$\overline{\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \cap \theta)}{\partial \theta}\right]^2}} = \frac{E}{\sigma_n^2} + \frac{\overline{\theta^2}}{\sigma_\theta^2} = \frac{\mathrm{E}}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2} \tag{4.188}$$

Introducând această valoare în expresia dispersiei erorii (4.161), rezultă:

$$\sigma_{\varepsilon_{\theta_{ef}}}^2 = \overline{\overline{\left[\hat{\theta}_{\mathrm{ef}} - \theta\right]^2}} = \frac{\sigma_\theta^2}{1 + \sigma_\theta^2 \dfrac{E}{\sigma_n^2}} \tag{4.189}$$

Ținând cont de relațiile (4.102) sau (4.103), rezultă că singurul mijloc de a micşora dispersia erorii de estimare în acest caz este mărirea raportului E/σ_n^2, adică a mări raportul semnal/perturbație.

În cazul unui parametru determinist, conform relației (4.110), rezultă că:

$$\ln w_1(r_1 \,|\, \mathrm{a}) = -\frac{1}{2\sigma_n^2}(r_1 - a\sqrt{E})^2 + C_1 \tag{4.190}$$

unde C_1 este o constantă ce nu depinde de parametrul a.

Derivând relația (4.190) în raport cu a, rezultă:

$$\frac{\partial \ln w_1(r_1 \mid a)}{\partial a} = \frac{\sqrt{E}}{\sigma_n^2}(r_1 - a\sqrt{E}) \tag{4.191}$$

Pe de altă parte, din relațiile (4.90), (4.91), (4.92) si 4.112) se obține:

$$\hat{a}_{mp} = \frac{1}{E}\int_0^T r(t) f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^T r(t) v_1(t)\, dt = \frac{r_1}{\sqrt{E}} \tag{4.192}$$

Cu (4.192), relația (4.191) devine:

$$\frac{\partial \ln w_1(r_1 \mid a)}{\partial a} = \frac{E}{\sigma_n^2}(\hat{a}_{mp} - a) \tag{4.193}$$

Comparând relația (4.172) cu (4.193) rezultă că, şi în cazul parametrului determinist, s-a obținut un estimat eficient, în care constanta k are valoarea:

$$k = \frac{E}{\sigma_n^2} \tag{4.194}$$

În cazul estimatului eficient, dispersia erorii de estimare se calculează cu relația (4.173).

Ținând cont de (4.194), relația (4.191) devine:

$$\frac{\partial \ln w(r_1 \mid a)}{\partial a} = \frac{\sqrt{E}}{\sigma_n^2} r_1 - ka \tag{4.195}$$

iar

$$\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \mid a)}{\partial a}\right]^2 = \frac{E}{\sigma_n^4} r_1^2 - \frac{2ak\sqrt{E}}{\sigma_n^2} r_1 + k^2 a^2 \tag{4.196}$$

Efectuând medierea relației (4.196) în raport cu r_1, rezultă:

$$\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 / a)}{\partial a}\right]^2} = \frac{E}{\sigma_n^4}\overline{r_1^2} - \frac{2ak\sqrt{E}}{\sigma_n^2}\overline{r_1} + k^2 a^2 \tag{4.197}$$

Dar

$$\left.\begin{aligned} \overline{r_1^2} = \sigma_n^2 + \left[\,\overline{r_1}\,\right]^2 = \sigma_n^2 + Ea^2 \\ \overline{r_1} = \sqrt{E}a \end{aligned}\right\} \tag{4.198}$$

Cu (4.194) şi (4.198), relaţia (4.197) devine:

$$\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \mid a)}{\partial a}\right]^2} = \frac{E}{\sigma_n^2} + \left(\frac{E}{\sigma_n^2} - k\right)^2 a^2 \tag{4.199}$$

Înlocuind (4.194) în (4.199), rezultă:

$$\overline{\left[\frac{\partial \ln w_1(r_1 \mid a)}{\partial a}\right]^2} = \frac{E}{\sigma_n^2} \tag{4.200}$$

Introducând această valoare în expresia dispersiei erorii de estimare, se poate scrie:

$$\sigma^2_{e_{a_{ef}}} = \overline{(\hat{a}_{ef} - a)^2} = \frac{\sigma_n^2}{E} \tag{4.201}$$

4.9. Eroarea de estimare în cazul estimării neliniare

Se va considera mai întâi cazul unui parametru aleator θ.

Marginea inferioară a dispersiei erorii de estimare se va calcula şi în acest caz cu inegalitatea Cramér - Rao, dată de relaţia (4.166).

Logaritmând relaţia (4.26), rezultă:

$$\ln w(\vec{r} \cap \theta) = \ln w(r/\theta) + \ln w(\theta) \tag{4.202}$$

Derivând relaţia (4.202) în raport cu θ si ţinând cont de (4.135), rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta} &= \frac{1}{S_0}\int_0^T [\, r(t) - s(t,\theta)\,] \frac{\partial s(t,\theta)}{\partial \theta} dt + \\ &+ \frac{\partial \ln w(\theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{4.203}$$

Pentru a obține expresia ce intervine în inegalitatea Cramér-Rao, se derivează din nou în raport cu θ relația (4.203), rezultând:

$$\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{S_0} \int_0^T \left[r(t) - s(t,\theta) \right] \frac{\partial^2 s(t,\theta)}{\partial \theta^2} dt -$$

$$- \frac{1}{S_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt + \frac{\partial^2 \ln w(\theta)}{\partial \theta^2} \tag{4.204}$$

sau, ținând cont de (4.119), se poate scrie echivalent că:

$$\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{S_0} \int_0^T n(t) \frac{\partial^2 s(t,\theta)}{\partial \theta^2} dt - \tag{4.205}$$

$$- \frac{1}{S_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt + \frac{\partial^2 \ln w(\theta)}{\partial \theta^2}$$

Mediind relația (4.205) în raport cu $\vec{r}$ şi ținând cont că zgomotul $n(t)$ are valoare medie nulă, $\overline{n(t)} = 0$, rezultă:

$$\overline{\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta^2}} = - \frac{1}{S_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt + \frac{\partial^2 \ln w(\theta)}{\partial \theta^2} \tag{4.206}$$

Efectuând o nouă mediere în raport cu θ, se obține:

$$\overline{\overline{\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta^2}}} = - \frac{1}{S_0} \int_0^T \overline{\left[\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial \theta} \right]^2} dt + \overline{\frac{\partial^2 \ln w(\theta)}{\partial \theta^2}} \tag{4.207}$$

Înlocuind (4.207) în relația (4.166), rezultă:

$$\sigma_{\varepsilon_\theta}^2 = \overline{\overline{\left(\hat{\theta} - \theta \right)^2}} \geq \frac{1}{\frac{1}{S_0} \int_0^T \overline{\left[\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial \theta} \right]^2} dt - \overline{\frac{\partial^2 \ln w(\theta)}{\partial \theta^2}}} \tag{4.208}$$

unde medierile din membrul drept al inegalității se efectuează în raport cu parametrul θ.

Pe de altă parte, conform relației (4.160), în (4.208) se obține semnul egalității, atunci când:

$$\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \cap \theta)}{\partial \theta^2} = -k \tag{4.209}$$

respectiv, atunci când este îndeplinită condiția:

$$\frac{1}{S_0}\int_0^T n(t)\frac{\partial^2 s(t,\theta)}{\partial \theta^2}dt - \frac{1}{S_0}\int_0^T\left[\frac{\partial s(\mathrm{t},\theta)}{\partial \theta}\right]^2 dt + \frac{\partial \ln w(\theta)}{\partial \theta^2} = -k \tag{4.210}$$

În cazul unui parametru determinist, marginea inferioară a dispersiei erorii de estimare se calculează cu inegalitatea Cramér - Rao, dată de relația (4.175).

Pe de altă parte, înlocuind în (4.135) parametrul aleator θ cu parametrul determinist a şi derivând apoi în raport cu a, se obține:

$$\frac{\partial \ln w(\vec{r} \mid \mathrm{a})}{\partial a} = \frac{1}{S_0}\int_0^T [r(t) - \mathrm{s}(t,a)]\frac{\partial s(t,a)}{\partial a}dt \tag{4.211}$$

Printr-o nouă derivare în raport cu a, rezultă:

$$\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \mid a)}{\partial a^2} = \frac{1}{S_0}\int_0^T [r(t) - s(t,a)]\frac{\partial^2 s(t,a)}{\partial a^2}dt - \tag{4.212}$$

$$-\frac{1}{S_0}\int_0^T\left[\frac{\partial s(t,a)}{\partial a}\right]^2 dt$$

Efectuând medierea în raport cu $\vec{r}$ şi ținând seama de relația (4.120) şi de faptul că valoarea medie a zgomotului este nulă, rezultă:

$$\overline{\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \mid a)}{\partial a^2}} = -\frac{1}{S_0}\int_0^T\left[\frac{\partial s(t,a)}{\partial a}\right]^2 dt \tag{4.213}$$

Înlocuind (4.231) în relația (4.175), se obține:

$$\sigma_{\varepsilon_a}^2 = \overline{(\hat{a} - a)^2} \geq \frac{S_0}{\int_0^T\left[\frac{\partial s(t,a)}{\partial a}\right]^2 dt} \tag{4.214}$$

Pe de altă parte, conform relației (4.172), în (4.214) se obține semnul egalității, atunci când:

$$\frac{\partial^2 \ln w(\vec{r} \mid a)}{\partial a^2} = -k \tag{4.215}$$

respectiv, atunci când:

$$\frac{1}{S_0}\int_0^T [r(t) - s(t,a)] \frac{\partial^2 s(t,a)}{\partial a^2} dt - \frac{1}{S_0}\int_0^T \left[\frac{\partial s(t,a)}{\partial a} \right]^2 dt = -k \tag{4.216}$$

4.10. Estimarea neliniară a mai multor parametri

Se va considera la început cazul estimării parametrilor aleatori $\theta_1, \theta_2, \theta_3 ..., \theta_M$.

Notând cu $\vec{\theta}$ vectorul ale cărui componente sunt tocmai parametrii aleatori care trebuie estimați, adică:

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \tag{4.217}$$

semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = s(t, \vec{\theta}) + n(t) \tag{4.218}$$

unde $n(t)$ este zgomotul alb, repartizat după o lege normală, cu valoare medie nulă.

Dacă parametrii $\theta_1, \theta_2, \theta_3 ..., \theta_M$ sunt independenți, se poate scrie relația:

$$w(\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{M} w_1(\theta_i) \tag{4.219}$$

Ținând seama de cele demonstrate în paragraful 4.7, relația (4.136) se poate scrie sub forma:

$$\frac{1}{S_0}\int_0^T \left[r(t) - s(t, \vec{\theta}) \right] \frac{\partial s(t, \vec{\theta})}{\partial \theta_i} dt \bigg|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}_{map}} + \frac{\partial \ln w(\vec{\theta})}{\partial \theta_i} \bigg|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}_{map}} \tag{4.220}$$

pentru $i = 1,2...., M$.

Relația (4.220) reprezintă, de fapt, un sistem de M ecuații, din care se deduc estimații maximum aposteriori $\hat{\theta}_{imap}$, $i=\overline{1,M}$.

Dacă parametrii aleatori $\theta_i, i=\overline{1,M}$ sunt, în plus, repartizați după o lege normală, cu valoare medie nulă şi dispersie $\sigma^2_{\theta_i}$, atunci se poate scrie:

$$w_1(\theta_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\,e^{-\frac{\theta_i^2}{2\sigma^2_{\theta_i}}} \tag{4.221}$$

pentru $i=\overline{1,M}$.

Dacă parametrii sunt mărimi deterministe $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_M$, necunoscute la recepție, vectorul corespunzător acestor parametri este:

$$\vec{a}=(\,a_1, a_2, \ldots, a_M\,) \tag{4.222}$$

Ținând seama de relația (4.138), rezultă estimații de maximă plauzibilitate, determinați din relația:

$$\int_0^T \left[r(t)-s(t,\vec{a})\,\right]\frac{\partial s(t,\vec{a})}{\partial a_i}\,dt\Big|_{\vec{a}=\hat{\vec{a}}_{mp}}=0, i=\overline{1,M} \tag{4.223}$$

Ecuația (4.224) este echivalentă cu un sistem de M ecuații, din care se vor deduce estimații de maximă plauzibilitate $\hat{a}_{i\,mp}$, $i=\overline{1,M}$.

4.11. Probleme rezolvate

1. Semnalul recepționat, de forma:

$$r\,(t)=s\,(\theta)+n\,(t)$$

este observat la momentele de timp discrete $t_1, t_2 \ldots\ldots, t_N$.Dacă eşantioanele zgomotului, $n(t_i)=n_i$,au o lege de repartiție normală monodimensională, cu valoare medie nulă şi dispersie σ_n^2, fiind variabile aleatoare independente între ele si independente de parametrul aleator θ, care are lege de repartiție normală, monodimensională, cu valoare medie nulă şi dispersie σ_θ^2, să se determine ecuația care dă estimatul maximum aposteriori. Caz particular $s(\theta)=\theta^2$.

Soluție

Eşantioanele prelevate din semnalul recepționat sunt de forma:

$$r_i = s(\theta)+n_i \ , \ i=\overline{1,N}$$

unde $r_i = r(t_i)$ Dacă n_i este repartizat după o lege normală monodimensională şi între θ şi n_i nu există nici o dependență statistică, înseamnă că şi eşantioanele r_i vor fi repartizate după o lege normală monodimensională, pentru care va trebui, însă, să se determine valoarea medie şi dispersia.

$$\overline{r_i} = m_1\{s(\theta)+n_i\} = s(\theta)+\overline{n_i} = s(\theta)$$

$$D\{r_i\} = m_1\left\{\left(r_i - \overline{r_i}\right)^2\right\} = m_1\left\{\left[s(\theta)+n_i - s(\theta)\right]^2\right\} = \overline{n_i^2} = \sigma_n^2$$

Rezultă atunci:

$$w_1(r_i \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[r_i - s(\theta)]^2}$$

Eşantioanele r_i fiind statistic independente, se poate scrie:

$$w(\vec{r} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{N} w_1(r_i \mid \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}\left[r_i - s(\theta)\right]^2}$$

Pe de altă parte:

$$w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}}$$

Înlocuind $w(\vec{r} \mid \theta)$ şi $w_1(\theta)$ în relația (4.29), rezultă:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} r_i - Ns(\hat{\theta}_{map})\right]\frac{ds(\hat{\theta}_{map})}{d\hat{\theta}_{map}}$$

În cazul particular considerat, rezultă:

$$\hat{\theta}_{map} = 2\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} r_i - N\hat{\theta}_{map}^2\right]\hat{\theta}_{map}$$

O primă soluție este $\hat{\theta}_{map} = 0$, care, fiind independentă de r_i, semnifică faptul că acest lucru ar avea loc dacă σ_n^2 ar fi suficient de mare şi, deci, informația apriori asupra lui θ este mai consistentă decât cea obținută din măsurători.

Celelalte două valori posibile sunt date de relația:

$$\hat{\theta}_{map} = \pm\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i - \frac{\sigma_n^2}{2N\sigma_\theta^2}}$$

Dacă ultimele două valori sunt reale, se va considera estimatul maximum aposteriori cel care maximizează densitatea de repartiție $w(\theta|\vec{r}) = \dfrac{w(\vec{r}|\theta)\cdot w_1(\theta)}{w(\vec{r})}$.

2. Semnalul recepționat, r, sub forma unor impulsuri rectangulare, determină o variabilă aleatoare cu lege de repartiție Poisson de medie θ, θ fiind la rândul său o variabilă aleatoare cu lege de repartiție exponențială, adică:

$$P\{r = k \mid \theta = a\} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, k = 0,1,2......$$

$$w(\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\theta}, & \theta > 0, \lambda \text{ cunoscut} \\ 0, & \theta \le 0 \end{cases}$$

Să se determine estimatul în cazul funcției de cost uniforme şi în cazul funcției de cost pătratul erorii.

Soluție

Conform relației (4.28) rezultă:

$$w(\theta \mid r) = \frac{w(r \mid \theta)\, w(\theta)}{w(r)} = \frac{\theta^r}{r!} e^{-\theta} \frac{\lambda\, e^{-\lambda\theta}}{w(r)} = \frac{\lambda}{w(r)\, r!} \theta^r e^{-(1+\lambda)\theta}$$

Pe de altă parte, din condiția de normare rezultă:

$$\int_0^\infty w(\theta \mid r) d\theta = 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{w(r) r!} \int_0^\infty \theta^r e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta = 1$$

Efectuând integrala prin parți, cu:

$$\theta^r = u \Rightarrow r\theta^{r-1} d\theta = du$$

$$e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta = dv \Rightarrow -\frac{e^{-(1+\lambda)\theta}}{(1+\lambda)} = v$$

se poate scrie:

$$\int_0^\infty \theta^r e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du = \frac{w(r) r!}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{\theta^r e^{-(1+\lambda)\theta}}{1+\lambda}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\infty} +$$

$$\frac{r}{1+\lambda} \int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta = \frac{w(r) r!}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{r}{1+\lambda} \int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta = \frac{w(r) r!}{\lambda}$$

Integrând succesiv prin părți, se poate scrie:

$$\frac{r!}{(1+\lambda)^r} \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta = \frac{w(r) r!}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{r!}{(1+\lambda)^r} \frac{e^{-(1+\lambda)\theta}}{1+\lambda}\Bigg|_0^\infty =$$

$$\frac{w(r) r!}{\lambda} \Rightarrow \frac{w(r) r!}{\lambda} = \frac{r!}{(1+\lambda)^{r+1}}$$

rezultă că:

$$w(\theta \mid r) = \begin{cases} \dfrac{(1+\lambda)^{r+1}}{r!} \theta^r e^{-(1+\lambda)\theta}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \le 0 \end{cases}$$

Estimatul maximum aposteriori se determină din relația (4.25).

$$\ln w(\theta \mid r) = (r+1)\ln(1+\lambda) - \ln(r!) + r\ln\theta - (1+\lambda)\theta$$

$$\left.\frac{\partial \ln w(\theta \mid r)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = \frac{r}{\theta_{map}} - (1+\lambda) = 0 \Rightarrow \theta_{map} = \frac{r}{1+\lambda}$$

În cazul utilizării funcției de cost pătratul erorii, conform relației (4.18), rezultă:

$$\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, w(\,\theta \mid r\,)\, d\theta = \frac{(1+\lambda)^{r+1}}{r!}\int_{0}^{\infty} \theta^{r+1} e^{-(1+\lambda)\theta} d\theta$$

Efectuând integrarea prin părți ca mai sus, rezultă:

$$\hat{\theta} = \frac{(1+\lambda)^{r+1}}{r!}\,\frac{(r+1)!}{(1+\lambda)^{r+2}} = \frac{r+1}{1+\lambda}$$

Se remarcă faptul că $\theta_{map} \neq \hat{\theta}$.

3. Semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = \theta + n(t)\,,$$

unde parametrul aleator θ, invariant în timp, este repartizat după o lege normală cu valoare medie m_θ și dispersie σ_θ^2. Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni se poate considera alb, fiind repartizat normal cu valoare medie nulă si dispersie σ_n^2, să se determine estimatul utilizâd funcția de cost uniformă, în cazul observării discrete.

Soluție

$$w_1(\,n_i\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}}\;;\;\; w(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{N} w_1(n_i) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N} n_i^2}$$

unde $n_i = n(t_1), i = 1,2,3,.....N$

Conform relației (4.60), se poate scrie:

$$w(\vec{r}\mid\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i-\theta)^2}$$

unde $r_i=r(t_i), i=1,2,3,......N$

Deoarece:

$$w(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}(\theta-m_\theta)^2}$$

relația (4.62) devine:

$$w(\theta\mid\vec{r})=\frac{w(\vec{r}\mid\theta)\,w(\theta)}{w(r)}=K(\vec{r})\,e^{-p\theta^2+q\theta}$$

unde

$$K(\vec{r})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\right)^N\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta}\frac{1}{w(\vec{r})}e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}r_i^2}\,e^{-\frac{m_\theta^2}{2\sigma_\theta^2}}$$

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sigma_n^2}+\frac{1}{\sigma_\theta^2}\right);\; q=\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}r_i+\frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2}$$

Estimatul maximum aposteriori se obține atunci cu relația (4.80), adică:

$$\hat{\theta}_{map}=\frac{q}{2p}=\frac{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}r_i+\frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2}}{\frac{N}{\sigma_n^2}+\frac{1}{\sigma_\theta^2}}=\frac{m_\theta+\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}r_i}{1+N\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2}}$$

4. Semnalul recepționat pe un canal de transmisiuni pe care apare zgomotul $n(t)$, care poate fi considerat alb, repartizat normal cu valoare medie nulă şi dispersie σ_n^2, este de forma:

$$r(t)=\sin(\omega_0+\theta)t+n(t)$$

unde θ este deviația de frecvență care se supune unei legi de repartiție uniformă, de forma:

$$w(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\Omega}, & \text{pentru } |\theta|\le\Omega\\ 0, & \text{pentru } |\theta|>\Omega\end{cases}$$

Să se determine ecuația din care se poate deduce estimatul maximum aposteriori.

Soluție

Deoarece θ are o lege de repartiție uniformă, rezultă că:

$$\frac{\partial \ln w(\theta)}{\partial\theta}=0$$

aşa încât ecuația (4.136) din care se deduce estimatul maximum aposteriori este de forma:

$$\int_0^T\left[r(t)-s(t,\theta)\right]\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}}=0$$

unde $s(t,\theta)=\sin(\omega_0+\theta)$.

Deoarece:

$$\frac{\partial\, \mathrm{s}(t,\theta)}{\partial\theta}=t\cos(\omega_0+\theta)t$$

ecuația integrală din care rezultă estimatul maximum aposteriori este:

$$\int_0^T t\left[r(t)-\sin(\omega_0+\theta)t\right]\cos(\omega_0+\theta)t\,dt\bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}}=0$$

5. Semnalul recepționat pe un canal de transmisiuni, pe care zgomotul $n(t)$ poate fi considerat alb, repartizat normal, cu valoare medie nulă şi dispersie $\sigma_n^2=S_0$, este de forma:

$$r(t)=\theta\cdot f(t)+n(t)$$

unde parametrul aleator θ este invariant în timp, fiind repartizat normal cu valoare medie m_θ şi dispersie σ_θ^2. Să se determine estimatul maximum aposteriori.

Soluție

În acest caz:

$$w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma_\theta^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}(\theta - m_\theta)^2}$$

iar

$$\ln w_1(\theta) = -\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2} + \frac{m_\theta \theta}{\sigma_\theta^2} + C$$

unde C este o constantă ce nu depinde de θ.

Conform relației (4.104), rezultă:

$$\ln w_1(r_1 \mid \theta) = -\frac{E}{2\sigma_n^2}\theta^2 + \frac{\sqrt{E}}{\sigma_n^2} r_1 + C_1$$

unde C_1 este o constantă independentă de θ, iar conform relației (4.106):

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T r(t) f(t) dt$$

Utilizând relația (4.99) rezultă:

$$-\frac{E}{\sigma_n^2}\hat{\theta}_{map} + \frac{1}{\sigma_n^2}\int_0^T r(t) f(t) dt - \frac{\hat{\theta}_{map}}{\sigma_\theta^2} + \frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{\dfrac{1}{\sigma_n^2}\displaystyle\int_0^T r(t)\ f(t)\ dt + \dfrac{m_\theta}{\sigma_\theta^2}}{\dfrac{E}{\sigma_n^2} + \dfrac{1}{\sigma_\theta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{\int_0^T r(t) f(t) dt + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2} m_\theta}{E + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2}}$$