CAPITOLUL 1

SEMNALE ALEATOARE

Un semnal aleator este un proces care se desfăşoară în timp şi este guvernat, cel puţin în parte, de legi probabilistice. Importanţa teoretică şi practică a studiului semnalelor aleatoare rezidă în faptul că semnalele purtătoare de informaţie, indiferent de natura lor, şi zgomotele care apar în procesul transmisiunii sunt modelate cel mai bine prin astfel de semnale.

1.1. Definirea semnalului aleator, a variabilei aleatoare, a funcţiei şi a densităţii de repartiţie

Pentru a defini un semnal aleator se consideră o experienţă oarecare. Prin rezultatul unei experienţe se înţelege una din posibilităţile de realizare a acesteia. Mulţimea rezultatelor posibile se va numi în continuare *spaţiul eşantioanelor* şi va fi notat cu Ω.

Din punct de vedere matematic, un semnal aleator este o funcţie de două variabile $f(k,t)=f^{(k)}(t)$, unde k ia valori în spaţiul eşantioanelor. Funcţiile $f^{(k)}(t)$ reprezintă *realizări particulare* ale semnalului aleator. O reprezentare geometrică intuitivă a unui semnal aleator este dată în figura 1.1.

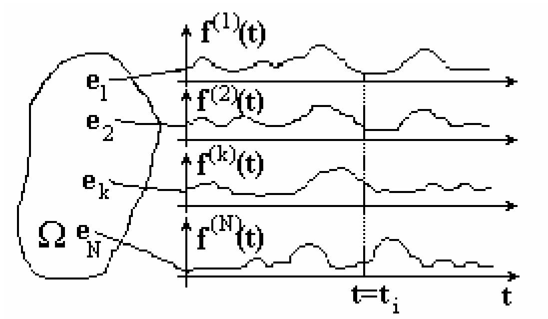


Fig. 1.1. Reprezentarea geometrică a unui semnal aleator

În figura 1.1, prin $e_1, e_2, ..., e_N$ s-au notat elementele din spațiul eşantioanelor, iar prin $f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), ..., f^{(N)}(t)$, realizările particulare ale semnalului aleator notat cu $f(t)$. Cu alte cuvinte, *semnalul aleator* este format din mulțimea realizărilor particulare, adică:

$$f(t) = \left\{ f^{(k)}(t) \right\} \tag{1.1}$$

Dacă variabila t ia valori pe axa reală, atunci semnalul $f(t)$ se va numi *proces aleator* sau *stochastic, continuu în timp*.

Dacă variabila t ia numai valori întregi, adică $t \in Z$, atunci semnalul aleator $f(t)$ se va numi *proces aleator* sau *stochastic, discret în timp.*

Pentru a face o distincție între cele două procese aleatoare, se va nota procesul aleator discret în timp cu $x[n]$, adică

$$x[n] = \left\{ x^{(k)}[n] \right\}, n \in Z \tag{1.1'}$$

Funcțiile $x^{(k)}[n]$ se numesc realizări particulare ale procesului aleator discret în timp.

Pentru orice valoare particulară a lui $t = t_i$ sau $n = n_i$ mulțimea valorilor funcțiilor $f(k, t_i) = f^{(k)}(t_i)$, respectiv

$x[k,n_i]=x^{(k)}[n_i]$, defineşte o *variabilă aleatoare*, notată în continuare cu $f(t_i)$, respectiv $x[n_i]$. Cu alte cuvinte, se poate scrie:

$$f(t_i)=\left\{f^{(k)}(t_i)\right\} \tag{1.2}$$

respectiv,

$$x[n_i]=\left\{x^{(k)}[n_i]\right\} \tag{1.2'}$$

Din (1.2) sau (1.2') se observă că un proces aleator este o mulţime de variabile aleatoare indexate.

Fie numărul real x_i ce aparţine domeniului de valori ale variabilei aleatoare $f(t_i)$ sau $x[n_i]$. Dacă se notează cu *n* numărul realizărilor particulare pentru care $f^{(k)}(t_i)\le x_i$, respectiv $x^{(k)}[n_i]\le x_i$, şi cu *N* numărul total al realizărilor particulare, atunci raportul *n/N*, când *N* este suficient de mare, va reprezenta probabilitatea ca variabila aleatoare $f(t_i)$, respectiv $x[n_i]$, să fie mai mică sau egală cu x_i şi va fi notată cu $P\{f(t_i)\le x_i\}$, respectiv $P\{x[n_i]\le x_i\}$. Această probabilitate este în general o funcţie ce depinde atât de numărul real x_i, cât şi de momentul de timp t_i sau n_i. Notând această funcţie cu $F_1(x_i;t_i)$, respectiv $F_1(x_i;n_i)$, se poate scrie relaţia:

$$F_1(x_i;t_i)=P\left\{f(t_i)\le x_i\right\} \tag{1.3}$$

respectiv

$$F_1(x_i;n_i)=P\left\{x[n_i]\le x_i\right\} \tag{1.3'}$$

Funcţia definită cu relaţia (1.3), respectiv (1.3'), se numeşte *funcţie de repartiţie de ordinul întâi*, fapt consemnat prin indicele unu al funcţiei *F*.

Derivata parțială în raport cu x_i a funcției de repartiție de ordinul întâi definește *densitatea de repartiție* sau *de probabilitate* de ordinul întâi și va fi notată cu $w_1(x_i;t_i)$, adică:

$$w_1(x_i;t_i) = \frac{\partial F_1(x_i;t_i)}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

respectiv

$$w_1(x_i;n_i) = \frac{\partial F_1(x_i;n_i)}{\partial x_i} \tag{1.4'}$$

Produsul $w_1(x_i;t_i)dx_i$, respectiv $w_1(x_i;n_i)dx_i$, reprezintă probabilitatea ca procesul aleator *f*(*t*), respectiv *x*[*n*], la momentul $t = t_i$, respectiv $n = n_i$, să treacă prin vecinătatea valorii x_i, așa cum este reprezentat intuitiv în figura 1.2.

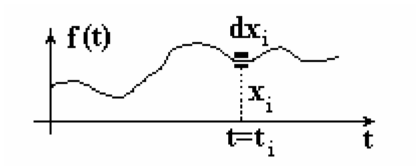


Fig. 1.2. Reprezentarea geometrică intuitivă a produsului $w_1(x_i;t_i)dx_i$

Matematic, aceasta se scrie astfel:

$$w_1(x_i;t_i)dx_i = P\{x_i < f(t_i) \le x_i + dx_i\} \tag{1.5}$$

respectiv

$$w_1(x_i;n_i)dx_i = P\{x_i < x[n_i] \le x_i + dx_i\} \tag{1.5'}$$

Densitatea de repartiție sau probabilitate de ordinul întâi determină probabilitatea unei anumite valori a procesului aleator la un moment de timp dat, nespecificând însă nimic în legătură cu desfășurarea în timp a acestuia. În scopul cunoașterii mai amănunțite a unui proces aleator, se definesc funcții de repartiție și densități de repartiție de ordin superior.

În general, funcția de repartiție de ordinul N se definește cu relația :

$$F_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N\right)= \\ =P\left\{f\left(t_1\right)\le x_1;f\left(t_2\right)\le x_2;...;f\left(t_N\right)\le x_N\right\} \tag{1.6}$$

respectiv

$$F_N\left(x_1,...,x_N;n_1,...,n_N\right)= \\ =P\left\{x\left[n_1\right]\le x_1,x\left[n_2\right]\le x_2,...,x\left[n_N\right]\le x_N\right\} \tag{1.6'}$$

Densitatea de repartiție sau de probabilitate de ordinul N se definește cu relația:

$$w_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N\right)=\frac{\partial^N F_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N\right)}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_N} \tag{1.7}$$

respectiv

$$w_N\left(x_1,x_2,..,x_N;n_1,n_2,...n_N\right)=\frac{\partial F_N\left(x_1,x_2,...,x_N;n_1,n_2,...,n_N\right)}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_N} \tag{1.7'}$$

Reprezentarea geometrică intuitivă în acest caz este dată în figura 1.3.

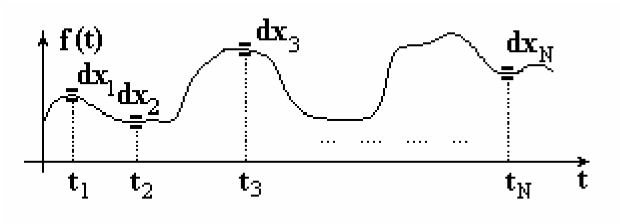


Fig. 1.3. Reprezentarea geometrică intuitivă a desfășurării în timp a procesului aleator

Expresia analitică sau reprezentarea grafică a densității de repartiție în raport cu variabilele $x_1,x_2,.....,x_N$ determină *legea de repartiție* a procesului aleator.

Astfel, legea de repartiție monodimensională normală sau gaussiană este de forma:

$$w_1(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - m)^2} \tag{1.8}$$

unde prin σ^2 s-a notat dispersia şi prin m valoarea medie a variabilei aleatoare.

Un proces aleator continuu în timp, cu valori complexe, $z(t)$, se defineşte ca fiind $z(t) = x(t) + jy(t)$, unde $x(t)$ şi $y(t)$ sunt procese aleatoare cu valori reale.

Densitatea de repartiție a variabilei aleatoare complexe $z(t_i)$, i=1,2,… N, a procesului este dată de densitatea de repartiție a componentelor $(x(t_i), y(t_i))$, $w_N(x_1, x_2, .., x_N, y_1, y_2, .., y_N; t_1, t_2, ...t_N)$.

Un proces aleator cu valori complexe se întâlneşte, de exemplu, la reprezentarea componentelor în fază şi cuadratură ale unui semnal trece jos echivalent unui semnal aleator sau zgomot de bandă îngustă [61].

Între densitățile de repartiție şi probabilități există o serie de analogii, care vor fi sintetizate în Tabelul 1.1, în cazul particular al densității de repartiție de ordinul doi.

Tabelul 1.1

Probabilități	Densități de repartiție (probabilitate)
$0 \le p(x_i \cap x_j) \le 1$	$w_2(x_i, x_j) \ge 0$
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i \cap x_j) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_i, x_j) dx_i dx_j = 1$
$p(x_i \cap x_j) = p(x_i) \cdot p(x_j / x_i) =$ $= p(x_j) \cdot p(x_i / x_j)$	$w_2(x_i, x_j) = w_1(x_i) \cdot w_2(x_j \vert x_i) =$ $w_1(x_j) \cdot w_2(x_i \vert x_j)$

$p(x_i)=\sum_{j=1}^{m} p(x_i \cap x_j)$	$w_1(x_i)=\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_i,x_j)dx_j$
$p(x_j)=\sum_{i=1}^{n} p(x_i \cap x_j)$	$w_1(x_j)=\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_i,x_j)dx_i$
$p(x_i \cap x_j)=p(x_i)\cdot p(x_j)$ în cazul evenimentelor independente	$w_2(x_i,x_j)=w_1(x_i)\cdot w_1(x_j)$ în cazul variabilelor aleatoare independente

Procesul aleator cu un număr finit de valori ale amplitudinii, se va numi *discret în amplitudine*. Considerând un moment de timp arbitrar, $t=t_1$, şi presupunând că procesul aleator are N realizări particulare, rezultă variabila aleatoare:

$$f(t_1)=\{x_{11},x_{12},...,x_{1i},...,x_{1N}\} \tag{1.9}$$

unde x_{1i} reprezintă valoarea realizării particulare $f^{(i)}(t)$ la momentul $t=t_1$. În mulţimea definită cu relaţia (1.9) se presupune că s-a realizat ordonarea $x_{11}\le x_{12}\le ...\le x_{1i}\le ...\le x_{1N}$.

Fie $p(x_{1i})$ probabilitatea ca realizarea particulară $f^{(i)}(t)$ la momentul $t=t_1$ să fie egal cu x_{1i}, adică:

$$p(x_{1i})=P\{f^{(i)}(t_1)=x_{1i}\} \tag{1.10}$$

Se presupune, de asemenea, adevărată relaţia:

$$\sum_{i=1}^{N} p(x_{1i})=1 \tag{1.11}$$

ceea ce, din punct de vedere fizic, înseamnă că la momentul $t=t_1$ cu certitudine procesul aleator discret în amplitudine va lua o valoare din mulţimea valorilor posibile. În acest caz, funcţia de repartiţie de ordinul întâi se defineşte cu relaţia:

$$F_1(x_1;t_1) = P\{f(t_1) \le x_1\} = \sum_{x_{1i} \le x_1} p(x_{1i}) \tag{1.12}$$

unde x_1 este un număr real, ales astfel încât:

$$x_1 \le \sum_{i=1}^{N} x_{1i} \tag{1.13}$$

Pentru a putea defini densitatea de repartiție de ordinul întâi, se presupune că

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} x_{1i}, (\forall) k = \overline{1, N} \tag{1.14}$$

Cu (1.14), relația (1.12) se poate scrie, echivalent, sub forma:

$$F_1(x_1;t_1) = \sum_{i=1}^{k} p(x_{1i}) u(x_1 - x_{1i}) \tag{1.15}$$

unde $u(x_1 - x_{1i})$ este treapta unitate.

Conform relației (1.4), densitatea de repartiție de ordinul întâi a procesului aleator discret în amplitudine se determină cu relația:

$$w_1(x_1;t_1) = \frac{\partial F_1(x_1;t_1)}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{k} p(x_{1i}) \delta(x_1 - x_{1i}) \tag{1.16}$$

unde $\delta(x_1 - x_{1i})$ este distribuția Dirac unidimensională.

Pentru a putea calcula funcția de repartiție şi densitatea de repartiție de ordinul doi a unui proces aleator discret în amplitudine, se consideră o altă variabilă aleatoare discretă, rezultată din acelaşi proces aleator discret în amplitudine, definită la momentul $t = t_2$, adică:

$$f(t_2) = \{x_{21}, x_{22}, ..., x_{2j}, ..., x_{2N}\} \tag{1.17}$$

$$x_{21} \le x_{22} \le ... \le x_{2j} \le .. \le .x_{2N} \tag{1.18}$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^{r} x_{2j}, (\forall) r = \overline{1,N} \tag{1.19}$$

Funcția de repartiție de ordinul doi a procesului aleator discret în amplitudine se defineşte atunci cu relația:

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) &= P\{f(t_1) \le x_1, f(t_2) \le x_2\} = \\ &= \sum_{x_{1i} \le x_1} \sum_{x_{2j} \le x_2} p(x_{1i} \cap x_{2j}; t_1, t_2) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Cu (1.14) şi (1.19) relația (1.20) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} p(x_{1i} \cap x_{2j}; t_1, t_2) u(x_1 - x_{1i}; x_2 - x_{2j}) \tag{1.21}$$

unde $u(x_1 - x_{1i}; x_2 - x_{2j})$ este treapta unitate bidimensională, iar

$$p(x_{1i} \cap x_{2j}; t_1, t_2) = P\{f^{(i)}(t_1) = x_{1i} \text{ şi } f^{(j)}(t_2) = x_{2j}\} \tag{1.22}$$

Cu (1.21) rezultă că densitatea de repartiție de ordinul doi a unui proces aleator discret în amplitudine se poate calcula cu relația:

$$\begin{aligned} w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} p(x_{1i} \cap x_{2j}; t_1, t_2) \delta(x_1 - x_{1i}; x_2 - x_{2i}) \end{aligned} \tag{1.23}$$

unde $\delta(x_1 - x_{1i}; x_2 - x_{2j})$ este distribuția Dirac bidimensională.

1.2. Valori medii statistice şi temporale ale procesului aleator, continuu în timp

Procesele aleatoare care modelează din punct de vedere matematic perturbațiile sau zgomotele în cazul unei transmisiuni, nu pot fi cunoscute în detaliu. Pentru caracterizarea lor se evaluează valori medii de diferite ordine.

Valorile medii de diferite ordine se pot calcula fie pe mulțimea realizărilor particulare la momente de timp alese arbitrar, $t_1, t_2, ..., t_n, ...,$ fie dintr-o singură realizare particulară $f^{(k)}(t)$. În primul caz, se spune că se obțin *valori medii statistice* (sau medii pe mulțimi), iar în al doilea caz, *valori medii temporale.*

Valorile medii statistice folosite frecvent în aplicații sunt:

1. *Valoarea medie* (momentul de ordinul întâi)

$$\overline{f(t_1)} = m_1\{f(t_1)\} = E\{f(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1;t_1)\,dx_1 \qquad (1.24)$$

2. *Valoarea pătratică medie* (momentul inițial de ordinul doi) definită în cazul variabilelor aleatoare complexe cu relația

$$\overline{\left|f^2(t_1)\right|} = m_1\left\{\left|f^2(t_1)\right|\right\} = E\left\{\left|f^2(t_1)\right|\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^2 w_1(x_1;t_1)\,dx_1 \qquad (1.25)$$

iar în cazul variabilelor aleatoare reale, cu relația

$$\overline{f^2(t_1)} = m_1\{f^2(t_1)\} = E\{f^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1;t_1)\,dx_1 \qquad (1.25')$$

3. *Funcția de autocorelație* (momentul inițial reunit de ordinul doi)

În cazul variabilelor aleatoare complexe

$$\begin{aligned} B_{ff} &= \overline{f(t_1)f^*(t_2)} = m_1\{f(t_1)f^*(t_2)\} = E\{f(t_1)f^*(t_2)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* w_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2 \end{aligned} \qquad (1.26)$$

În cazul variabilelor aleatoare reale

$$\begin{aligned} B_{ff} &= \overline{f(t_1)f(t_2)} = m_1\{f(t_1)f(t_2)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2 \end{aligned} \qquad (1.26')$$

În cazul proceselor aleatoare reale, discrete în amplitudine, funcția de autocorelație se obține înlocuind $w_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ din (1.23) în (1.26’). Ținând cont de proprietatea de filtrare a distribuției Dirac, rezultă:

$$B_{ff}(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}x_{1i}x_{2j}\,p\left(x_{1i}\cap x_{2j};t_1,t_2\right) \tag{1.27}$$

4. *Funcția de corelație* (momentul inițial mixt de ordinul doi) pentru variabile aleatoare complexe

$$\begin{aligned}B_{fg}(t_1,t_2)&=\overline{f(t_1)g^*(t_2)}=m_1\left\{f(t_1)g^*(t_2)\right\}=\\&=E\left\{f(t_1)g^*(t_2)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1y_2^*w_2(x_1,y_2;t_1,t_2)\,dx_1dy_2\end{aligned} \tag{1.28}$$

În cazul variabilelor aleatoare reale

$$\begin{aligned}B_{fg}(t_1,t_2)&=\overline{f(t_1)g(t_2)}=m_1\left\{f(t_1)g(t_2)\right\}=\\E\left\{f(t_1)g(t_2)\right\}&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1y_2w_2(x_1,y_2;t_1,t_2)\,dx_1dy_2\end{aligned} \tag{1.28'}$$

unde $f(t_1)$ şi $g(t_2)$ sunt variabile aleatoare obținute din procesele aleatoare *f*(*t*) şi *g*(*t*) la momentele $t=t_1$, respectiv $t=t_2$, iar x_1 şi y_2 valori din domeniul posibil al acestor variabile aleatoare.

5. *Dispersia* (moment centrat de ordinul doi) pentru variabile aleatoare complexe

$$\sigma^2(t_1)=\overline{\left|f(t_1)-\overline{f(t_1)}\right|^2}=\overline{\left(f(t_1)-\overline{f(t_1)}\right)\left(f(t_1)-\overline{f(t_1)}\right)^*}=$$

$$\overline{\left(f(t_1)-\overline{f(t_1)}\right)\left(f^*(t_1)-\overline{f(t_1)}^*\right)}=$$

$$\overline{f(t_1)f^*(t_1)-f(t_1)\overline{f(t_1)}^*-\overline{f(t_1)}f^*(t_1)+\overline{f(t_1)}\,\overline{f(t_1)}^*}=$$

$$\overline{\left|f(t_1)\right|^2-\left(f_R(t_1)+jf_I(t_1)\right)\left(\overline{f_R(t_1)}-j\overline{f_I(t_1)}\right)-}$$

$$\overline{-\left(\overline{f_R(t_1)}+j\overline{f_I(t_1)}\right)\left(f_R(t_1)-jf_I(t_1)\right)+\left|\overline{f(t_1)}\right|^2}=$$

$$\overline{\left|f\left(t_1\right)\right|^2-2\left(f_R\left(t_1\right)\overline{f_R\left(t_1\right)}+f_I\left(t_1\right)\overline{f_I\left(t_1\right)}\right)+\left|\overline{f\left(t_1\right)}\right|^2}=$$

$$\overline{\left|f\left(t_1\right)\right|^2}-2\left[\left(\overline{f_R\left(t_1\right)}\right)^2+\left(\overline{f_I\left(t_1\right)}\right)^2\right]+\left|\overline{f\left(t_1\right)}\right|^2=\overline{\left|f\left(t_1\right)\right|^2}-\left|\overline{f\left(t_1\right)}\right|^2 \quad (1.29)$$

unde cu f_R şi f_I s-a notat partea reală, respectiv imaginară, a variabilei aleatoare.

În cazul variabilelor aleatoare reale

$$\begin{aligned}\sigma^2\left(t_1\right)&=\overline{\left[f\left(t_1\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\right]^2}=\overline{f^2\left(t_1\right)-2f\left(t_1\right)\overline{f\left(t_1\right)}+\left[\overline{f\left(t_1\right)}\right]^2}=\\&=\overline{f^2\left(t_1\right)}-\left[\overline{f\left(t_1\right)}\right]^2\end{aligned} \quad (1.29')$$

6. *Funcţia de autovarianţă* pentru variabile aleatoare complexe

$$\begin{aligned}K_{ff}\left(t_1,t_2\right)&=\overline{\left[f\left(t_1\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\right]\left[f\left(t_2\right)-\overline{f\left(t_2\right)}\right]^*}=\\&=B_{ff}\left(t_1,t_2\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\cdot\overline{f^*\left(t_2\right)}\end{aligned} \quad (1.30)$$

În cazul variabilelor aleatoare reale

$$\begin{aligned}K_{ff}\left(t_1,t_2\right)&=\overline{\left[f\left(t_1\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\right]\left[f\left(t_2\right)-\overline{f\left(t_2\right)}\right]}=\\&=B_{ff}\left(t_1,t_2\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\cdot\overline{f\left(t_2\right)}\end{aligned} \quad (1.30')$$

7. *Funcţia de covarianţă* pentru variabile aleatoare complexe

$$\begin{aligned}K_{fg}\left(t_1,t_2\right)&=\overline{\left[f\left(t_1\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\right]\left[g\left(t_2\right)-\overline{g\left(t_2\right)}\right]^*}=\\&=B_{fg}\left(t_1,t_2\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\cdot\overline{g^*\left(t_2\right)}\end{aligned} \quad (1.31)$$

În cazul variabilelor aleatoare reale

$$\begin{aligned}K_{fg}\left(t_1,t_2\right)&=\overline{\left[f\left(t_1\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\right]\left[g\left(t_2\right)-\overline{g\left(t_2\right)}\right]}=\\&=B_{fg}\left(t_1,t_2\right)-\overline{f\left(t_1\right)}\cdot\overline{g\left(t_2\right)}\end{aligned} \quad (1.31')$$

Valorile medii temporale folosite frecvent în aplicații sunt:

1. *Valoarea medie temporală*

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t)\,dt\right] \tag{1.32}$$

Din (1.32), se constată că această valoare medie determină componenta continuă a realizării particulare respective. Se poate arăta ușor că valoarea medie temporală nu depinde de originea timpului.

Într-adevăr:

$$\overline{f^{(k)}(t_0+t)} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t_0+t)\,dt\right] \tag{1.33}$$

Efectuând schimbarea de variabilă

$$t_0 + t = t' \ ; dt = dt' \tag{1.34}$$

rezultă:

$$\overline{f^{(k)}(t_0+t)} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} f^{(k)}(t')\,dt'\right] = \overline{f^{(k)}(t)} \tag{1.35}$$

2. *Valoarea pătratică medie temporală*

$$\overline{\left[f^{(k)}(t)\right]^2} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f^{(k)}(t)\right]^2 dt\right] \tag{1.36}$$

În mod analog, se poate demonstra că această mărime medie temporală nu depinde de originea timpului.

3. *Funcția de autocorelație temporală*

$$R_{ff}(t_1,t_2) = \overline{f^{(k)}(t_1+t)\, f^{(k)}(t_2+t)} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t_1+t)\, f^{(k)}(t_2+t)\,dt\right] \tag{1.37}$$

Se poate demonstra că:

$$R_{ff}(t_1,t_2) = R_{ff}(t_1-t_2) = R_{ff}(t_2-t_1) \tag{1.38}$$

sau, dacă se notează:

$$t_2 - t_1 = \tau \tag{1.39}$$

rezultă:

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau) \tag{1.40}$$

adică, funcția de autocorelație temporală este o funcție pară.
Într-adevăr, efectuând schimbarea de variabilă:

$$t_1 + t = t';\, dt = dt' \tag{1.41}$$

în (1.37), rezultă:

$$R_{ff}(t_1,t_2) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{t_1-\frac{T}{2}}^{t_1+\frac{T}{2}} f^{(k)}(t')\, f^{(k)}(t_2+t'-t_1)\,dt'\right] = R_{ff}(t_2-t_1) \tag{1.42}$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$t_2 + t = t'';\, dt = dt'' \tag{1.43}$$

în aceeaşi relație (1.37), rezultă:

$$R_{ff}(t_1,t_2) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{t_2-\frac{T}{2}}^{t_2+\frac{T}{2}} f^{(k)}(t'')\, f^{(k)}(t_1+t''-t_2)\,dt''\right] = \tag{1.44}$$

$$= R_{ff}(t_1-t_2)$$

Din (1.42) şi (1.44) rezultă (1.38).

4. *Funcţia de corelaţie temporală*

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt\right] \qquad (1.45)$$

Dacă în relaţia (1.45) se face schimbarea de variabilă (1.41), rezultă:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{t_1-\frac{T}{2}}^{t_1+\frac{T}{2}} f^{(k)}(t')g^{(k)}(t_2 + t' - t_1)dt'\right] = R_{fg}(t_2 - t_1) \qquad (1.46)$$

Dacă însă în relaţia (1.45) se face schimbarea de variabilă (1.43), rezultă:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^{(k)}(t'')f^{(k)}(t_1 + t'' - t_2)dt''\right] =$$
$$= R_{gf}(t_1 - t_2) \qquad (1.47)$$

Comparând (1.46) cu (1.47), rezultă:

$$R_{fg}(t_2 - t_1) = R_{gf}(t_1 - t_2) \qquad (1.48)$$

sau cu notaţia (1.39):

$$R_{fg}(\tau) = R_{gf}(-\tau) \qquad (1.49)$$

5. *Dispersia temporală*

$$\sigma^2 = \overline{\left[f^{(k)}(t)\right]^2} - \left[\overline{f^{(k)}(t)}\right]^2 \qquad (1.50)$$

1.3. Procese aleatoare continue în timp, staționare

Procesele aleatoare ale căror proprietăți statistice sunt invariante la schimbarea arbitrară a originii timpului se numesc *staționare.* Rezultă, deci, că pentru procesele aleatoare staționare se poate scrie relația:

$$\begin{aligned} & w_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N\right)= \\ & =w_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1+\tau,t_2+\tau,...,t_N+\tau\right) \end{aligned} \tag{1.51}$$

Dacă în relația (1.51) se înlocuieşte $\tau=-t_1$, se poate scrie echivalent:

$$\begin{aligned} & w_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N\right)= \\ & =w_N\left(x_1,x_2,...,x_N;t_2-t_1,...,t_N-t_1\right) \end{aligned} \tag{1.52}$$

Procesele aleatoare pentru care sunt adevărate relațiile (1.51) sau (1.52) se numesc *staționare în sens strict.*

Pentru n=1, relația (1.52) devine:

$$w_1\left(x_1;t_1\right)=w_1\left(x_1\right) \tag{1.53}$$

adică densitatea de repartiție de ordinul întâi nu depinde de timp.

Pentru n=2, relația (1.52) devine:

$$w_2\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=w_2\left(x_1,x_2;t_2-t_1\right) \tag{1.54}$$

În aceste condiții, valoarea medie statistică, valoarea pătratică medie statistică si dispersia sunt constante.

Într-adevăr, ținând cont de (1.53), relația (1.24') devine:

$$\overline{f\left(t_1\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}x_1w_1\left(x_1\right)dx_1=\mathrm{a}=\mathrm{const.} \tag{1.55}$$

iar din relația (1.25'), se obține:

$$\overline{f^2\left(t_1\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}{x_1}^2w_1\left(x_1\right)dx_1=\mathrm{b}=\mathrm{const.} \tag{1.56}$$

Cu (1.55) şi (1.56), relația (1.29') devine:

$$\sigma^2\left(t_1\right) = \mathrm{b} - \mathrm{a}^2 = \mathrm{const.} \tag{1.57}$$

Dacă în relația (1.26') se ține cont de (1.54), rezultă:

$$B_{ff}\left(t_1, t_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2\left(x_1, x_2; t_2 - t_1\right) dx_1 dx_2 = B_{ff}\left(t_2 - t_1\right) \tag{1.58}$$

În mod analog, se poate arăta că şi funcțiile de corelație, autovarianță şi covarianță depind numai de diferența de timp $t_2 - t_1$.

Procesele aleatoare care sunt staționare până la ordinul doi, adică pentru care sunt satisfăcute relațiile (1.53) şi (1.54), se numesc *staționare în sens larg.*

Evident, procesele aleatoare staționare în sens strict sunt staționare şi în sens larg, reciproca nefiind totdeauna adevărată.

Procesele aleatoare staționare în sens strict sau larg, aşa cum au fost definite mai sus, sunt idealizări, deoarece, practic, nici un semnal nu poate fi urmărit de la $t = -\infty$ la $t = \infty$. În realitate, semnalele sunt observate un timp finit *T*. Dacă pe acest interval proprietățile care caracterizează staționaritatea se mențin în limitele unei bune aproximări, ele se consideră staționare pe intervalul respectiv.

O categorie foarte largă de procese aleatoare staționare se bucură de proprietatea de *ergodicitate*, a cărei esență constă în aceea că valorile medii statistice sunt egale cu valorile medii temporale corespunzătoare. Deoarece valoarea medie, valoarea pătratică medie şi dispersia temporală sunt constante, iar funcțiile de autocorelație, corelație, autovarianță şi covarianță temporale depind numai de diferențele dintre momentele t_1 şi t_2, pentru ca aceste valori medii temporale să fie egale cu valorile medii statistice corespunzătoare este necesar să fie îndeplinite relațiile (1.53) şi (1.54), adică procesele aleatoare trebuie să fie staționare în sens larg.

Ipoteza ergodicității este foarte importantă în practică, deoarece teoria statistică matematică operează cu valori medii statistice, în timp ce, practic, se pot calcula numai valorile medii temporale, dispunându-se de o singură realizare particulară a procesului aleator ce modelează un zgomot sau o perturbație. Egalitatea dintre valorile medii statistice şi valorile medii temporale corespondente trebuie înțeleasă în sensul convergenței în probabilitate. Astfel, egalitatea:

$$\overline{f(t_1)} = \widetilde{\left[f^{(k)}(t) \right]} \tag{1.59}$$

înseamnă:

$$\lim_{T \to \infty} P\left\{ \left| \overline{f(t_1)} - \widetilde{\left[f_T^{(k)}(t) \right]} \right| < \varepsilon \right\} = 1 \tag{1.60}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, arbitrar de mic.

În relația (1.60), prin $\widetilde{f_T^{(k)}(t)}$ s-a notat valoarea medie temporală a realizării particulare trunchiate, adică:

$$f_T^{(k)}(t) = \begin{cases} f^{(k)}(t), \text{pentru } |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0, \qquad \text{pentru } |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases} \tag{1.61}$$

1.4. Determinarea tensiunii de prag în cazul recepției pe canale perturbate

Problema determinării tensiunii de prag se pune în cazul în care trebuie stabilit un nivel de prag, astfel încât atunci când semnalul recepţionat este sub nivelul de prag, să se decidă că s-a recepţionat numai zgomot, iar la recepţionarea unui semnal care depăşeşte nivelul de prag, să se decidă că în semnalul recepţionat este şi semnal util. În acest caz, fie se va lua o decizie, fie semnalul recepţionat va trebui prelucrat adecvat în scopul extragerii semnalului purtător de informaţie cu un grad de fidelitate impus.

Pentru fixarea ideilor, se presupune că zgomotul de pe canalul de transmisiuni este reprezentat de o tensiune fluctuantă (aleatoare), modelată matematic de un proces aleator staţionar şi ergodic. Fie $u^{(k)}(t)$ o realizare particulară a tensiunii de zgomot fluctuante, aşa cum este reprezentată în figura 1.4.

Fig. 1.4. Tensiunea fluctuantă de pe canalul de transmisiuni

Datorită ipotezei de ergodicitate, se consideră că valoarea medie statistică este egală cu valoarea medie temporală.

Pătratul valorii efective, U_{ef}^2, a componentei alternative a tensiunii fluctuante se determină cu relaţia:

$$U_{ef}^2 = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[u^{(k)}(t)-\overline{u}\right]^2 dt\right] \tag{1.62}$$

Deoarece:

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(u^{(k)}(t)\right)^2 dt\right] = \overline{u^2(t)} \tag{1.63}$$

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^{(k)}(t)\,dt\right]=\overline{u(t)} \tag{1.64}$$

relația (1.62) devine:

$$U_{ef}^2=\overline{u^2(t)}-\left[\overline{u(t)}\right]^2 \tag{1.65}$$

Comparând relațiile (1.29') cu (1.65) rezultă că pătratul valorii efective a componentei alternative a tensiunii fluctuante este egal cu dispersia, adică:

$$\sigma^2(t_1)=U_{ef}^2 \tag{1.66}$$

Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni, reprezentat de tensiunea fluctuantă, este repartizat după o lege normală monodimensională, conform relației (1.8), se poate scrie:

$$w_1(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(u-\overline{u})^2}{U_{ef}^2}} \tag{1.67}$$

Pe de altă parte, conform relației (1.5), se poate scrie:

$$w_1(u)\,du=P\{u<u_i\le u+du\} \tag{1.68}$$

unde $u_i=u(t_i)$.

Probabilitatea ca tensiunea fluctuantă să fie între pragurile u_1 și u_2 se poate calcula atunci cu relația:

$$P\{u_1<u\le u_2\}=\int_{u_1}^{u_2} w_1(u)\,du=\int_{-\infty}^{u_2} w_1(u)\,du-\int_{-\infty}^{u_1} w_1(u)\,du,\ u_2>u_1 \tag{1.69}$$

Înlocuind (1.67) în (1.69), rezultă:

$$P\{u_1<u\le u_2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}}\int_{-\infty}^{u_2} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(u-\overline{u})^2}{U_{ef}^2}}du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}}\int_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(u-\overline{u})}{U_{ef}^2}}du \tag{1.70}$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\frac{u-\overline{u}}{U_{ef}}=v,\ du=U_{ef}dv \tag{1.71}$$

rezultă:

$$P\left\{\frac{u_1-\overline{u}}{U_{ef}}<v\leq\frac{u_2-\overline{u}}{U_{ef}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{u_2-\overline{u}}{U_{ef}}}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{u_1-\overline{u}}{U_{ef}}}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv \tag{1.72}$$

Cele două integrale din relația (1.72) nu pot fi exprimate prin funcții elementare, în schimb este tabelată *integrala sau funcția Laplace*, de forma:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv \tag{1.73}$$

a cărei reprezentare grafică este dată în figura 1.5.

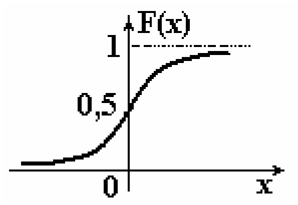


Fig.1.5. Reprezentarea grafică a funcției Laplace

Funcția Laplace, $\mathrm{F}(x)$, se bucură de următoarele proprietăți:

$$\left.\begin{aligned}&F(-\infty)=0\\&F(0)=0{,}5\\&F(\infty)=1\\&F(-x)=1-F(x)\end{aligned}\right\} \tag{1.74}$$

Cu (1.73), relația (1.72) devine:

$$P\left\{\frac{u_1-\overline{u}}{U_{ef}}<v\leq\frac{u_2-\overline{u}}{U_{ef}}\right\}=F\left(\frac{u_2-\overline{u}}{U_{ef}}\right)-F\left(\frac{u_1-\overline{u}}{U_{ef}}\right) \tag{1.75}$$

Impunându-se condiția determinării probabilității de depăşire a unei tensiuni de prag U_p, în relația (1.75) trebuie înlocuit $u_1 = U_p$ şi $u_2 = \infty$, rezultând:

$$P\left\{v > \frac{U_p - \overline{u}}{U_{ef}}\right\} = F(\infty) - F\left(\frac{U_p - \overline{u}}{U_{ef}}\right) \tag{1.76}$$

Considerând, în continuare, că tensiunea fluctuantă ce reprezintă zgomotul de pe canalul de transmisiuni are componentă continuă nulă $(\overline{u} = 0)$, rezultă:

$$P\left\{u > U_p\right\} = 1 - F\left(\frac{U_p}{U_{ef}}\right) \tag{1.77}$$

Dacă $U_p / U_{ef} \approx 3$, consultând tabelul cu valorile integralei Laplace, rezultă că F(3)≈0,999 , ceea ce înseamnă:

$$P\left\{u > 3U_{ef}\right\} \approx 0 \tag{1.78}$$

Din relația (1.78) rezultă că în condițiile menționate mai sus (zgomot repartizat normal cu valoare medie nulă), probabilitatea ca zgomotul să depăşească tensiunea de prag, $U_p = 3U_{ef}$, este practic nulă şi deci, alegând un astfel de prag, dacă semnalul recepționat îl depăşeşte, se decide că în semnalul recepționat, pe lângă zgomot, există şi semnal util.

1.5. Teorema Wiener-Khintcine

Fie $f^k(t)$ o realizare particulară a unui proces aleator continuu în timp. De obicei:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f^{(k)}(t) \right| dt \to \infty \tag{1.79}$$

motiv pentru care transformata Fourier şi, deci, analiza armonică clasică nu poate fi utilizată. Pentru a se putea aplica şi în acest caz transformata Fourier, realizarea particulară a procesului aleator se trunchiază. Notând cu $f_T^{(k)}(t)$ realizarea particulară trunchiată, aceasta este definită cu relația:

$$f_T^{(k)} = \begin{cases} f^{(k)}(t), |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0, |t| \geq \dfrac{T}{2} \end{cases} \tag{1.80}$$

Intervalul de trunchiere, T, se alege astfel încât realizarea trunchiată să admită transformată Fourier. Notând cu $F_T^{(k)}(j\omega)$ transformata Fourier a realizării particulare trunchiate şi ținând cont de (1.80), se poate scrie:

$$F_T^{(k)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T^{(k)}(t) e^{-j\omega} dt = \int_{-T/2}^{T/2} f_T^{(k)}(t) e^{-j\omega} dt \tag{1.81}$$

respectiv, transformata inversă:

$$f_T^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^{(k)}(j\omega) e^{j\omega} d\omega \tag{1.82}$$

Dacă se notează cu $P_T^{(k)}$ şi $E_T^{(k)}$ puterea, respectiv energia realizării particulare trunchiate, se poate scrie:

$$P_T^{(k)} = \frac{E_T^{(k)}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f_T^{(k)}(t) \right]^2 dt \tag{1.83}$$

Ținând cont de (1.80) şi(1.82), rezultă:

$$P_T^{(k)}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T^{(k)}(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^{(k)}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt =$$

$$\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} F_T^{(k)}(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f_T^{(k)}(t)e^{j\omega t}dt d\omega = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_T^{(k)}(j\omega)\right|^2 d\omega \quad (1.84)$$

Mărimea

$$\frac{\left|F_T^{(k)}(j\omega)\right|^2}{T} \overset{not.}{=} S_{ff_T}^{(k)}(j\omega) \quad (1.85)$$

poartă denumirea de *densitatea spectrală de putere* a realizării particulare trunchiate. Din (1.85) rezultă că această mărime este o funcție reală, deci va conține numai puteri pare ale lui $j\omega$. Cu notația (1.85), puterea realizării particulare trunchiate se poate scrie sub forma:

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff_T}^{(k)}(j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_{ff_T}^{(k)}(j\omega)d\omega \quad (1.86)$$

Considerând, în continuare, mulțimea realizărilor particulare şi notând cu $S_{ff_T}(j\omega)$ densitatea spectrală de putere a procesului aleator trunchiat, rezultă:

$$S_{ff_T}(j\omega) = m_1\left\{S_{ff_T}^{(k)}(j\omega)\right\} = m_1\left\{\frac{\left|F_T^{(k)}(j\omega)\right|^2}{T}\right\} =$$

$$\frac{1}{T}m_1\left\{F_T^{(k)}(j\omega)F_T^{(k)}(-j\omega)\right\} =$$

$$\frac{1}{T}m_1\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T^{(k)}(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T^{(k)}(t_2)e^{j\omega t_2}dt_2\right\} =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m_1\left\{f_T^{(k)}(t_1)f_T^{(k)}(t_2)\right\}e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \quad (1.87)$$

Pe de altă parte

$$m_1\left\{f_T^{(k)}(t_1)f_T^{(k)}(t_2)\right\}=B_{ff_T}(t_1,t_2) \qquad (1.88)$$

reprezintă funcția de autocorelație a procesului aleator trunchiat. Dacă se presupune că procesul aleator este staționar în sens larg, se poate scrie:

$$B_{ff_T}(t_1,t_2)=B_{ff_T}(t_1-t_2) \qquad (1.89)$$

Ținând cont de (1.88) şi(1.89), relația (1.87) devine:

$$S_{ff_T}(j\omega)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}B_{ff_T}(t_1-t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \qquad (1.90)$$

Integrala dublă din (1.90) reprezintă volumul cuprins între suprafața

$$\phi(t_1-t_2)=B_{ff_T}(t_1-t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)} \qquad (1.91)$$

şi pătratul cu latura T (Fig.1.6).

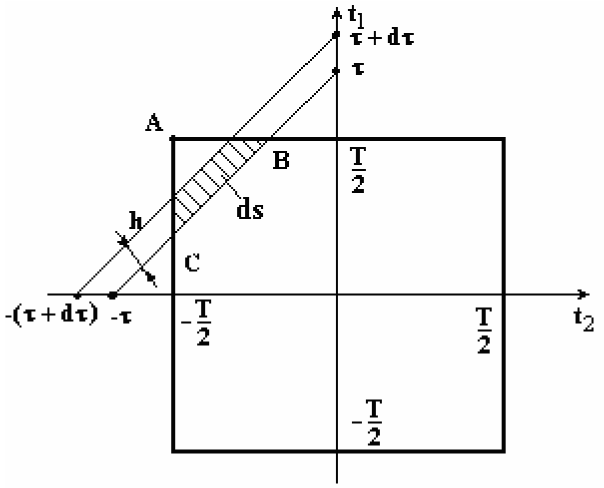


Fig. 1.6.

Această integrală dublă poate fi transformată într-o integrală simplă, dacă se face observația că pentru

$$\tau = t_1 - t_2 = const. \tag{1.92}$$

funcția $\phi(\tau)$ este constantă pe dreapta de pantă unu:

$$t_1 = t_2 + \tau \tag{1.93}$$

Conform figurii, se poate scrie succesiv:

$$ds = BC \cdot h$$

$$h = \frac{d\tau}{\sqrt{2}}$$

$$BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}\left[\frac{T}{2} - \left(\tau - \frac{T}{2}\right)\right] = \sqrt{2}(T - \tau)$$

Deoarece τ poate lua şi valori negative, rezultă:

$$BC = \sqrt{2}(T - |\tau|) \tag{1.94}$$

Rezultă atunci că $ds = (T - |\tau|)d\tau$.

Cu (1.92) şi(1.94), relația (1.90) devine:

$$\begin{aligned} S_{ff_T}(j\omega) &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} B_{ff_T}(\tau)e^{-j\omega\tau}(T - |\tau|)d\tau = \\ &= \int_{-T}^{T} B_{ff_T}(\tau)e^{-j\omega\tau}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)d\tau \end{aligned} \tag{1.95}$$

La limită, când $T \to \infty$,

$$\lim_{T\to\infty}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) = 1 \tag{1.96}$$

şi procesul aleator trunchiat devine netrunchiat. În aceste condiții, densitatea spectrală de putere a procesului trunchiat, $S_{ff_T}(j\omega)$, devine densitatea spectrală de putere a procesului netrunchiat, $S_{ff}(j\omega)$, iar funcția de autocorelație a procesului aleator trunchiat, $B_{ff_T}(\tau)$, devine funcția de autocorelație a procesului aleator netrunchiat, $B_{ff}(\tau)$. Cu aceste observații, atunci când $T \to \infty$, relația (1.95) se poate scrie sub forma:

$$S_{ff}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (1.97)$$

Din (1.97) rezultă că în cazul proceselor aleatoare staționare în sens larg, densitatea spectrală de putere a procesului este transformata Fourier a funcției de autocorelație a acestuia.

Transformata Fourier inversă este:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \qquad (1.98)$$

Relațiile (1.97) şi (1.98), care arată că densitatea spectrală de putere şi funcția de autocorelație ale unui proces aleator, staționar în sens larg, sunt perechi Fourier, sunt cunoscute sub numele de *teorema Wiener-Khintcine*.

În mod similar se poate demonstra că în cazul proceselor aleatoare staționare în sens larg transformata Fourier a funcției de corelație determină *densitatea spectrală de putere de interacțiune*, adică $S_{fg}(j\omega) = F\{B_{fg}(\tau)\}$.

Conform relației (1.86), rezultă că puterea unui proces aleator, staționar în sens larg, se poate calcula cu relația:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S_{ff}(j\omega) d\omega \qquad (1.99)$$

deoarece densitatea spectrală de putere $S_{ff}(j\omega)$ este o funcție pară în ω.

Un caz particular interesant, frecvent întâlnit în aplicații, îl reprezintă zgomotul alb, care este caracterizat de o densitate spectrală de putere constantă, S_0, în toată banda de frecvențe

$-\infty < \omega < \infty$. În cazul zgomotului alb, conform relației (1.98), se poate scrie

$$B_{ff}(\tau) = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = S_0\delta(\tau) \tag{1.100}$$

unde $\delta(\tau)$ este distribuția Dirac.

Din punct de vedere fizic, funcția de autocorelație măsoară dependența statistică dintre eşantioanele prelevate dintr-un proces aleator. Deoarece $\delta(\tau) = 0$ pentru $\tau \neq 0$, din (1.100) rezultă că $B_{ff}(\tau) \neq 0$ numai pentru $\tau = 0$, ceea ce semnifică faptul că, în cazul unui proces aleator de tipul zgomotului alb, eşantioanele prelevate sunt statistic independente, oricât de apropiate ar fi între ele.

1.6. Proprietățile principale ale funcției de autocorelație

Relația (1.98) poate fi scrisă echivalent, sub forma:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega)(\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau)d\tau \tag{1.101}$$

Dacă atât $B_{ff}(\tau)$ cât şi $S_{ff}(j\omega)$ sunt funcții reale, din (1.101) rezultă:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega)(\cos\omega\tau)d\omega \tag{1.102}$$

Relația (1.102) specifică prima proprietate a funcției de autocorelație a unui proces aleator, staționar în sens larg, şi anume că este o funcție pară:

$$B_{ff}(\tau) = B_{ff}(-\tau) \tag{1.103}$$

Dacă $B_{ff}(\tau)$ este o funcție complexă, iar $S_{ff}(j\omega)$ una reală, se poate arăta că

$$B_{ff}(\tau) = B_{ff}^{*}(-\tau) \tag{1.103'}$$

Într-adevăr, exprimând $B_{ff}(\tau)$ şi $B_{ff}^{*}(-\tau)$ în funcție de densitatea spectrală de putere, se obține

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \tag{1.104}$$

şi

$$\begin{aligned} B_{ff}^{*}(-\tau) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega)e^{j\omega(-\tau)}d\omega\right)^{*} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}^{*}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \end{aligned} \tag{1.105}$$

deoarece densitatea spectrală de putere este o funcție reală.

Pentru a deduce a doua proprietate a funcției de autocorelație, se consideră un proces aleator, staționar în sens larg, şi două variabile aleatoare $f(t_1)$ şi $f(t_1+\tau)$. Conform relației (1.26'), rezultă:

$$B_{ff}(\tau) = \overline{f(t_1)f(t_1+\tau)} \tag{1.106}$$

Dacă $\tau \to \infty$, cele două variabile aleatoare $f(t_1)$, respectiv $f(t_1+\tau)$, prelevate din procesul aleator $f(t)$, devin statistic independente şi, deci, se poate scrie relația:

$$B_{ff}(\infty) = \overline{f(t_1)} \cdot \overline{f(t_1+\infty)} = a \cdot a = a^2 = const. \tag{1.107}$$

unde prin a s-a notat valoarea medie statistică.

Cu alte cuvinte, când $\tau \to \infty$, funcția de autocorelație a procesului aleator, staționar în sens larg, tinde asimptotic la o constantă (în particular la zero) fie aperiodic, fie periodic amortizat, aşa cum este reprezentat în figura 1.7.

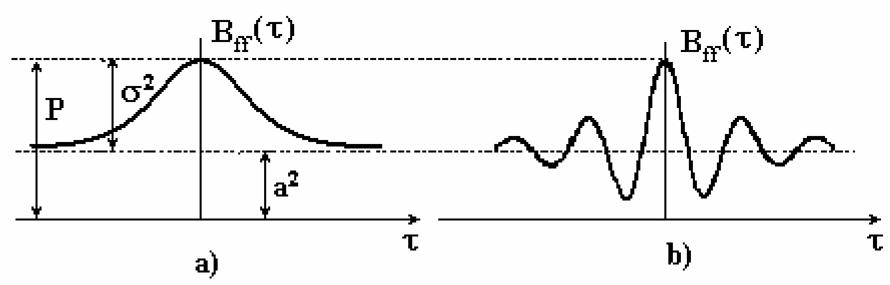


Fig 1.7. Reprezentarea grafică a funcției de autocorelație ce tinde aperiodic la a^2, a), respectiv periodic amortizat, b).

Deoarece funcția de autocorelație reprezintă o măsură a dependenței statistice între variabilele aleatoare $f(t_1)$ şi $f(t_1+\tau)$, rezultă intuitiv că pentru $\tau=0$ dependența statistică este cea mai puternică, adică $B_{ff}(0)$ este valoarea maximă a funcției de autocorelație. Acest lucru se poate demonstra riguros, adică:

$$B_{ff}(0) \geq |B_{ff}(\tau)| \qquad (1.108)$$

care reprezintă a treia proprietate a funcției de autocorelație.

Într-adevăr, plecându-se de la inegalitatea evidentă:

$$\left[\overline{f(t_1) \pm f(t_1+\tau)}\right]^2 \geq 0 \qquad (1.109)$$

rezultă succesiv:

$$\overline{f^2(t_1)} \pm 2\overline{f(t_1)f(t_1+\tau)} + \overline{f^2(t_1+\tau)} \geq 0 \qquad (1.110)$$

Dar

$$\overline{f^2(t_1)} = \overline{f(t_1)f(t_1)} = B_{ff}(0) \qquad (1.111)$$

$$\overline{f(t_1)f(t_1+\tau)} = B_{ff}(t_1+\tau-t_1) = B_{ff}(\tau) \qquad (1.112)$$

$$\overline{f^2(t_1+\tau)} = \overline{f(t_1+\tau)f(t_1+\tau)} = B_{ff}(0) \qquad (1.113)$$

Cu (1.111), (1.112) şi (1.113), relația (1.110) devine:

$$B_{ff}(0) \pm B_{ff}(\tau) \geq 0 \tag{1.114}$$

care este echivalentă cu relația (1.108), ce trebuia demonstrată.

Pentru a pune în evidență a patra proprietate a funcției de autocorelație, se pleacă de la relația (1.98), care se particularizează pentru $\tau = 0$ şi se ține cont de (1.99), rezultând:

$$B_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) d\omega = P \tag{1.115}$$

Relația (1.115) evidențiază faptul că valoarea funcției de autocorelație în origine este egală cu puterea procesului aleator, staționar în sens larg.

În fine, a cincea proprietate a funcției de autocorelație se deduce din (1.29), (1.107) şi (1.111), adică:

$$\sigma^2(t_1) = B_{ff}(0) - B(\infty) \tag{1.116}$$

Cele cinci proprietăți ale funcției de autocorelație sunt puse în evidență în figura 1.7 a,b.

Fie, în continuare, două procese aleatoare, staționare în sens larg, notate cu $f(t)$, respectiv $g(t)$. Fie, de asemenea, două variabile aleatoare $f(t_1)$ şi $g(t_1 + \tau)$.

Se pot scrie următoarele relații:

$$\overline{f(t_1) g(t_1 + \tau)} = B_{fg}(t_1 + \tau - t_1) = B_{fg}(\tau) \tag{1.117}$$

$$\overline{g(t_1 + \tau) f(t_1)} = B_{gf}\left[t_1 - (t_1 + \tau)\right] = B_{gf}(-\tau) \tag{1.118}$$

Deoarece

$$\overline{f(t_1) g(t_1 + \tau)} = \overline{g(t_1 + \tau) f(t_1)} \tag{1.119}$$

din (1.117) şi (1.118) rezultă că în cazul o două procese aleatoare, staționare în sens larg, este adevărată relația:

$$B_{fg}(\tau)=B_{gf}(-\tau) \tag{1.120}$$

Din relația (1.120) rezultă că funcția de corelație nu mai este o funcție pară în τ, așa cum este funcția de autocorelație. În general, funcția de corelație nu se bucură de cele cinci proprietăți ale funcției de autocorelație.

1.7. Determinarea funcției de autocorelație a semnalelor recepționate, afectate de perturbații

Se presupune că se transmite semnalul $s(t)$, purtător de informație pe un canal perturbat de zgomot, modelat matematic de un proces aleator $n(t)$, staționar în sens larg. Deoarece, în general, perturbațiile care apar pe canalul de transmisiuni au un caracter aditiv, semnalul recepționat $r(t)$ va fi de forma

$$r(t)=s(t)+n(t) \tag{1.121}$$

Funcția de autocorelație a semnalului recepționat se determină cu relația

$$B_{rr}(\tau)=\overline{r(t)r(t+\tau)} \tag{1.122}$$

Înlocuind (1.121) în (1.122), rezultă

$$\begin{aligned} B_{rr}(\tau) &= \overline{[s(t)+n(t)][s(t+\tau)+n(t+\tau)]}= \\ &= B_{ss}(\tau)+B_{sn}(\tau)+B_{ns}(\tau)+B_{nn}(\tau) \end{aligned} \tag{1.123}$$

unde

$$\begin{aligned} B_{ss}(\tau) &= \overline{s(t)s(t+\tau)} \\ B_{sn}(\tau) &= \overline{s(t)n(t+\tau)} \\ B_{ns}(\tau) &= \overline{n(t)s(t+\tau)} \\ B_{nn}(\tau) &= \overline{n(t)n(t+\tau)} \end{aligned} \tag{1.124}$$

Zgomotul de pe canalul de transmisiuni este statistic independent de semnalul util, deoarece acesta apare fie că pe canal se transmite semnal util, fie că nu se transmite. Considerând, de asemenea, că procesul aleator staționar în sens larg, ce descrie zgomotul de pe canal are valoare medie statistică nulă, adică

$$\overline{n(t)} = 0 \tag{1.125}$$

rezultă

$$\begin{aligned} B_{sn}(\tau) &= \overline{s(t)} \cdot \overline{n(t+\tau)} = s(t)0 = 0 \\ B_{ns}(\tau) &= \overline{n(t)} \cdot \overline{s(t+\tau)} = 0s(t+\tau) = 0 \end{aligned} \tag{1.126}$$

Cu (1.126), relația (1.123) devine

$$B_{rr}(\tau) = B_{ss}(\tau) + B_{nn}(\tau) \tag{1.127}$$

Se consideră, în continuare, că semnalul util, purtător de informație este de forma

$$s(t) = A\cos\omega t \tag{1.128}$$

Rezultă atunci:

$$B_{ss}(\tau) = R_{ss}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t+\tau)dt\right] \tag{1.129}$$

sau, ținând cont de (1.128):

$$\begin{aligned} B_{ss}(\tau) &= A^2 \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega t \cos\omega(t+\tau)dt\right] = \\ &= \frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega(2t+\tau)dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega\tau dt\right] \end{aligned} \tag{1.130}$$

Deoarece:

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\omega\left(2t+\tau\right)dt\right]=0 \tag{1.131}$$

şi

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\omega\tau dt\right]=\cos\omega\tau \tag{1.132}$$

relația (1.130) devine:

$$B_{ss}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau \tag{1.133}$$

Pe de altă parte, conform relației (1.104), rezultă:

$$B_{nn}(\infty)=a^2=0 \tag{1.134}$$

Din relația (1.133) rezultă că funcția de autocorelație a semnalului util, presupus periodic, este de asemenea periodică şi, deci, atunci când în semnalul recepționat există şi semnal util periodic, funcția de autocorelație a semnalului recepționat, pentru τ suficient de mare, va fi un semnal periodic de forma (1.133).

Dacă în semnalul recepționat nu există şi semnal util periodic, funcția de autocorelație a semnalului recepționat, pentru τ suficient de mare, tinde asimptotic la zero.

Pe baza acestui rezultat se poate decide dacă în semnalul recepționat există sau nu semnal util, purtător de informație, chiar în situațiile severe, când nivelul semnalului util recepționat este mai mic decât nivelul zgomotului şi când spectrul semnalului util este inclus în spectrul zgomotului. În astfel de condiții, prin nici o metodă clasică deterministă (filtrare sau detectare de amplitudine) nu se poate decide dacă în semnalul recepționat există sau nu semnal util.

1.8. Determinarea funcției de autocorelație şi a densității spectrale de putere a unei secvențe binare aleatoare

O secvență binară aleatoare este formată dintr-o succesiune de impulsuri rectangulare de durată Δ sau multiplu de Δ, a căror amplitudine poate lua numai două valori egal probabile şi independente de valorile anterioare. Fără a micşora generalitatea, se consideră că cele două valori egal probabile sunt 1 şi -1.

O realizare particulară a unei secvențe binare aleatoare (care matematic este modelată de un proces aleator discret în amplitudine) este prezentată în figura 1.8.

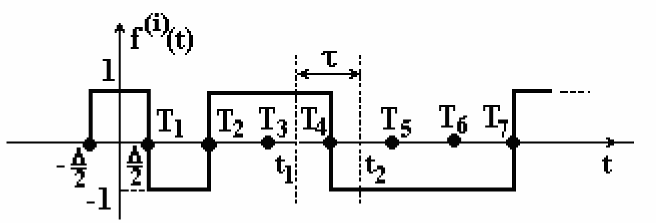


Fig. 1.8. Reprezentarea grafică a unei realizări particulare a unei secvențe binare aleatoare

Se numesc *noduri* punctele T_n (n = ±1, ±2, ...) unde pot avea loc tranziții de la valoarea 1 la -1 sau invers. Evident, nodurile se succed regulat la intervale egale cu Δ, însă nu în fiecare nod are loc o tranziție.

În scopul calculului funcției de autocorelație a acestei secvențe binare aleatoare, se particularizează relația (1.27) pentru *k=r=2*, rezultând:

$$B_{ff}(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{1i}x_{2j}p(x_{1i} \cap x_{2j};t_1,t_2) \qquad (1.135)$$

Relația (1.135) se poate scrie echivalent sub forma:

$$\begin{aligned} B_{ff}(t_1,t_2) &= x_{11}x_{21}p(x_{11}\cap x_{21};t_1,t_2)+x_{11}x_{22}p(x_{11}\cap x_{22};t_1,t_2) \\ &+x_{12}x_{21}p(x_{12}\cap x_{21};t_1,t_2)+x_{12}x_{22}p(x_{12}\cap x_{22};t_1,t_2) \end{aligned} \tag{1.136}$$

Dar:

$$\left.\begin{aligned} x_{11} &= x_{21} = 1 \\ x_{12} &= x_{22} = -1 \end{aligned}\right\} \tag{1.137}$$

Cu (1.137), relația (1.136) devine:

$$\begin{aligned} B_{ff}(\tau) &= p(x_{11}\cap x_{21};t_{1,},t_2)-p(x_{11}\cap x_{22};t_{1,},t_2)- \\ &-p(x_{12}\cap x_{21};t_{1,},t_2)+p(x_{12}\cap x_{22};t_{1,},t_2) \end{aligned} \tag{1.138}$$

Pe de altă parte, se poate scrie:

$$p(x_{1i}\cap x_{2j};t_1,t_2)=p(x_{1i},t_1)p(x_{2j};t_2\mid x_{1i};t_1),\quad (\forall)i,j=1,2 \tag{1.139}$$

Ținând cont de (1.139), relația (1.138) devine:

$$\begin{aligned} B_{ff}(\tau) &= p(x_{11};t_1)p(x_{21};t_2\mid x_{11};t_1)- \\ &-p(x_{11};t_1)p(x_{22};t_2\mid x_{11};t_1) \\ &-p(x_{12};t_1)p(x_{21};t_2\mid x_{12};t_1)+p(x_{12};t_1)p(x_{22};t_2\mid x_{12};t_1) \end{aligned} \tag{1.140}$$

Dar

$$p(x_{1i},t_1)=\frac{1}{2}\ ,\ (\forall)i=1,2 \tag{1.141}$$

deoarece la un moment oarecare $t=t_0$, semnalul binar aleator poate fi egal probabil fie $x_{11}=1$, fie $x_{12}=-1$.

Se consideră, în continuare, două cazuri (v. fig. 1.8)

a) $\tau<\Delta$

b) $\tau\ge\Delta$

În cazul a), rezultă:

$$p(x_{2j};t_2\mid x_{1i};t_1)\Big|_{i\ne j}=\frac{1}{2}\frac{\tau}{\Delta}\qquad (\forall)i,j=1,2\ ;\ i\ne j \tag{1.142}$$

deoarece această probabilitate condiționată este egală cu produsul dintre probabilitatea ca în intervalul $\tau < \Delta$ să apară un nod, probabilitate care, evident, este egală cu τ/Δ, şi probabilitatea ca în acel nod să aibă loc o tranziție de la 1 la -1 sau invers, probabilitate care, evident, este egală cu 1/2.

Pe de altă parte, este adevărată relația:

$$p(x_{2j};t_2 \mid x_{1i};t_1)\Big|_{i\neq j} + p(x_{2j};t_2 \mid x_{1i};t_1)\Big|_{i=j} = 1 \qquad (1.143)$$

Din (1.142) şi (1.143) rezultă:

$$p(x_{2j};t_2 \mid x_{1i};t_1)\Big|_{i=j} = 1 - p(x_{2j};t_2 \mid x_{1i};t_{1)})\Big|_{i\neq j} = 1 - \frac{\tau}{2\Delta} \qquad (1.144)$$

Înlocuind relațiile (1.142) şi (1.144) în (1.140), rezultă:

$$B_{ff}(t_1,t_2) = B_{ff}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\Delta} \quad , \quad \tau < \Delta \qquad (1.145)$$

În cazul b), rezultă:

$$p(x_{2j};t_2 \mid x_{1i};t_1) = p(x_{2j};t_2) = \frac{1}{2} \quad , \quad (\forall) i, j = 1,2 \qquad (1.146)$$

deoarece, când $\tau \geq \Delta$, cu certitudine în intervalul τ apare un nod, iar în nodul respectiv, cu probabilitatea egală cu 1/2 , poate să aibă loc tranziția de la 1 la-1, sau invers.

Ținând cont de relațiile (1.141) şi (1.146), relația (1.140) devine:

$$B_{ff}(t_1,t_2) = B_{ff}(\tau) = 0 \quad , \quad \tau \geq \Delta \qquad (1.147)$$

Reunind (1.145) şi (1.147), rezultă:

$$B_{ff}(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau}{\Delta} & , \text{ pentru } \tau < \Delta \\ 0 & , \text{ pentru } \tau \geq \Delta \end{cases} \qquad (1.148)$$

Deoarece funcția de autocorelație este o funcție pară, rezultă că relația (1.148) se menține adevărată și pentru $\tau < 0$, ceea ce înseamnă că relația finală care specifică funcția de autocorelație a unei secvențe binare aleatoare este de forma:

$$B_{ff}(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{\Delta} & , \text{ pentru } |\tau| < \Delta \\ 0 & , \text{ pentru } |\tau| \geq \Delta \end{cases} \tag{1.149}$$

Deoarece funcția de autocorelație nu depinde de originea timpului, rezultă că semnalul binar aleator analizat este staționar în sens larg. Pe măsură ce Δ devine mai mic, funcția de autocorelație se apropie de un impuls Dirac care, așa cum s-a precizat anterior, caracterizează zgomotul alb.

Reprezentarea grafică a acestei funcții de autocorelație este dată în figura 1.9.

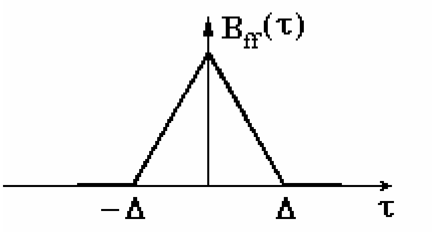


Fig. 1.9. Funcția de autocorelație a unei secvențe binare aleatoare

Densitatea spectrală de putere a secvenței binare aleatoare se poate deduce cu ajutorul teoremei Wiener-Khintcine, adică:

$$S_{ff}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \tag{1.150}$$

Înlocuind (1.149) în (1.150), rezultă:

$$S_{ff}(j\omega)=\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{\Delta-|\tau|}{\Delta}\cos\omega\tau d\tau=2\int_{0}^{\Delta}\frac{\Delta-\tau}{\Delta}\cos\omega\tau\cdot d\tau \qquad (1.151)$$

Efectuând integrarea prin părți:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Delta-\tau}{\Delta}=u\Rightarrow du=-\frac{d\tau}{\Delta}\\&\cos\omega\tau\, d\tau=dv\Rightarrow\frac{\sin\omega\tau}{\omega}=v\end{aligned}\right\} \qquad (1.152)$$

rezultă:

$$S_{ff}(j\omega)=2\left(uv\Big|_{\tau=0}^{\tau=\Delta}-\int_{0}^{\Delta}vdu\right)=\frac{2}{\omega^2\Delta}(1-\cos\omega\Delta)=$$

$$=\frac{4}{\omega^2\Delta}\sin^2\frac{\omega\Delta}{2}=\Delta\left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2 \qquad (1.153)$$

Reprezentarea grafică a densității spectrale de putere a secvenței binare aleatoare, dată de relația (1.153), este dată în figura 1.10.

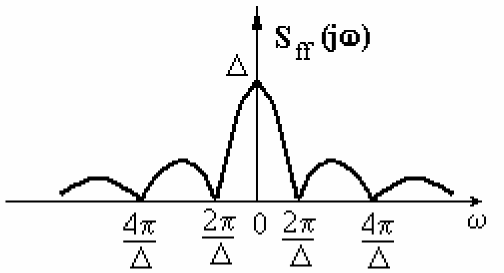


Fig. 1.10. Densitatea spectrală de putere a unei secvențe binare aleatoare

Un rezultat identic se obține dacă se observă că:

$$\begin{aligned}&p(x_{21};t_2\,|\,x_{11};t_1)=p(x_{22};t_2\,|\,x_{12};t_1)=\\&=P\left\{f^{(i)}(t_2)=f^{(i)}(t_1)\right\}\end{aligned} \qquad (1.154)$$

adică, la momentele de timp t_1 şi t_2 secvenţa îşi menţine aceeaşi valoare, 1 sau -1. Acest lucru se întâmplă dacă numărul de tranziţii în intervalul $t_2 - t_1$ este par.

Analog, rezultă:

$$\begin{aligned} &p(x_{22};t_2 \mid x_{11};t_1) = p(x_{21};t_2 \mid x_{12};t_1) = \\ &= P\left\{ f^{(i)}(t_2) = -f^{(i)}(t_1) \right\} \end{aligned} \tag{1.155}$$

adică, la momentele de timp t_1 şi t_2 secvenţa binară aleatoare are semne contrare. Acest lucru se întâmplă dacă numărul de tranziţii în intervalul $t_2 - t_1$ este impar.

Ţinând cont de (1.141), (1.154) şi (1.155), relaţia (1.140) devine:

$$\begin{aligned} &B_{ff}(\tau) = P\left\{ f^{(i)}(t_2) = f^{(i)}(t_1) \right\} - P\left\{ f^{(i)}(t_2) = -f^{(i)}(t_1) \right\} = \\ &= p_c - p_a, \end{aligned} \tag{1.156}$$

unde prin p_c şi p_a s-au notat probabilităţile de coincidenţă, respectiv de necoincidenţă a valorilor secvenţei binare aleatoare la momentele t_1 şi t_2.

Notând:

$$t_2 - t_1 \overset{not.}{=} N\Delta + \theta \ ; \ \mathrm{N} = 0,1,2,\ldots \ ; \ 0 \le \theta < \Delta \tag{1.157}$$

rezultă că numărul de tranziţii în intervalul $t_2 - t_1$ este dat de suma dintre numărul de tranziţii, k, din intervalul $N\Delta$, şi numărul de tranziţii din intervalul θ, care poate fi zero sau unu.

Probabilitatea ca în N noduri posibile din intervalul $N\Delta$ să aibă loc k tranziţii se poate calcula folosind *distribuţia binomială*, adică:

$$P_N(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \tag{1.158}$$

unde s-a notat cu p probabilitatea ca într-un nod să aibă loc o tranziție. În cazul secvenței binare aleatoare, p=1/2 şi, deci:

$$P_N(k) = \binom{N}{k} 2^{-N} \quad (0 \le k \le N) \tag{1.159}$$

În ceea ce priveşte intervalul θ, probabilitatea ca acesta să conțină un nod este egală cu θ/Δ, iar probabilitatea ca în acest nod să aibă loc o tranziție este egală cu 1/2.

Rezultă atunci că probabilitatea ca în intervalul θ să aibă loc o tranziție, probabilitate care se notează cu $p_\theta(1)$, se determină cu relația:

$$p_\theta(1) = \frac{\theta}{2\Delta} \tag{1.160}$$

Probabilitatea ca în intervalul θ să nu aibă loc o tranziție, probabilitate care se notează cu $p_\theta(0)$, se determină cu relația:

$$p_\theta(0) = 1 - p_\theta(1) = 1 - \frac{\theta}{2\Delta} = \frac{2\Delta - \theta}{2\Delta} \tag{1.161}$$

Rezultă atunci:

$$p_c = p_\theta(0) \sum_{k\ par} P_N(k) + p_\theta(1) \sum_{k\ impar} P_N(k), \quad (0 \le k \le N) \tag{1.162}$$

$$p_a = p_\theta(0) \sum_{k\ impar} P_N(k) + p_\theta(1) \sum_{k\ par} P_N(k), \quad (0 \le k \le N) \tag{1.163}$$

În cazul N=0, rezultă $t_2 - t_1 = \theta$ şi atunci:

$$B_{ff}(\theta) = p_c\big|_{N=0} - p_a\big|_{N=0} = p_\theta(0) - p_\theta(1) = \frac{\Delta - \theta}{\Delta} \tag{1.164}$$

Pentru N>0 $(t_2 - t_1 = N\Delta + \theta)$, rezultă

$$B_{ff}(N\Delta + \theta) = [p_\theta(0) - p_\theta(1)]\left[\sum_{k\ par} P_N(k) - \sum_{k\ impar} P_N(k)\right] =$$

$$= 2^{-N} \frac{\Delta - \theta}{\Delta} \left[\sum_{k\ par} \binom{N}{k} - \sum_{k\ impar} \binom{N}{k} \right] \tag{1.165}$$

Deoarece:

$$\sum_{kpar} \binom{N}{k} = \sum_{kimpar} \binom{N}{k} \tag{1.166}$$

rezultă că, pentru N>0:

$$B_{ff}(N\Delta + \theta) = 0 \tag{1.167}$$

Reunind relațiile (1.164) şi (1.167) şi ținând cont de (1.157), rezultă:

$$B_{ff}(N\Delta + \theta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\theta}{\Delta} & \text{pentru } N = 0 \\ 0 & \text{pentru } N > 0 \end{cases} \tag{1.168}$$

Funcția de autocorelație fiind pară, rezultă relația finală:

$$B_{ff}(N\Delta + \theta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\theta|}{\Delta} & \text{, pentru } |\theta| < \Delta \\ 0 & \text{, pentru } |\theta| \geq \Delta \end{cases} \tag{1.169}$$

care, aşa cum era de aşteptat, este identică cu relația (1.149)

1.9. Determinarea funcției de autocorelație şi a densității spectrale de putere a unui semnal aleator telegrafic

Semnalul aleator telegrafic poate lua cu aceeaşi probabilitate valorile 1 şi -1. Tranzițiile de la o valoare la alta (trecerile prin zero) sunt independente, aleatoare, caracterizate prin *distribuția Poisson*:

$$P(k, \tau) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\tau}{T_0} \right)^k e^{-\frac{\tau}{T_0}} \tag{1.170}$$

unde $P(k,\tau)$ reprezintă probabilitatea ca în intervalul de timp τ să aibă loc k tranziții, iar T_0 este valoarea medie a intervalului dintre două tranziții.

Fie $\tau = t_2 - t_1$ intervalul de timp în care se observă o realizare particulară $f^{(i)}(t)$ a semnalului aleator telegrafic. Funcția de autocorelație a acestui semnal aleator telegrafic se poate determina cu relația (1.156), care, pentru comoditate, se rescrie:

$$\begin{aligned} B_{ff}(\tau) &= P\left\{f^{(i)}(t_2) = f^{(i)}(t_1)\right\} - P\left\{f^{(i)}(t_2) = -f^{(i)}(t_1)\right\} \\ &= p_c - p_a \end{aligned} \tag{1.171}$$

Se reamintește că prin p_c s-a notat probabilitatea de coincidență, iar prin p_a probabilitatea de necoincidență a valorilor secvenței binare la momentele t_1 și t_2. Evident, dacă în intervalul τ numărul de tranziții, k, este par, va rezulta o coincidență, iar dacă în același interval numărul de tranziții, k, este impar, va rezulta o necoincidență.

Ținând cont de această observație, relația (1.171) se poate scrie sub formă echivalentă:

$$B_{ff}(\tau) = P\{k\ par, \tau) - P\{k\ impar, \tau\} \tag{1.172}$$

Înlocuind (1.170) în (1.172), rezultă:

$$\begin{aligned} B_{ff}(\tau) &= \sum_{k\ par}\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^k e^{-\frac{\tau}{T_0}}\right] - \sum_{k\ impar}\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^k e^{-\frac{\tau}{T_0}}\right] = \\ &= e^{-\frac{\tau}{T_0}}\sum_k\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{-\tau}{T_0}\right)^k\right] = e^{-\frac{\tau}{T_0}}\left[1 - \frac{\tau}{1!T_0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^3 + \ldots\right] \\ &= e^{-\frac{\tau}{T_0}} e^{-\frac{\tau}{T_0}} = e^{-2\frac{\tau}{T_0}} \end{aligned} \tag{1.173}$$

Deoarece funcția de autocorelație este pară în τ, rezultă că relația (1.173) este adevărată și pentru $\tau < 0$, deci relația finală de calcul a funcției de autocorelație a semnalului aleator telegrafic este de forma:

$$B_{ff}(\tau) = e^{-2\frac{|\tau|}{T_0}} \tag{1.174}$$

Reprezentarea grafică a acestei funcții de autocorelație este dată de figura 1.11.

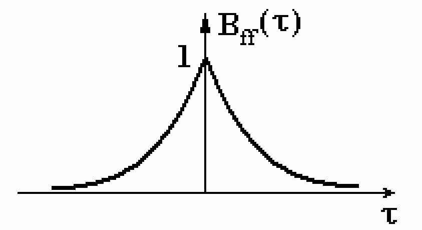


Fig. 1.11. Funcția de autocorelație a semnalului aleator telegrafic

Densitatea spectrală de putere a semnalului telegrafic se poate deduce cu ajutorul teoremei Wiener-Khintcine.

Înlocuind relația (1.174) în (1.97), rezultă:

$$S_{ff}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\frac{|\tau|}{T_0}} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{2\frac{\tau}{T_0}} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-2\frac{\tau}{T_0}} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \left.\frac{e^{\left(\frac{2}{T_0} - j\omega\right)\tau}}{\frac{2}{T_0} - j\omega}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-\left(\frac{2}{T_0} + j\omega\right)\tau}}{\frac{2}{T_0} + j\omega}\right|_{0}^{\infty} = \frac{\frac{4}{T_0}}{\omega^2 + \left(\frac{2}{T_0}\right)^2} \tag{1.175}$$

Reprezentarea grafică a acestei densități spectrale de putere este dată în figura 1.12.

Se observă că frecvența unghiulară corespunzătoare unei atenuări de 3 dB este egală cu inversul constantei în timp ce intervine în exponentul funcției de autocorelație, $(2/T_0)$. Cu cât valoarea medie a intervalului dintre două tranziții, T_0, este mai mică, cu atât mai repede se atenuează funcția de autocorelație şi cu atât mai mare este lățimea de bandă a semnalului aleator telegrafic.

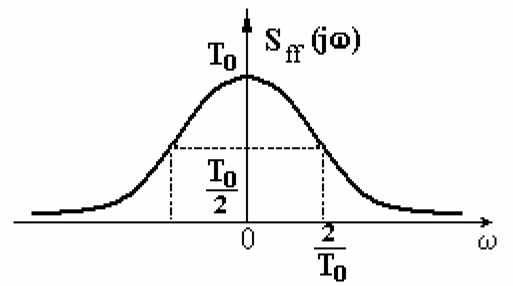


Fig. 1.12. Densitatea spectrală de putere a semnalului aleator telegrafic

1.10. Determinarea funcției de autocorelație a secvențelor pseudoaleatoare (SPA) periodice

O secvență pseudoaleatoare (SPA) periodică se bucură de următoarele proprietăți:

a) Secvența este formată dintr-o succesiune de impulsuri rectangulare de durată elementară Δ sau multiplu de Δ, în cadrul unor asemenea intervale putând lua valorile constante *a* sau *-a*. Fără micşorarea generalității, în continuare, se va considera a=1 şi -a=-1;

b) Numărul total de intervale elementare Δ în cadrul unei perioade este $n = 2^p - 1$, unde *p* este un număr întreg pozitiv;

c) În fiecare perioadă, numărul de intervale elementare în care semnalul are valoarea 1 este mai mare cu o unitate decât numărul intervalelor elementare în care semnalul are valoarea -1;

d) Dacă se defineşte prin *stare* succesiunea de intervale elementare Δ în care semnalul are valoarea 1 sau -1, atunci numărul total de stări este (n+1)/2;

e) În cadrul unei perioade, jumătate din numărul de stări au o durată egală cu Δ, un sfert din numărul de stări au durata 2Δ, o optime au durata 3Δ ş.a.m.d., exceptând o stare cu valoarea 1, de durată $p\Delta$ şi o stare cu valoarea -1, de durată $(p-1)\Delta$;

f) Efectuând o permutare ciclică asupra unei secvenţe pseudoaleatoare periodice, se obţine o nouă secvenţă pseudoaleatoare periodică care, comparată cu secvenţa originală, prezintă un număr de necoincidenţe mai mare cu o unitate decât numărul de coincidenţe.

De obicei, secvenţele pseudoaleatoare periodice se obţin din secvenţe binare pseudoaleatoare periodice. La rândul lor, secvenţele binare pseudoaleatoare periodice se generează cu registre de deplasare cu reacţie, întocmite după polinoame primitive. Gradul polinomului primitiv este egal cu *p*, fiind egal cu numărul circuitelor basculante bistabile din componenţa registrului de deplasare cu reacţie [48].

Având în vedere caracterul periodic al secvenţei (perioada $T=n\Delta$), şi funcţia sa de autocorelaţie va fi periodică, de aceeaşi perioadă.

Funcţia de autocorelaţie a secvenţei pseudoaleatoare periodice SPA(t) de perioadă $T=n\Delta$ se calculează conform relaţiei (1.37), în care perioada T este finită, adică:

$$B_{ff}(\tau)=\frac{1}{n\Delta}\int_{0}^{n\Delta} SPA(t)SPA(t-\tau)dt \qquad (1.176)$$

Înmulţirea celor două secvenţe pseudoaleatoare periodice se efectuează conform Tabelului 1.1.

Tabelul 1.1.

x	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Notând I_c şi I_a intervalele de timp în care $SPA(t)$ şi $SPA(t-\tau)$ coincid, respectiv nu coincid, funcţia de autocorelaţie se poate determina cu relaţia echivalentă:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{I_c - I_a}{n\Delta} \tag{1.177}$$

Pentru determinarea expresiilor lui I_c şi I_a, se poate considera SPA binară efectuându-se echivalenţele 0↔1 şi 1↔-1. În cazul SPA binare, suma modulo doi este definită în Tabelul 1.2:

Tabelul 1.2.

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

Se constată uşor existenţa izomorfismului dintre grupurile 1,-1/x şi 0,1/⊕.

Ţinând cont de proprietatea f), rezultă că, dacă SPA_j este o secvenţă pseudoaleatoare obţinută din SPA_i prin *j-i* deplasări ciclice, atunci:

$$SPA_i \oplus SPA_j = SPA_k \tag{1.178}$$

unde sumarea se efectuează modulo doi, simbol cu simbol, iar SPA_k provine din SPA_i prin *k-i* deplasări ciclice.

Conform proprietăţilor b) şi c), orice SPA periodică binară va conţine (n-1)/2 =2^{p-1}-1 simboluri zero şi (n+1)/2=2^{p-1} simboluri 1.

Se face notaţia:

$$\theta + j\Delta \overset{not.}{=} \tau; 0 \le \theta < \Delta; j = 0,1,2,,...n-2 \tag{1.179}$$

Pentru determinarea expresiilor lui I_c şi I_a, se consideră suma modulo doi SPA(t)⊕SPA(t-τ) pe o perioadă T=nΔ:

$$SPA(t) \oplus SPA(t-\tau) =$$

$$= \begin{cases} SPA_0 \oplus SPA_{j+1}, \text{într-un interval } \theta \text{ la fiecare } \Delta \\ SPA_0 \oplus SPA_j, \text{într-un interval } \Delta - \theta \text{ la fiecare } \Delta \end{cases} \quad (1.180)$$

Notând cu $N_0\{SPA_i \oplus SPA_j\}$ şi cu $N_1\{SPA_i \oplus SPA_j\}$ numărul de simboluri 0 (coincidenţe), respectiv 1 (necoincidenţe) ale $SPA_i \oplus SPA_j$, se poate scrie:

$$\left.\begin{array}{l} I_c = \theta N_0\left\{SPA_0 \oplus SPA_{j+1}\right\} + (\Delta - \theta) N_0\left\{SPA_0 \oplus SPA_j\right\} \\ I_a = \theta N_1\left\{SPA_0 \oplus SPA_{j+1}\right\} + (\Delta - \theta) N_1\left\{SPA_0 \oplus SPA_j\right\} \end{array}\right\} \quad (1.181)$$

Pentru j=0, rezultă din (1.179) că $\tau = \theta$. Înlocuind în (1.181) j=0 şi $\tau = \theta$ şi ţinând cont de proprietăţile SPA periodice, rezultă:

$$I_c = \tau \frac{n-1}{2} + (\Delta - \tau)n \quad (1.182)$$

$$I_a = \tau \frac{n+1}{2} \quad (1.183)$$

Înlocuind (1.182) şi (1.183) în relaţia (1.177), se obţine:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{\Delta - \tau\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\Delta} \quad (1.184)$$

Pentru 0<j<n-2 ($\tau=\theta+j\Delta$), rezultă:

$$I_c = \theta \frac{n-1}{2} + (\Delta - \theta)\frac{n-1}{2} \quad (1.185)$$

$$I_c = \theta \frac{n+1}{2} + (\Delta - \theta)\frac{n+1}{2} \quad (1.186)$$

Înlocuind (1.185) şi (1.186) în relaţia (1.177), se obţine:

$$B_{ff}(\tau) = -\frac{1}{n} \quad (1.187)$$

Deoarece $B_{ff}(\tau)$ este o funcție pară și periodică, de perioadă T=nΔ, se poate scrie:

$$B_{ff}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\Delta-|\tau|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\Delta}, \text{pentru } |\tau|\le\Delta \\ -\dfrac{1}{n}, \text{pentru } \Delta<|\tau|\le(n-1)\Delta\end{cases} \tag{1.188}$$

Conform relației (1.188), reprezentarea grafică a funcției de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatoare periodice de lungime *n* este dată în figura 1.13.

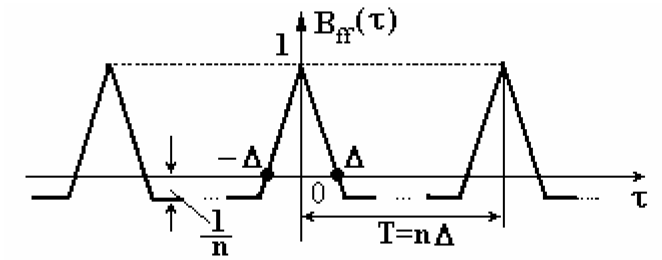


Fig. 1.13. Funcția de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatoare periodice

Se observă că funcția de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatoare periodice este cu atât mai apropiată de cea a secvenței aleatoare binare, cu cât *n* este mai mare. Cu alte cuvinte, cu cât *n* este mai mare și Δ mai mic, funcția de autocorelație a secvenței pseudoaleatoare periodice aproximează mai bine impulsul Dirac, ceea ce înseamnă că în aceste condiții secvența respectivă aproximează zgomotul alb.

În aplicațiile practice, secvențele pseudoaleatoare periodice se pot considera cu bună aproximație zgomot alb la intrarea unor sisteme dinamice [48], dacă perioada acestora (nΔ) este cel puțin de zece ori mai mare decât cea mai mare constantă de timp ce caracterizează sistemul dinamic respectiv.

1.11. Determinarea funcției pondere a unui sistem liniar invariant în timp prin metoda corelației

Pentru determinarea funcției pondere a unui sistem liniar invariant (SLI) în timp prin metoda corelației, se folosește schema bloc din figura 1.14, unde $f(t)$ este zgomot alb, $g(t)$ răspunsul sistemului liniar invariant în timp la zgomotul alb, iar corelatorul, o instalație tehnică care poate calcula funcția de corelație dintre $f(t)$ și $g(t)$. Conform relației (1.45), pentru un T suficient de mare și $t_2 - t_1 = \tau$, rezultă:

$$R_{fg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, g(t+\tau)\, dt \tag{1.189}$$

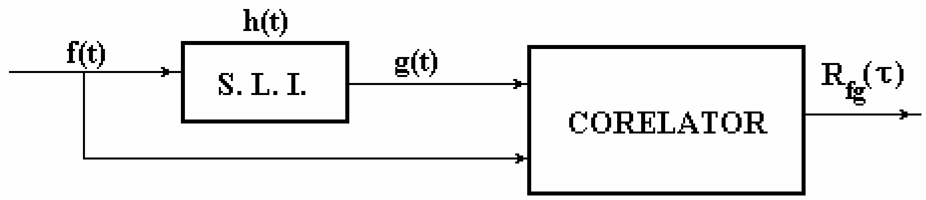


Fig. 1.14. Schema bloc pentru determinarea funcției pondere a unui S. L. I.

Dacă se notează cu $h(t)$ funcția pondere (necunoscută) a sistemului liniar invariant în timp, conform integralei de convoluție, se poate scrie:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(t-u) du \qquad (1.190)$$

Înlocuind (1.190) în relația (1.189), se obține:

$$R_{fg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(t+\tau-u) du\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t+\tau-u) dt du \qquad (1.191)$$

Dar: $$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t+\tau-u) dt = R_{ff}(\tau-u) \qquad (1.192)$$

reprezintă funcția de autocorelație a semnalului de la intrarea sistemului.

Dacă acest semnal se consideră zgomot alb, ergodic, cu densitatea spectrală de putere S_0, conform relației (1.100):

$$R_{ff}(\tau-u) = S_0 \delta(\tau-u) \qquad (1.193)$$

unde $\delta(\tau\text{-}u)$ este distribuția Dirac.

Ținând cont de (1.193) şi de proprietatea de filtrare a distribuției Dirac, relația (1.191) devine

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) S_0 \delta(\tau-u) du = S_0 h(\tau) \qquad (1.194)$$

Din (1.194) rezultă că funcția de corelație este proporțională cu funcția pondere a sistemului liniar invariant, necunoscut. Cunoscându-se densitatea spectrală de putere S_0 a semnalului $f(t)$, care poate fi considerat zgomot alb pentru sistemul respectiv şi calculându-se funcția de corelație dintre $f(t)$ şi răspunsul sistemului, se poate deduce funcția pondere a acestuia.

Avantajul principal al acestei metode față de metodele clasice deterministe (aplicarea la intrare a unui impuls scurt şi înregistrarea răspunsului sau determinarea prin puncte a funcției de transfer etc.), constă în faptul că funcția pondere astfel determinată nu este afectată de perturbațiile care intervin în funcționarea sistemului.

Un alt avantaj al acestei metode constă în faptul că se poate determina funcția pondere a sistemului în funcțiune, deci în condiții reale.

1.12. Determinarea funcției de autocorelație şi a densității spectrale de putere la ieşirea unui sistem analogic, liniar, invariant în timp

Se consideră $f(t)$ un proces aleator, staționar în sens larg, care se aplică la intrarea unui sistem analogic, liniar, invariant în timp. Dacă $h(t)$ este funcția pondere a acestui sistem, la aplicarea lui $f(t)$, la ieşire va rezulta de asemenea un proces aleator staționar în sens larg, notat în continuare cu $g(t)$, care se poate determina cu integrala de convoluție, după cum urmează:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)h(u)du \tag{1.195}$$

Funcția de autocorelație $B_{gg}(\tau)$ a procesului aleator de la ieşirea sistemului se poate calcula, conform relației (1.26’), astfel:

$$B_{gg}(\tau) = m_1\{g(t_1)g(t_1+\tau)\} =$$

$$= m_1\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 - u)h(u)du \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 + \tau - v)h(v)dv\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)m_1\{f(t_1 - u)f(t_1 + \tau - v)\}dudv \qquad (1.196)$$

Dar

$$m_1\{f(t_1 - u)f(t_1 + \tau - v)\} = B_{ff}(\tau - v + u) \qquad (1.197)$$

reprezintă funcția de autocorelație a procesului aleator $f(t)$ de la intrarea sistemului analogic, liniar, invariant în timp. Cu (1.197), relația (1.196) devine:

$$B_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau - v + u)h(u)h(v)dudv \qquad (1.198)$$

Densitatea spectrală de putere de la ieşirea sistemului analogic, liniar, invariant în timp, conform teoremei Wiener - Khintcine, este transformata Fourier a funcției de autocorelație, adică:

$$S_{gg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{gg}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (1.199)$$

Înlocuind $B_{gg}(\tau)$ din (1.198) în relația (1.199), rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau - v + u)h(u)h(v)e^{-j\omega\tau}dudvd\tau \qquad (1.200)$$

Pentru o scriere mai compactă, se face schimbarea de variabilă:

$$\tau - v + u = \theta \ ; \ d\tau = d\theta \qquad (1.201)$$

Cu (1.198), relația (1.197) devine:

$$S_{gg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega u}du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-j\omega v}dv \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\theta)e^{-j\omega\theta}d\theta \qquad (1.202)$$

Dar:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega u}du = H(-j\omega)\\
&\int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-j\omega v}dv = H(j\omega)\\
&\int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\theta)e^{-j\theta}d\theta = S_{ff}(j\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{1.203}$$

unde $H(j\omega)$ este funcția de transfer a sistemului analogic, liniar, invariant în timp, iar $S_{ff}(j\omega)$, densitatea spectrală de putere a procesului aleator de la intrarea sistemului respectiv.

Cu (1.203), relația (1.202) devine:

$$S_{gg}(j\omega) = \left|H(j\omega)\right|^2 S_{ff}(j\omega) \tag{1.204}$$

În cazul în care la intrarea sistemului se aplică zgomot alb cu densitatea spectrală de putere S_0, rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = \left|H(j\omega)\right|^2 S_0 \tag{1.205}$$

1.13. Valori medii statistice definite pe procese aleatoare, discrete în timp

Ca şi în cazul proceselor aleatoare continue în timp, un proces aleator discret în timp este o mulțime indexată de variabile aleatoare şi, în consecință, acesta poate fi caracterizat cu ajutorul mediilor statistice ale variabilelor aleatoare ce îl compun. Aceste medii se mai numesc *medii pe mulțimi*.

După cum s-a precizat, fiecare variabilă aleatoare este caracterizată statistic de funcția densitate de repartiție, notată $w_1(x_i;n_i)$ şi, în consecință, valorile medii sunt şi ele dependente de variabila temporală discretă n.

Valorile medii statistice frecvent folosite în aplicații sunt:

1. *Valoarea medie* (moment de ordinul întâi):

$$E\{x[n_1]\} = \overline{x[n_1]} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1;n_1)\,dx_1 \tag{1.206}$$

2. *Valoarea pătratică medie* (moment inițial de ordinul doi), definită în cazul variabilelor aleatoare complexe, cu relația:

$$E\left\{|x[n_1]|^2\right\} = \overline{|x[n_1]|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^2 w_1(x_1;n_1)\,dx_1 \tag{1.207}$$

şi în cazul variabilei aleatoare reale

$$E\{x^2[n_1]\} = \overline{x^2[n_1]} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1;n_1)\,dx_1 \tag{1.207'}$$

3. *Funcția de autocorelație* (momentul inițial reunit de ordinul doi):

În cazul variabilei aleatoare complexe

$$\gamma_{xx}[n_1,n_2] = \overline{x[n_1]x^*[n_2]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* w_2(x_1,x_2;n_1,n_2)\,dx_1 dx_2 \tag{1.208}$$

În cazul variabilei aleatoare reale:

$$\gamma_{xx}[n_1,n_2] = \overline{x[n_1]x[n_2]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1,x_2;n_1,n_2)\,dx_1 dx_2 \tag{1.208'}$$

4. *Funcția de corelație* (moment inițial mixt de ordinul doi):

În cazul variabilei aleatoare complexe

$$\gamma_{xy}[n_1,n_2] = \overline{x[n_1]y^*[n_2]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2^* w_2(x_1,y_2,n_1,n_2)\,dx_1 dy_2 \tag{1.209}$$

În cazul variabilelor aleatoare reale

$$\gamma_{xy}[n_1,n_2] = \overline{x[n_1]y[n_2]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1,y_2,n_1,n_2)\,dx_1 dy_2 \tag{1.209'}$$

unde $x[n_1]$ şi $y[n_2]$ sunt variabile aleatoare care aparțin proceselor aleatoare $x[n]$, respectiv, $y[n]$, la momentele $n = n_1$, respectiv $n = n_2$, definite pe acelaşi spaţiu al eşantioanelor.

5. Dispersia sau *varianţa* (moment iniţial de ordin doi):

În cazul variabilei aleatoare complexe

$$\operatorname{var}(x) = \sigma_x^2[n_1] = \overline{\left|x[n_1] - \bar{x}[n_1]\right|^2} = \overline{\left|x[n_1]\right|^2} - \left|\overline{x[n_1]}\right|^2 \tag{1.210}$$

În cazul variabilei aleatoare reale:

$$\operatorname{var}(x) = \sigma_x^2[n_1] = \overline{\left(x[n_1] - \bar{x}[n_1]\right)^2} = \overline{\left(x[n_1]\right)^2} - \left(\overline{x[n_1]}\right)^2 \tag{1.210'}$$

6. Funcţia de autovarianţă:

În cazul variabilei aleatoare complexe

$$\begin{aligned} c_{xx}[n_1, n_2] &= \overline{\left(x[n_1] - \overline{x[n_1]}\right)\left(x[n_2] - \overline{x[n_2]}\right)^*} = \\ &= \gamma_{xx}[n_1, n_2] - \left\{\overline{x[n_1]}\right\}\left\{\overline{x^*[n_2]}\right\} \end{aligned} \tag{1.211}$$

În cazul variabilei aleatoare reale:

$$\begin{aligned} c_{xx}[n_1, n_2] &= \overline{\left(x[n_1] - \overline{x[n_1]}\right)\left(x[n_2] - \overline{x[n_2]}\right)} = \\ &= \gamma_{xx}[n_1, n_2] - \left\{\overline{x[n_1]}\right\}\left\{\overline{x[n_2]}\right\} \end{aligned} \tag{1.211'}$$

7. Funcţia de covarianţă:

În cazul variabilelor aleatoare complexe

$$\begin{aligned} c_{xy}[n_1, n_2] &= \overline{\left(x[n_1] - \overline{x[n_1]}\right)\left(y[n_2] - \overline{y[n_2]}\right)^*} = \\ &= \gamma_{xy}[n_1, n_2] - \left\{\overline{x[n_1]}\right\}\left\{\overline{y[n_2]}\right\} \end{aligned} \tag{1.212}$$

În cazul variabilelor aleatoare reale:

$$\begin{aligned} c_{xy}[n_1, n_2] &= \overline{\left(x[n_1] - \overline{x[n_1]}\right)\left(y[n_2] - \overline{y[n_2]}\right)} = \\ &= \gamma_{xy}[n_1, n_2] - \left\{\overline{x[n_1]}\right\}\left\{\overline{y[n_2]}\right\} \end{aligned} \tag{1.212'}$$

În cazul în care $x[n_1]$ şi $y[n_2]$ sunt două variabile aleatoare *statistic independente*, atunci:

$$w_2(x, y; n_1, n_2) = w_1(x; n_1) w_2(y; n_2) \tag{1.213}$$

şi din (1.209) rezultă:

$$\gamma_{xy}[n_1, n_2] = E\{x[n_1]\} E\{y[n_2]\} \tag{1.214}$$

În cazul independenţei statistice a variabilelor aleatoare, din (1.212) şi (1.214) rezultă:

$$c_{xy}[n_1, n_2] = 0 \tag{1.215}$$

Dacă ultima relaţie este îndeplinită, variabilele aleatoare $x[n_1]$ şi $y[n_2]$ sunt *necorelate*.

Se observă că dacă două variabile aleatoare sunt statistic independente, ele sunt şi necorelate, reciproca nefiind întotdeauna adevărată.

Două variabile aleatoare $x[n_1]$ şi $y[n_2]$ sunt *ortogonale,* dacă:

$$\gamma_{xy}[n_1, n_2] = E\{x[n_1] y[n_2]\} = 0 \tag{1.216}$$

1.14. Procese aleatoare discrete în timp, staţionare

Procesele aleatoare discrete în timp ale căror proprietăţi statistice sunt invariante la schimbarea arbitrară a originii timpului se numesc *staţionare*.

De exemplu, dacă densitatea de probabilitate de ordinul întâi nu depinde de *n*, adică $w_1(x_1; n_1) = w_1(x_1)$, procesul se numeşte *staţionar de ordinul* întâi sau *staţionar în medie*, şi:

$$E\{x[n_1]\} = \overline{x[n_1]} = m_x = \text{constant} \tag{1.217}$$

Din (1.207') şi (1.210') rezultă atunci

$$E\left\{x^2[n]\right\} = \overline{x^2[n]} = a = \text{constant} \qquad (1.218)$$

$$\sigma_x^2\left[n_1\right] = a - m_x^2 = \text{constant} \qquad (1.219)$$

Dacă, în plus, densitatea de probabilitate de ordinul *2* satisface condiția:

$$w_2\left(x_1, x_2; n_1, n_2\right) = w_2\left(x_1, x_2; n_1 - n_2\right) \qquad (1.220)$$

se spune că procesul discret în timp este *staționar de ordinul doi*. În acest caz momentele de ordinul doi (autocorelația, corelația, autovarianța şi covarianța) depind numai de diferența momentelor de timp, $n_1 - n_2$. Procesele aleatoare discrete în timp se numesc staționare în sens larg, dacă sunt satisfăcute relațiile (1.217) şi (1.218).

Procesele aleatoare a căror densitate de probabilitate îndeplineşte condiția:

$$\begin{aligned} & w_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N; n_1, n_2, \ldots, n_N\right) = \\ & = w_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N; n_1 + l, n_2 + l, \ldots, n_N + l\right) \end{aligned} \qquad (1.221)$$

pentru orice $l \in Z$, deci şi pentru $l = -n_1$, care conduce la:

$$\begin{aligned} & w_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N; n_1, n_2, \ldots, n_N\right) = \\ & = w_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N; n_2 - n_1, \ldots, n_N - n_1\right) \end{aligned} \qquad (1.221')$$

se numesc *staționare în sens strict*.

1.15. Valori medii temporale ale proceselor aleatoare, discrete în timp

În practică se dispune de obicei de o singură realizare particulară $x^{(k)}\left[n\right]$ a procesului aleator $x[n]$. Valorile medii temporale definite pe procese aleatoare discrete în timp se calculează dintr-o singură realizare particulară. Valorile medii temporale folosite frecvent în aplicații sunt:

1. Valoarea medie temporală

$$< x^{(k)}[n] > = \lim_{\mathbf{N}\to\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}}\sum_{n_i=-N}^{N} x^{(k)}[n_i]\right) \tag{1.222}$$

Se poate arăta că valoarea medie temporală nu depinde de originea timpului. Într-adevăr,

$$< x^{(k)}[n+n_0] > = \lim_{\mathbf{N}\to\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}}\sum_{n_i=-N}^{N} x^{(k)}[n_i+n_0]\right) \tag{1.223}$$

Dacă se face notația

$$n_i + n_0 = u_i \tag{1.224}$$

rezultă

$$< x^{(k)}[n+n_0] > = \lim_{\mathbf{N}\to\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}}\sum_{u_i=-N+n_0}^{N+n_0} x^{(k)}[u_i]\right) =< x^{(k)}[n] > \tag{1.225}$$

Înseamnă, deci, că valoarea medie temporală este o constantă.

2. Valoarea pătratică medie temporală

$$< \left(x^{(k)}[n]\right)^2 > = \lim_{\mathbf{N}\to\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}}\sum_{n_i=-N}^{N} \left(x^{(k)}[n_i]\right)^2\right) \tag{1.226}$$

Similar se poate demonstra că

$$< \left(x^{(k)}[n]\right)^2 >= \text{constant} \tag{1.226'}$$

3. Funcția de autocorelație temporală:

$$\begin{gathered} r_{xx}^{(k)}(n_1, n_2) =< x^{(k)}[n_1+n]x^{(k)}[n_2+n] > = \\ \lim_{\mathbf{N}\to\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}}\sum_{n_i=-N}^{N} x^{(k)}[n_1+n_i]x^{(k)}[n_2+n_i]\right) \end{gathered} \tag{1.227}$$

Se poate demonstra că funcția de autocorelație temporală nu depinde nici de n_1, nici de n_2, ci de diferența acestora.

Într-adevăr, dacă în relația (1.227) se face notația

$$n_1 + n_i = v_i, \tag{1.228}$$

rezultă

$$r_{xx}^{(k)}(n_1, n_2) = \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}} \sum_{v_i=-N+n_1}^{N+n_1} x^{(k)}[v_i] x^{(k)}[n_2 - n_1 + v_i] \right) = r_{xx}^{(k)}(n_2 - n_1) \tag{1.229}$$

Dacă în relația (1.227) se face notația

$$n_2 + n_i = u_i, \tag{1.230}$$

rezultă

$$r_{xx}^{(k)}(n_1, n_2) = \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}} \sum_{v_i=-N+n_2}^{N+n_2} x^{(k)}[n_1 - n_2 + u_i] x^{(k)}[u_i] \right) = r_{xx}^{(k)}(n_1 - n_2) \tag{1.231}$$

Comparând (1.229) cu (1.231), rezultă

$$r_{xx}^{(k)}(n_1, n_2) = r_{xx}^{(k)}(n_2 - n_1) = r_{xx}^{(k)}(n_1 - n_2) \tag{1.232}$$

adică, funcția de autocorelație temporală este o funcție pară, depinzând numai de diferența dintre momentele n_1 și n_2.

4. Funcția de corelație temporală:

$$r_{xy}^{(k)}(n_1, n_2) = < x^{(k)}[n_1 + n] y^{(k)}[n_2 + n] > = \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}} \sum_{n_i=-N}^{N} x^{(k)}[n_1 + n_i] y^{(k)}[n_2 + n_i] \right) \tag{1.233}$$

Analog se poate demonstra că

$$r_{xy}^{(k)}(n_1, n_2) = r_{xy}^{(k)}(n_2 - n_1) = r_{yx}^{(k)}(n_1 - n_2) \tag{1.234}$$

5. *Funcția de autovarianță temporală*

$$
\begin{aligned}
&c_{xx}^{(k)}(n_1,n_2)= \\
&= \ <\left(x^{(k)}[n_1+n]-<x^{(k)}[n]>\right)\left(x^{(k)}[n_2+n]-<x^{(k)}[n]>\right)> \\
&=<x^{(k)}[n_1+n]x^{(k)}[n_2+n]>-<x^{(k)}[n]><x^{(k)}[n]> \\
&=r_{xx}^{(k)}(n_1,n_2)-<x^{(k)}[n]><x^{(k)}[n]>
\end{aligned}
\qquad (1.235)
$$

Se poate demonstra pe aceeaşi cale că

$$c_{xx}^{(k)}(n_1,n_2)=c_{xx}^{(k)}(n_2-n_1)=c_{xx}^{(k)}(n_1-n_2) \qquad (1.236)$$

6. *Funcţia de covarianţă temporală*

$$
\begin{aligned}
c_{xy}^{(k)}(n_1,n_2)=&<\left(x^{(k)}[n_1+n]-<x^{(k)}[n]>\right)\left(y^{(k)}[n_2+n]-<y^{(k)}[n]>\right)>= \\
&=r_{xy}^{(k)}(n_1,n_2)-<x^{(k)}[n]><y^{(k)}[n]> \qquad (1.237)
\end{aligned}
$$

Se poate demonstra că

$$c_{xy}^{(k)}(n_1,n_2)=c_{xy}^{(k)}(n_2-n_1)=c_{yx}^{(k)}(n_1-n_2) \qquad (1.238)$$

7. *Dispersia temporală*

$$
\begin{aligned}
\sigma^2[n]= & \ <\left(x^{(k)}[n]-<x^{(k)}[n]>\right)^2>= \\
=&<\left[x^{(k)}[n]\right]^2>-\left[<x^{(k)}[n]>\right]^2
\end{aligned}
\qquad (1.239)
$$

Ţinând cont de (1.225) şi (1.226'), rezultă că dispersia temporală este o constantă.

1.16. Procese aleatoare discrete în timp, ergodice

O categorie mare de procese aleatoare se bucură de proprietatea de ergodicitate, a cărei esenţă constă în aceea că valorile medii statistice sunt egale cu valorile medii temporale corespunzătoare. Deoarece valoarea medie, valoarea pătratică medie şi dispersia temporală sunt constante, iar funcţiile de autocorelaţie, corelaţie, autovarianţă şi covarianţă temporale depind numai de diferențele dintre momentele n_1 şi n_2, pentru ca aceste valori medii temporale să fie egale cu valorile medii statistice corespunzătoare este necesar ca

$$w_1(x_1;n_1) = w_1(x_1) \tag{1.240}$$

$$w_2(x_1,x_2;n_1,n_2) = w_2(x_1,x_2;n_1-n_2) \tag{1.241}$$

adică procesele aleatoare trebuie să fie staționare în sens larg.

Fie $x[n]$ un proces aleator staționar în sens larg şi $x^{(k)}[n]$ o realizare particulară a acestuia. Un estimat temporal $\hat{m}_k$ al valorii medii temporale se poate obține din (1.222), prin relația:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{n_i=-N}^{N} x^{(k)}[n_i] \tag{1.242}$$

Considerând mulțimea realizărilor particulare, se poate determina un estimat statistic, $\hat{m}$, ca valoarea medie statistică a estimaților temporali rezultați din fiecare realizare particulară, adică:

$$\begin{aligned}\hat{m} = E\{\hat{m}_k\} &= \frac{1}{2\mathrm{N}+1}E\left\{\sum_{n_i=-N}^{N}\left\{x^{(k)}[n_i]\right\}\right\} = \\ &= \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{n_i=-N}^{N}E\left\{x[n_i]\right\}\end{aligned} \tag{1.243}$$

Dacă procesul este staționar în sens larg

$$E\left\{x[n_i]\right\} = m_x = const. \tag{1.244}$$

Din relațiile (1.243) şi (1.244) rezultă că în cazul proceselor aleatoare staționare în sens larg, estimatul statistic este egal cu valoarea medie statistică.

În general, dacă estimatul statistic este egal cu valoarea reală ce trebuie estimată, se spune că estimatul statistic este *nedeplasat*.

Varianța estimatului statistic $\hat{m}$ se poate deduce cu relația:

$$\mathrm{var}(\hat{m}) = E\left\{(\{\hat{m}_k\} - m_x)^2\right\} \tag{1.245}$$

Ținând cont de (1.243), relația (1.245) se poate scrie echivalent:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(\hat{m}) = E\left\{(\{\hat{m}_k\} - m_x)(\{\hat{m}_k\} - m_x)\right\} = \\
&E\left\{\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n_i=-N}^{N} x[n_i] - m_x\right)\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{k_i=-N}^{N} x[k_i] - m_x\right)\right\} = \\
&= E\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n_i=-N}^{N} (x[n_i] - m_x)\frac{1}{2N+1}\sum_{k_i=-N}^{N} (x[k_i] - m_x)\right) = \\
&\frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n_i=-N}^{N}\sum_{k_i=-N}^{N} E\left([x[n_i] - m_x][x[k_i] - m_x]\right) = \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n_i=-N}^{N}\sum_{k_i=-N}^{N} c_{xx}(n_i - k_i)
\end{aligned} \tag{1.246}$$

Relația (1.246) poate fi prelucrată, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(\widehat{m}) = \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n_i=-N}^{N}\sum_{k_i=-N}^{N} c_{xx}[n_i - k_i] = \\
&\frac{1}{(2N+1)^2}\left(\sum_{k_i=-N}^{N} c_{xx}[-N-k_i] + \sum_{k_i=-N}^{N} c_{xx}[-N+1-k_i] + \ldots + \sum_{k_i=-N}^{N} c_{xx}[N-k_i]\right) = \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\big[c_{xx}[0] + c_{xx}[-1] + \ldots + c_{xx}[-2N+1] + c_{xx}[-2N] + \\
&c_{xx}[1] + c_{xx}[0] + \ldots + c_{xx}[-2N+2] + c_{xx}[-2N+1] + \\
&\vdots \\
&c_{xx}[2N] + c_{xx}[2N-1] + \ldots + c_{xx}[1] + c_{xx}[0]\big] = \\
&\frac{1}{(2N+1)^2}\big[c_{xx}[2N] + 2c_{xx}[2N-1] + \ldots + 2Nc_{xx}[1] + [2N+1]c_{xx}[0] + \\
&2Nc_{xx}[-1] + [2N-1]c_{xx}[-2] + \ldots + 2c_{xx}[-2N+1] + c_{xx}[-2N]\big] =
\end{aligned} \tag{1.247}$$

$$\frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{l=-2N}^{2N}[2N+1-|l|]c_{xx}[l]=\frac{1}{(2N+1)}\sum_{l=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|l|}{2N+1}\right)c_{xx}[l]$$

Dacă

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2N+1)}\sum_{l=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|l|}{2N+1}\right)c_{xx}(l)=0, \qquad (1.248)$$

estimatul statistic $\hat{m}$ va tinde la m_x în valoare pătratică medie.

Procesul aleator $x[n]$, staționar în sens larg, pentru care este adevărată relația (1.248) se numeşte *ergodic în medie.*

Dacă procesul aleator este ergodic în medie, conform relațiilor (1.222) (1.244) şi (1.245), rezultă că valoarea medie temporală converge la valoarea medie statistică, adică se poate scrie $< x[n] >= E\{x[n_i]\} = m_x$.

Deoarece $i \in Z$, pentru simplificarea scrierii, uneori se renunță la indicele *i*, adică se va scrie $E\{x[n_i]\} = E\{x[n]\}$. Din acest motiv, prin abuz de limbaj, se spune valoarea medie statistică a procesului aleator $x[n]$ şi nu valoarea medie statistică a variabilei aleatoare $x[n_i]$ obținută din procesul aleator $x[n]$.

Estimatul statistic al estimaților temporali ai funcției de autocorelație, notat cu $\hat{r}$, se defineşte ca valoarea medie statistică a estimaților temporali ai funcției de autocorelație, $\hat{r}_k$

$$\hat{r}=E\{\hat{r}_k\}=E\left\{\frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{n_i=-N}^{N}x^{(k)}[n_1+n_i]x^{(k)}[n_2+n_i]\right\}= \\ \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{n_i=-N}^{N}E\{x[n_1+n_i]x[n_2+n_i]\} \qquad (1.249)$$

Dacă procesul $x[n]$ este staționar în sens larg, atunci

$$E\left(x[n_1+n_i]x[n_2+n_i]\right)=\gamma_{xx}[n_1-n_2] \qquad (1.250)$$

Înlocuind (1.250) în (1.249), rezultă că pentru un proces aleator $x[n]$ staționar în sens larg se poate scrie relația

$$\hat{r} = \gamma_{xx}[n_1 - n_2] = \gamma_{xx}[m] \tag{1.251}$$

unde $m = n_1 - n_2$.

Din relația (1.251) rezultă că estimatul statistic al estimaților temporali ai funcției de autocorelație a unui proces aleator discret în timp $x[n]$, staționar în sens larg, este egal cu funcția de autocorelație statistică.

Varianța estimatului $\hat{r}$ se poate deduce cu relația

$$\text{var}(\hat{r}) = E\left\{\left(\{\hat{r}_k\} - \gamma_{xx}[m]\right)^2\right\} \tag{1.252}$$

Ținând cont de (1.249), relația (1.252) se poate scrie echivalent:

$$\begin{aligned}
&\text{var}(\hat{r}) = E\left\{\left(\{\hat{r}_k\} - \gamma_{xx}[m]\right)\left(\{\hat{r}_k\} - \gamma_{xx}[m]\right)\right\} = \\
&= E\left\{\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n_i=-N}^{N} x[n_1+n_i]x[n_2+n_i] - \gamma_{xx}[m]\right)\cdot\right. \\
&\left.\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{k_i=-N}^{N} x[n_1+k_i]x[n_2+k_i] - \gamma_{xx}[m]\right)\right\} = \\
&\frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n_i=-N}^{N}\sum_{k_i=-N}^{N} E\left\{\left[x[n_1+n_i]x[n_2+n_i] - \gamma_{xx}[m]\right]\cdot\right. \\
&\left.\left[x[n_1+k_i]x[n_2+k_i] - \gamma_{xx}[m]\right]\right\}
\end{aligned} \tag{1.253}$$

Efectuând notațiile

$$\left.\begin{aligned}
n_1 + n_i &= n \\
n_2 + n_i &= n + m \\
n_1 + k_i &= k \\
n_2 + k_i &= k + m
\end{aligned}\right\} \tag{1.254}$$

Relația (1.253) devine

$$\operatorname{var}(\hat{r}) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=n_1-N}^{n_1+N} \sum_{k=n_1-N}^{n_1+N} E\left\{\left(x[n]x[n+m] - \gamma_{xx}[m]\right)\cdot\right. \tag{1.255}$$
$$\left.\left(x[k]x[k+m] - \gamma_{xx}[m]\right)\right\}$$

Valoarea medie statistică a termenului $x[n]x[n+m]x[k]x[k+m]$ este funcția de autocorelație a procesului aleator

$$v_m[n] = x[n]x[n+m] \tag{1.256}$$

Notând cu

$$\gamma_{vv}^{(m)} = E\left\{v_m[n]v_m[k]\right\} = \gamma_{vv}^{(m)}[n-k] \tag{1.256'}$$

relația (1.255) devine

$$\operatorname{var}(\hat{r}) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=n_1-N}^{n_1+N} \sum_{k=n_1-N}^{n_1+N} \gamma_{vv}^{(m)}[n-k] - \left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 =$$

$$\frac{1}{(2N+1)^2}\left(\sum_{k=n_1-N}^{n_1+N} \gamma_{vv}^{(m)}[n_1 - N - k] + \ldots + \sum_{k=n_1-N}^{n_1+N} \gamma_{vv}^{(m)}[n_1 + N - k] \right) -$$

$$-\left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(2N+1)^2}\left(\gamma_{vv}^{(m)}[0] + \gamma_{vv}^{(m)}[-1] + \ldots + \gamma_{vv}^{(m)}[-2N+1] + \gamma_{vv}^{(m)}[-2N] +\right.$$

$$\gamma_{vv}^{(m)}[1] + \gamma_{vv}^{(m)}[0] + \ldots + \gamma_{vv}^{(m)}[-2N+2] + \gamma_{vv}^{(m)}[-2N+1] +$$

$$\vdots$$

$$\left.\gamma_{vv}^{(m)}[2N] + \gamma_{vv}^{(m)}[2N-1] + \ldots + \gamma_{vv}^{(m)}[1] + \gamma_{vv}^{(m)}[0]\right) - \left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 =$$

$$\frac{1}{(2N+1)^2}\left(\gamma_{vv}^{(m)}[2N] + 2\gamma_{vv}^{(m)}[2N-1] + \ldots 2N\gamma_{vv}^{(m)}[1] + [2N+1]\gamma_{vv}^{(m)}[0] +\right.$$

$$\left.2N\gamma_{vv}^{(m)}[-1] + [2N-1]\gamma_{vv}^{(m)}[-2] + \ldots 2\gamma_{vv}^{(m)}[-2N+1] + \gamma_{vv}^{(m)}[-2N]\right) -$$

$$-\left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{l=-2N}^{2N} [2N+1-|l|]\gamma_{vv}^{(m)}[l] - \left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(2N+1)} \sum_{l=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|l|}{2N+1}\right) \gamma_{vv}^{(m)}[l] - \left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 \qquad (1.257)$$

Dacă

$$\lim_{N \to \infty} \left[\frac{1}{(2N+1)} \sum_{l=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|l|}{2N+1}\right) \gamma_{vv}^{(m)}(l) - \left(\gamma_{xx}[m]\right)^2 \right] = 0 \qquad (1.258)$$

atunci, $\mathrm{var}[\hat{r}] \to 0$ şi estimatul statistic $\hat{r}$ converge cu probabilitate 1 la $\gamma_{xx}[m]$, adică la funcția de autocorelație statistică.

Dacă relația (1.258) este îndeplinită, procesul aleator $x[n]$, staționar în sens larg se numeşte *ergodic în corelație*.

În cele ce urmează, procesele aleatoare vor fi considerate ergodice atât în medie, cât şi în corelație.

1.17. Proprietățile principale ale funcțiilor de corelație pentru procese aleatoare staționare în sens larg

Pentru categoria proceselor aleatoare discrete în timp staționare în sens larg, sunt adevărate următoarele relații:

$$\gamma_{xy}[k] = E\{x[n_1 - k] y^*[n_1]\} = E\{x[n_1] y^*[n_1 + k]\} \qquad (1.259)$$

$$\gamma_{xx}[k] = E\{x[n_1 - k] x^*[n_1]\} = E\{x[n_1] x^*[n_1 + k]\} \qquad (1.260)$$

$$c_{xy}[k] = E\left\{\left(x[n_1 - k] - m_x\right)\left(y[n_1] - m_y\right)^*\right\} \qquad (1.261)$$

$$c_{xx}[k] = E\left\{\left(x[n_1 - k] - m_x\right)\left(x[n_1] - m_x\right)^*\right\} \qquad (1.262)$$

Proprietatea 1

$$c_{xx}[k] = \gamma_{xx}[k] - |m_x|^2 \qquad (1.263)$$

$$c_{xy}[k] = \gamma_{xy}[k] - m_x m_y^* \tag{1.264}$$

Proprietatea 2

$$\gamma_{xx}[0] = E\left\{\left|x[n_1]\right|^2\right\} = \overline{\left|x[n_1]\right|^2} = \text{valoare pătratică medie} \tag{1.265}$$

$$c_{xx}[0] = \sigma_x^{\ 2} = \text{varianța sau dispersia} \tag{1.266}$$

Proprietatea 3

$$\gamma_{xx}[k] = \gamma_{xx}^{\ *}[-k] \tag{1.267}$$

$$c_{xx}[k] = c_{xx}^{\ *}[-k] \tag{1.268}$$

$$\gamma_{xy}[k] = \gamma_{yx}^{\ *}[-k] \tag{1.269}$$

$$c_{xy}[k] = c_{yx}^{\ *}[-k] \tag{1.270}$$

Proprietatea 4

$$\left|\gamma_{xy}[k]\right|^2 \le \gamma_{xx}[0]\gamma_{yy}[0] \tag{1.271}$$

$$\left|c_{xy}[k]\right|^2 \le c_{xx}[0]c_{yy}[0] \tag{1.272}$$

cu particularizarea

$$\left|\gamma_{xx}[k]\right| \le \gamma_{xx}[0] \tag{1.273}$$

$$\left|c_{xx}[k]\right| \le c_{xx}[0] \tag{1.274}$$

Proprietatea 5

Dacă

$$y[l] = x[l-k], \tag{1.275}$$

atunci

$$\gamma_{yy}[k] = \gamma_{xx}[k] \tag{1.276}$$

$$c_{yy}[k] = c_{xx}[k] \tag{1.277}$$

Proprietatea 6

Există procese aleatoare pentru care variabilele aleatoare devin necorelate cu creşterea separării lor în timp. În acest caz

$$\lim_{k\to\infty} c_{xx}\left[k\right]=0 \tag{1.278}$$

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_{xx}\left[k\right]=\left|m_x\right|^2 \tag{1.279}$$

$$\lim_{k\to\infty} c_{xy}\left[k\right]=0 \tag{1.280}$$

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_{xy}\left[k\right]=m_x m_y^* \tag{1.281}$$

1.18. Reprezentarea semnalelor aleatoare discrete în timp în domeniul frecvență

Reprezentarea spectrală a funcțiilor de corelație joacă un rol important în descrierea relațiilor intrare-ieşire pentru un sistem discret liniar invariant în timp, când la intrarea acestuia se aplică un semnal aleator.

Fie $\Gamma_{xx}(\omega), C_{xx}(\omega), \Gamma_{xy}(\omega)$ şi $C_{xy}(\omega)$ transformatele Fourier ale funcțiilor $\gamma_{xx}[m], c_{xx}[m], \gamma_{xy}[m]$, respectiv $c_{xy}[m]$. Deoarece acestea sunt discrete în timp, transformatele lor Fourier sunt periodice, de perioadă 2π .

Din (1.263) şi (1.264) rezultă că

$$\Gamma_{xx}\left(\omega\right)=C_{xx}\left(\omega\right)+2\pi m_x^2\delta\left(\omega\right) \ , \qquad \left|\omega\right|<\pi \tag{1.282}$$

$$\Gamma_{xy}\left(\omega\right)=C_{xy}\left(\omega\right)+2\pi \ m_x m_y \ \delta\left(\omega\right) \ , \quad \left|\omega\right|<\pi \tag{1.283}$$

Folosind transformatele Fourier inverse, se poate scrie

$$\gamma_{xx}\left[m\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}\left(\omega\right)e^{j\,\omega\,m}d\omega \tag{1.284}$$

$$c_{xx}\left[m\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C_{xx}\left(\omega\right)e^{j\omega m}d\omega \tag{1.285}$$

şi, în consecinţă

$$E\left\{(x[n])^2\right\} = \gamma_{xx}[0] = \sigma_x^{\ 2} + m_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(\omega)d\omega \quad (1.286)$$

care este puterea medie a semnalului.

$$\sigma_x^2 = c_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C_{xx}(\omega)d\omega \quad (1.287)$$

Mărimile $\Gamma_{xx}(\omega)$ şi $\Gamma_{xy}(\omega)$ se numesc *densitate spectrală de putere*, respectiv *densitate spectrală de putere de interacţiune*.

Dacă $\Gamma_{xx}(\omega)$ are o valoare constantă pentru întreg domeniul de valori al lui ω, procesul este cunoscut sub numele de *zgomot alb*.

Dacă $\Gamma_{xx}(\omega)$ este constantă numai într-o bandă de frecvenţă şi zero în rest, procesul este cunoscut sub numele de *zgomot alb de bandă limitată sau cvasialb.*

Datorită relaţiei de simetrie (1.267) rezultă că densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(\omega)$ este o mărime reală, iar pentru valori reale ale procesului aleator şi, implicit, ale funcţiei de autocorelaţie, densitatea spectrală de putere este o mărime reală şi pară, adică

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \Gamma_{xx}(-\omega) \quad (1.288)$$

În plus, densitatea spectrală de putere este nenegativă.

1.19. Răspunsul sistemelor discrete, liniare, invariante în timp la semnale aleatoare

Fie un sistem discret, liniar, invariant în timp, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, funcţia de sistem $H(z)$ şi răspunsul în frecvență $H(f)$, la intrarea căruia se aplică semnalul aleator, staționar în sens larg, discret în timp $x[n]$ de medie statistică m_x. În continuare, se va presupune ca $h[n]$ este real. Intrarea și ieșirea sistemului sunt legate prin suma de convoluție

$$y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{1.289}$$

Deoarece $x[n]$ este un semnal de intrare aleator, semnalul de ieşire $y[n]$ va fi, de asemenea, aleator, adică fiecărei variabile aleatoare $x[n_i]$ a procesului $x[n]$ îi va corespunde o variabilă aleatoare $y[n_i]$ a procesului discret de la ieşire, $y[n]$.

Caracterizarea statistică a semnalului de ieşire se poate efectua cu ajutorul caracteristicilor statistice ale semnalului de intrare.

1. *Valoarea medie a ieşirii* $y[n_i]$ este

$$\begin{aligned} m_y = E\{y[n_i]\} &= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_i-k]\right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\left[x[n_i-k]\right] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = m_x H(0) \end{aligned} \tag{1.290}$$

unde $H(0)$ se numeşte *câştigul în curent continuu.*

2. *Secvența de autocorelație a procesului aleator de la ieşirea sistemului* se determină astfel:

$$\begin{aligned} \gamma_{yy}[m] &= E\left[y[n_i]y[n_i+m]\right] = \\ &= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_i-k]\sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j]x[n_i+m-j]\right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[k]h[j]E\left[x[n_i - k]x[n_i + m - j]\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[k]h[j]\gamma_{xx}[k - j + m] \qquad (1.291)$$

Un caz particular al relației (1.291) se obține când intrarea este zgomot alb, caz în care

$$\gamma_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m] \qquad (1.292)$$

unde $\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0]$ este puterea semnalului de intrare iar $\delta[m]$ este impulsul unitate. În acest caz rezultă

$$\gamma_{yy}[m] = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[k+m] \qquad (1.293)$$

3. *Puterea medie a procesului de la ieşire* este [72]

$$\gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n] = \sigma_x^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 \, df \qquad (1.294)$$

4. *Densitatea spectrală de putere a semnalului de ieşire.*

Aplicând transformata Fourier relației (1.291) şi ținând cont de teorema Wiener Khintcine, se obține densitatea spectrală de putere a procesului de la ieşire:

$$\Gamma_{yy}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{yy}[m] e^{-j2\pi fm} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k]h[l]\gamma_{xx}[k - l + m] \right] e^{-j2\pi fm} = \qquad (1.295)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k]h[l] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[k - l + m] e^{-j2\pi fm} \right]$$

Efectuând schimbarea de variabilă $k - l + m = \theta$, rezultă

$$\Gamma_{yy}(f)=\Gamma_{xx}(f)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{j2\pi kl}\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}h[l]e^{-j2\pi fl}\right]= \\ =|H(f)|^2\,\Gamma_{xx}(f) \tag{1.296}$$

5. *Secvența de intercorelație dintre semnalul de intrare şi cel de ieşire* se obține multiplicând la stânga ambii termeni ai relației (1.289) cu $x[n_i-m]$ şi apoi mediind relația obținută, adică

$$\gamma_{xy}[m]=E\left[x[n_i-m]y[n_i]\right]=E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n_i-m]x[n_i-k]\right]= \\ =\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]E\left[x[n_i-m]x[n_i-k]\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\gamma_{xx}[m-k] \tag{1.297}$$

6. *Densitatea spectrală de putere de intercorelație* este atunci

$$\Gamma_{xy}(f)=H(f)\Gamma_{xx}(f) \tag{1.298}$$

Dacă $x[n]$ este zgomot alb, din (1.298) rezultă

$$\Gamma_{xy}(f)=\sigma_x^2 H(f) \tag{1.299}$$

1.20. Folosirea transformatei Z în calculul puterii medii

Puterea medie se poate calcula cu ajutorul relației (1.286), dar, uneori, este dificil a evalua această integrală. Cu ajutorul transformatei Z, calculul puterii semnalului poate fi mult simplificat în cazul frecvent întâlnit al sistemelor caracterizate de funcții de sistem raționale. Dacă procesul aleator de la intrare are valoarea medie statistică diferită de zero, transformata Z poate fi folosită pentru a reprezenta funcțiile de varianță, nu şi pe cele de corelație, deoarece, când semnalul are valoare medie diferită de zero, funcția sa de corelație va conține o componentă constantă care nu are reprezentare prin transformată Z.

Dacă însă valoarea medie a semnalului este zero, şi dacă transformata Z a lui $\gamma_{xx}[m]$ există, atunci, ținând cont de proprietatea că pentru semnale reale funcția de autocorelație este pară, $\gamma_{xx}[m] = \gamma_{xx}[-m]$, rezultă

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{xx}(z^{-1}) \tag{1.300}$$

Din (1.300) se observă că în cazul în care $\Gamma_{xx}(z)$ este o funcție rațională în z, polii şi zerourile lui $\Gamma_{xx}(z)$ apar în perechi reciproce. Deoarece $\gamma_{xx}[m]$ este o secvență bilaterală, transformata Z a părții cauzale va converge într-o regiune a planului Z ce este exteriorul unui cerc, iar transformata Z a părții necauzale, într-o regiune ce este interiorul unui cerc. Astfel, regiunea de convergență a lui $\Gamma_{xx}(z)$ trebuie să fie de forma $r_a < |z| < \frac{1}{r_a}$, cu $0 < r_a < 1$, unde r_a este cel mai mare modul subunitar al polilor.

Avantajul major al reprezentării cu ajutorul transformatei Z rezidă în faptul că, dacă $\Gamma_{xx}(z)$ este funcție rațională, puterea medie poate fi uşor calculată cu relația

$$E\{x^2[n_i]\} = \sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\}\big|_{m=0} \tag{1.301}$$

Din (1.296), în cazul în care răspunsul la impuls al sistemului este real, se poate scrie în domeniul Z

$$\Gamma_{yy}(z) = H(z)H(z^{-1})\Gamma_{xx}(z) \tag{1.302}$$

şi, corespunzător în domeniul timp

$$\gamma_{yy}[m] = h[m] * h[-m] * \gamma_{xx}[m] \tag{1.303}$$

unde “*” reprezintă operatorul de convoluție.

Dacă la intrare se aplică un zgomot alb de dispersie σ_x^2, atunci $\gamma_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$ şi funcţia de autocorelaţie a ieşirii este

$$\gamma_{yy}[m]=\sigma_x^2\left(h[m]*h[-m]\right) \qquad (1.304)$$

iar puterea semnalului de ieşire este

$$E\left\{y^2[n_i]\right\}=\gamma_{yy}[0]=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}h^2[n] \qquad (1.305)$$

Similar se poate scrie

$$E\left\{y^2[n_i]\right\}=\gamma_{yy}[0]=Z^{-1}\left\{\Gamma_{yy}(z)\right\}\Big|_{m=0} \qquad (1.306)$$

Fie un sistem cauzal şi stabil, cu funcţia de sistem raţională

$$H(z)=G\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-z_kz^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_kz^{-1}\right)}; \quad |z|>\max_k|p_k|, \max_k|p_k|<1 \qquad (1.307)$$

unde G este un factor de câştig.

Dacă la intrarea acestui sistem se aplică zgomot alb, staţionar, de dispersie σ_x^2, densitatea spectrală de putere a ieşirii este

$$\Gamma_{yy}(z)=\sigma_x^2H(z)H(z^{-1})=\sigma_x^2|G|^2\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-z_kz^{-1}\right)\left(1-z_kz\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_kz^{-1}\right)\left(1-p_kz\right)} \qquad (1.308)$$

Sistemul fiind cauzal şi stabil, polii acestuia sunt în interiorul cercului unitate, $|p_k|<1$. Polii $(p_k)^{-1}$, care sunt reciprocele acestora, sunt în afara cercului unitate. Regiunea de convergenţă pentru $\Gamma_{yy}(z)$ este, prin urmare,

$$\max_k |p_k| < |z| < \min_k \left|(p_k)^{-1}\right|.$$

Pentru astfel de funcții raționale, dacă $M < N$, şi funcția de sistem are numai poli simpli, descompunerea în fracții simple este de forma

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 |G|^2 \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_k^{'}}{1 - (p_k)^{-1} z^{-1}} \right) \right) \tag{1.309}$$

cu

$$\begin{aligned} A_k &= H(z) H(z^{-1}) \left(1 - p_k z^{-1}\right)\Big|_{z = p_k} \\ A_k^{'} &= H(z) H(z^{-1}) \left(1 - (p_k)^{-1} z^{-1}\right)\Big|_{z = (p_k)^{-1}} \end{aligned} \tag{1.310}$$

Funcția de autocorelație corespunzătoare relației (1.309) este

$$\gamma_{yy}[n] = \sigma_x{}^2 \sum_{k=1}^{N} \left(A_k (p_k)^n u[n] - A_k^{'} (p_k)^{-n} u[-n-1] \right) \tag{1.311}$$

de unde rezultă puterea medie

$$\sigma_y^2 = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2 \left(\sum_{k=1}^{N} A_k \right) \tag{1.312}$$

Exemplul 1.1.

Să se determine şi să se reprezinte densitatea spectrală de putere a procesului aleator discret în timp $x[n]$, a cărui funcție de autocorelație este : $\gamma_{xx}[k] = a^{|k|}, 0 < a < 1$.

Soluție

$$\Gamma_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (az)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

Prima progresie este convergentă, dacă $|az| < 1$, adică $|z| < \dfrac{1}{a}$, iar a doua, dacă $|az^{-1}| < 1$, adică $|z| > a$.

Domeniul comun de convergență rezultă $a < |z| < \frac{1}{a}$. În acest caz

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{az}{1-az} + \frac{z}{z-a} = \frac{1-a^2}{\left(1-az\right)\left(1-az^{-1}\right)}.$$

Deoarece domeniul de convergență include cercul unitate, are sens evaluarea lui $\Gamma_{xx}(z)$ pe acesta, pentru a obține densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(\omega)$. Înlocuind $z = e^{j\omega}$, rezultă

$$\Gamma_{xx}\left(\omega\right) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

În figura 1.15 s-a reprezentat funcția de autocorelație, iar în figura 1.16, densitatea spectrala de putere pentru două valori ale lui a.

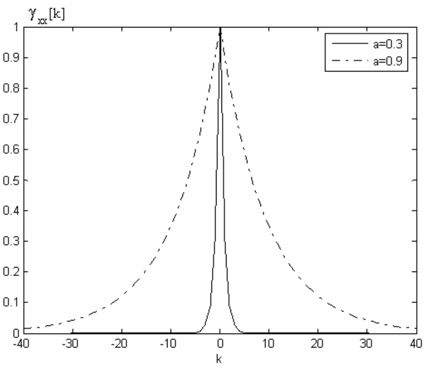


Fig. 1.15. Funcția de autocorelație

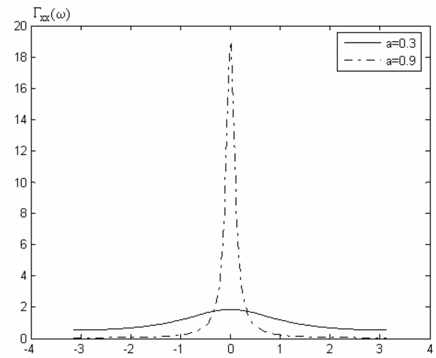


Fig. 1.16. Densitatea spectrală de putere

Exemplul 1.2.

Fie un sistem descris de ecuația cu diferențe: $x[n] = w[n] - w[n-1]$, a cărui intrare $w[n]$ este zgomot alb cu densitatea spectrală de putere $\Gamma_{ww}(z) = S_0$. Să se determine funcția de autocorelație şi densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşire.

Soluție

Funcția de sistem corespunzătoare este

$$H(z) = 1 - z^{-1}$$

Aplicând (1.302) rezultă

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ww}(z)\left(1 - z^{-1}\right)(1 - z) = \Gamma_{ww}(z)\left(2 - z^{-1} - z\right) =$$

$$S_0\left(2 - z^{-1} - z\right)$$

$$\gamma_{xx}[m] = -\gamma_{ww}[m+1] + 2\gamma_{ww}[m] - \gamma_{ww}[m-1]$$

În domeniul frecvență

$$\Gamma_{xx}(\omega) = S_0\left(2 - e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) = 2S_0(1 - \cos\omega)$$

Exemplul 1.3.

Ecuația recursivă $x[n] - ax[n-1] = w[n]$, cu $|a| < 1$, caracterizează un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal. Dacă $\Gamma_{ww}(z) = S_0$, să se determine $\Gamma_{xx}(z), \gamma_{xx}[m]$ şi valoarea pătratică medie a lui $x[n]$.

Soluție

Funcția de sistem este $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$.

$$\Gamma_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1})\Gamma_{ww}(z) = \frac{S_0}{\left(1 - az^{-1}\right)(1 - az)},$$

$$\gamma_{xx}[m] = Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\} = \frac{S_0}{a^{-1} + a}a^{|m|}$$

$$E\left\{\left|x[n_i]\right|^2\right\} = \gamma_{xx}[0] = \frac{aS_0}{1 + a^2}$$

1.21. Matricea de autocorelație a unui proces staționar

Fie vectorul de dimensiune N x 1

$$\mathbf{x}[n] = \left[x^{(k)}[n], x^{(k)}[n-1], ..., x^{(k)}[n-N+1]\right]^T \qquad (1.312)$$

numit realizare particulară trunchiată, ale cărui componente sunt N eşantioane consecutive prelevate din realizarea particulară $x^{(k)}[n]$, anterioare momentului $n+1$.

Procesul aleator $x[n] = \left\{x^{(k)}[n]\right\}$ se consideră staționar în sens larg şi ergodic. Se defineşte matricea de autocorelație prin

$$\mathbf{\Gamma} = E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\right\} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \cdots & \gamma_{xx}[-N+1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \cdots & \gamma_{xx}[-N+2] \\ \vdots & & & \\ \gamma_{xx}[N-1] & \gamma_{xx}[N-2] & \cdots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \qquad (1.313)$$

unde

$$\gamma_{xx}[k] = E\left\{x^{(k)}[m]x^{(k)}[m+k]\right\} \qquad (1.314)$$

În cazul semnalelor aleatoare complexe

$$\mathbf{\Gamma} = E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^H[n]\right\} \qquad (1.313')$$

unde indicele H semnifică operațiile de conjugare şi transpunere. Elementul $\gamma_{xx}[0]$ de pe diagonala principală are întotdeauna valoare reală, iar celelalte elemente ale matricei sunt, în general, complexe.

Având în vedere rolul foarte important pe care această matrice îl are în analiza statistică, în continuare se vor prezenta câteva proprietăți ale acesteia.

1) Matricea de autocorelație pentru un proces aleator, staționar în sens larg este *hermitică,* adică:

$$\mathbf{\Gamma}^H = \mathbf{\Gamma} \tag{1.315}$$

Acest lucru rezultă direct din definiția dată în relația (1.313) şi (1.267).

Pentru date cu valori reale, funcția de autocorelație este reală şi matricea de autocorelație este simetrică, adică elementele Γ_{ij} ale matricei de autocorelație au proprietatea că $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$.

2) Matricea $\mathbf{\Gamma}$ este o matrice *Toeplitz* (are toate elementele de pe diagonala principală egale, iar elementele de pe orice altă diagonală paralelă cu diagonala principală, de asemenea, egale între ele). Această proprietate este o consecință directă a faptului că procesul aleator s-a presupus staționar în sens larg.

3) Matricea $\mathbf{\Gamma}$ este *pozitiv semidefinită*, adică pentru orice vector complex nenul $\mathbf{u}$ de dimensiune $N \times 1$ are loc relația,

$$\mathbf{u}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u} \geq 0 \tag{1.316}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^H E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^H[n]\right\}\mathbf{u} = E\left\{\mathbf{u}^H \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^H[n]\mathbf{u}\right\} = \\ &= E\left\{\left|\mathbf{u}^H \mathbf{x}[n]\right|^2\right\} \geq 0 \end{aligned} \tag{1.317}$$

Dacă în relația (1.316) inegalitatea este strictă, matricea de autocorelație $\mathbf{\Gamma}$ este pozitiv definită. Pentru o astfel de matrice, determinantul şi toți minorii săi principali sunt mai mari decât zero. Aceste condiții implică faptul că matricea de autocorelație este nesingulară, adică este inversabilă.

4) Fie $\mathbf{x}^B[n]$ vectorul obținut inversând ordinea elementelor vectorului $\mathbf{x}[n]$:

$$\mathbf{x}^B[n]=\left[x[n-N+1],x[n-N+2],...,x[n]\right]^T \qquad (1.318)$$

Matricea de autocorelație a acestui vector se obține prin transpunerea matricei $\mathbf{\Gamma}$ inițiale, adică

$$E\left\{\mathbf{x}^B[n]\mathbf{x}^{BH}[n]\right\}=\mathbf{\Gamma}^T \qquad (1.319)$$

5) Matricea $\mathbf{\Gamma}$ așa cum a fost definită, este de dimensiune $N\times N$. Pentru a evidenția acest lucru, se poate adăuga un indice inferior ($\mathbf{\Gamma}_N$). Adăugând încă un element la vectorul $\mathbf{x}[n]$ va rezulta o *matrice de autocorelație extinsă* de dimensiune $(N+1)\times(N+1)$, notată cu $\mathbf{\Gamma}_{N+1}$. Sunt posibile următoarele partiții:

$$\mathbf{\Gamma}_{N+1}=\begin{bmatrix}\gamma_{xx}[0] & \boldsymbol{\gamma}^H \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{\Gamma}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_N & \boldsymbol{\gamma}^{B*} \\ \boldsymbol{\gamma}^{BT} & \gamma_{xx}[0]\end{bmatrix} \qquad (1.320)$$

unde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}^H &=\left[\gamma_{xx}[1],\gamma_{xx}[2],...,\gamma_{xx}[N]\right]\\ \boldsymbol{\gamma}^{BT} &=\left[\gamma_{xx}[-N],\gamma_{xx}[-N+1],...,\gamma_{xx}[-1]\right]\end{aligned} \qquad (1.321)$$

6) Fie λ_i valorile proprii ale matricei $\mathbf{\Gamma}$, adică rădăcinile ecuației caracteristice

$$\det\left(\mathbf{\Gamma}-\lambda\mathbf{I}\right)=0 \qquad (1.322)$$

și $\mathbf{q}_i$ vectorii proprii asociați,

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_i=\lambda_i\mathbf{q}_i,\quad i=1,....,N \qquad (1.323)$$

Valorile proprii ale matricei $\mathbf{\Gamma}^k$, unde k este întreg, sunt λ_i^k, $i=1,2,...,N$.

7) Ca o consecință a proprietăților 1 şi 3, toate valorile proprii ale matricei de autocorelație sunt reale şi pozitive. Într-adevăr, înmulțind la stânga relația (1.323) cu $\mathbf{q}_i^H$ se obține

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{q}_i^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_i} \geq 0 \qquad (1.324)$$

8) Vectorii proprii $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_j$, corespunzători unor valori proprii distincte, $\lambda_i \neq \lambda_j, i, j = 1, ..., N; i \neq j$, sunt ortogonali, adică

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = 0 \qquad (1.325)$$

Într-adevăr, conform definiției, se poate scrie

$$\mathbf{\Gamma q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i ; \mathbf{\Gamma q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j \qquad (1.326)$$

Se înmulţeşte la stânga prima relație din (1.326) cu $\mathbf{q}_j^H$, rezultând

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{\Gamma q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i \qquad (1.327)$$

Celei de-a doua relații din (1.326) i se aplică o transpunere hermitică (transpunere şi conjugare complexă) şi, ținând seama şi de proprietatea 1, rezultă

$$(\mathbf{\Gamma q_j})^{\mathbf{H}} = \mathbf{q}_j^H \mathbf{\Gamma}^H = \mathbf{q}_j^H \mathbf{\Gamma} = \lambda_j \mathbf{q}_j^H \qquad (1.328)$$

Înmulțind relația (1.328) cu $\mathbf{q}_i$ la dreapta, se obține

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{\Gamma q}_i = \lambda_j \mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i \qquad (1.329)$$

care, scăzută din ecuația (1.327) conduce la

$$\left(\lambda_i - \lambda_j\right) \mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = 0 \qquad (1.330)$$

care demonstrează proprietatea enunțată. În particular, deoarece prin înmulțirea unui vector propriu cu o constantă se obține tot un vector propriu, se poate construi un set ortonormat de vectori proprii, astfel încât

$$\mathbf{p}_j{}^H\mathbf{p}_i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (1.331)$$

unde $\mathbf{p}_j = c_j\mathbf{q}_j$, $\mathbf{p}_i = c_i\mathbf{q}_i$ şi c_j, c_i constante ce asigură normarea din relația precedentă.

9) Dacă valorile proprii λ_i, $i = 1,....,N$ sunt distincte, atunci vectorii proprii $\mathbf{q}_i$ sunt liniar independenți, şi pot fi utilizați ca o bază pentru reprezentarea oricărui vector **w** în spațiul vectorial N-dimensional.

10) Matricea $\mathbf{\Gamma}$ poate fi diagonalizată în cazul în care valorile proprii sunt distincte, conform relației:

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad (1.332)$$

unde

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_N]; \mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \quad (1.333)$$

Matricea **Q** are proprietatea că

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I},\ sau\ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H \quad (1.334)$$

Într-adevăr, având în vedere relațiile (1.323) şi (1.333), se poate scrie

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} \quad (1.335)$$

Înmulțind relația (1.335) la stânga cu $\mathbf{Q}^H$ rezultă (1.332).

Înmulțind la dreapta relația (1.335) cu $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H$ rezultă *teorema lui Mercer* sau *teorema spectrală*:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i{}^H \quad (1.336)$$

11) *Urma matricei* $\mathbf{\Gamma}$, notată cu $tr(\mathbf{\Gamma})$, adică suma elementelor de pe diagonala principală, este egală cu suma valorilor proprii

$$tr(\mathbf{\Gamma}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \quad (1.337)$$

Cum toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu $\gamma_{xx}[0]$, din (1.337) rezultă că

$$\gamma_{xx}[0] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \quad (1.338)$$

12) Se defineşte *norma spectrală* a unei matrice **A** prin

$$\|\mathrm{A}\|_S = \left(\text{valoarea proprie maximă a matricei } \mathrm{A}^{\mathrm{H}}\mathrm{A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.339)$$

În cazul matricei $\mathbf{\Gamma}$, ținând seama de proprietățile 1 şi 6, aceasta înseamnă că

$$\|\mathbf{\Gamma}\|_S = \lambda_{\max} \quad (1.340)$$

Se defineşte *numărul condițional* al unei matrice, prin

$$\chi(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_S \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_S \quad (1.341)$$

În cazul matricei $\mathbf{\Gamma}$:

$$\|\mathbf{\Gamma}\|_S = \lambda_{\max}; \left\|\mathbf{\Gamma}^{-1}\right\|_S = \frac{1}{\lambda_{\min}}, \Rightarrow \chi(\mathbf{\Gamma}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (1.342)$$

unde $\lambda_{\min}$ şi $\lambda_{\max}$ reprezintă valoarile proprii minimă şi, respectiv, maximă ale matricei $\mathbf{\Gamma}$.

13) *Câtul Rayleigh* asociat unui vector **u** nenul, de dimensiune $N \times 1$, este definit prin

$$\frac{\mathbf{u}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}} \quad (1.343)$$

Se poate demonstra că [39]

$$\lambda_{\min} = \min \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{R} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}}; \lambda_{\max} = \max \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{R} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}} \quad (1.344)$$

În continuare sunt prezentate câteva exemple de matrice de autocorelație pentru diverse tipuri de semnale aleatoare.

1) Cazul zgomotului alb:

$$\gamma_{xx}[k] = E\left\{x[n_i]x^*[n_i+k]\right\} = \begin{cases} \sigma^2, k=0 \\ 0, \quad k \neq 0 \end{cases}$$

de unde rezultă matricea de autocorelație $\mathbf{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{I}$, unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate.

2) Cazul unei sinusoide complexe, $x[n] = Ae^{jn\omega}$, $A = |A|e^{j\varphi}$ în care A și ω sunt constante, iar φ este o variabilă aleatoare.

$$\gamma_{xx}[k] = E\left\{|A|e^{j\varphi}e^{jn_i\omega}|A|e^{-j\varphi}e^{-j(n_i+k)\omega}\right\} = |A|^2 e^{-jk\omega}$$

$$\mathbf{\Gamma} = |A|^2 \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega} & .\ .\ .\ . & e^{-j(N-1)\omega} \\ e^{j\omega} & 1 & .\ .\ .\ . & e^{-j(N-2)\omega} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ e^{j(N-1)\omega} & e^{j(N-2)\omega} & .\ .\ .\ . & 1 \end{bmatrix} = |A|^2 \mathbf{e}(\omega)\mathbf{e}^H(\omega)$$

unde

$$\mathbf{e}(\omega) = \left[1, e^{-j\omega}, ..., e^{-j(N-1)\omega}\right]^T$$

3) Sinusoidă complexă însumată cu zgomot alb, cu valoare medie nulă,

$$x[n] = Ae^{jn\omega} + w[n]$$

$$\gamma_{xx}[k] = E\left\{x[n_i]x^*[n_i+k]\right\} = \begin{cases} |A|^2 + \sigma^2, k=0 \\ |A|^2 e^{jk\omega}, \quad k \neq 0 \end{cases}$$

$$
\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} |A|^2+\sigma^2 & |A|^2 e^{j\omega} & . \; . \; . \; . & |A|^2 e^{j(N-1)\omega} \\ |A|^2 e^{-j\omega} & |A|^2+\sigma^2 & . \; . \; . \; . & |A|^2 e^{j(N-2)\omega} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ |A|^2 e^{-j(N-1)\omega} & |A|^2 e^{-j(N-2)\omega} & . \; . \; . \; . & |A|^2+\sigma^2 \end{bmatrix}
$$

1.22. Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală. Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

În cele ce urmează se va demonstra că un proces aleator staționar în sens larg, poate fi reprezentat ca ieşirea unui sistem liniar, invariant în timp, cauzal, inversabil [72] excitat de un zgomot alb.

Fie un proces aleator staționar în sens larg $x[n]$ cu funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$. Transformata Z a funcției de autocorelatie $\gamma_{xx}[m]$ este

$$
\Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m] z^{-m} \qquad (1.345)
$$

Dacă această expresie este convergentă într-o regiune a planului Z care conține cercul unitate, din relația (1.345) se obține densitatea spectrală de putere, prin evaluarea sa pe cercul unitate ($z = e^{j2\pi f}$).

Se presupune că $\log\Gamma_{xx}(z)$ este analitică (adică $\log\Gamma_{xx}(z)$ şi derivatele sale de orice ordin sunt continue) într-o regiune inelară a planului Z, care include cercul unitate ($r_1 < |z| < r_2$ cu $r_1 < 1$ şi $r_2 > 1$). Astfel, $\log \Gamma_{xx}(z)$ se poate descompune în serie Laurent:

$$\log \Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] z^{-m} \tag{1.346}$$

unde $\{v[m]\}$ sunt coeficienţii dezvoltării în serie. Aceştia pot fi consideraţi ca o secvenţă a cărei transformată Z este $V(z) = \log \Gamma_{xx}(z)$. Prin evaluarea expresiei $\log \Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate se obţine:

$$\log \Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] e^{-j2\pi fm} \tag{1.347}$$

astfel încât $\{v[m]\}$ sunt coeficienţii dezvoltării în serie Fourier a funcţiei periodice $\log \Gamma_{xx}(f)$.

$$v[m] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\log \Gamma_{xx}(f)\right] e^{j2\pi fm} df \text{ , } m \in Z \tag{1.348}$$

Din relaţia (1.346) rezultă:

$$\Gamma_{xx}(z) = e^{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} v[m] z^{-m}} = e^{v[0]} e^{\sum\limits_{m=-\infty}^{-1} v[m] z^{-m}} e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} v[m] z^{-m}} \tag{1.349}$$

Se defineşte

$$\sigma_w^2 = e^{v[0]} \text{ şi } H(z) = e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} v[m] z^{-m}} \text{ , } \quad |z| > r_1 \tag{1.350}$$

Deoarece $\log \Gamma_{xx}(f)$ este o funcţie reală, coeficienţii dezvoltării sunt conjugat simetrici $v[m] = v^*[-m]$. Al doilea termen din factorizarea lui $\Gamma_{xx}(f)$ poate fi scris sub forma

$$
\begin{aligned}
& e^{\sum_{m=-\infty}^{-1} v[m]z^{-m}} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} v[-n]z^{n}} = e^{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(v[-n]z^{n}\right)^{*}\right)^{*}} = \\
& = e^{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(v[-n]\right)^{*}\left(z^{*}\right)^{n}\right)^{*}} = e^{\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v[n]\left(\frac{1}{z^{*}}\right)^{-n}\right\}^{*}} = H^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right)
\end{aligned}
\tag{1.351}
$$

aşa încât

$$
\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right) \tag{1.352}
$$

Un proces care îndeplineşte condiţiile anterioare şi admite o asemenea factorizare spectrală se numeşte *proces regulat*.
Prin evaluarea relației (1.349) pe cercul unitate se obține o reprezentare echivalentă a densității spectrale de putere sub forma

$$
\Gamma_{xx}\left(f\right) = \sigma_w^2 \left|H\left(f\right)\right|^2 \tag{1.353}
$$

Se observă că

$$
\begin{aligned}
& \log \Gamma_{xx}\left(f\right) = \log \sigma_w^2 + \log H\left(f\right) + \log H^{*}\left(f\right) = \\
& = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v\left[m\right] e^{-j2\pi fm}
\end{aligned}
\tag{1.354}
$$

Din definiția (1.350) a lui $H\left(z\right)$ se observă că partea cauzală a seriei Fourier din (1.347) este asociată cu $H(z)$, iar cea necauzală, cu $H^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right)$.

Pentru valori reale ale procesului [72]

$$
H^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right) = H\left(z^{-1}\right) \tag{1.355}
$$

Coeficienții $v\left[m\right]$ ai seriei Fourier se numesc coeficienți *cepstrali*, iar secvența $\left\{v\left[m\right]\right\}$ se numeşte *cepstrul secvenței* $\gamma_{xx}\left[m\right]$.

Filtrul cu funcția de sistem $H(z)$ dată de relația (1.350) este analitic în regiunea $|z| > r_1 < 1$, astfel încât descompunerea sa în serie Taylor caracterizează un sistem cauzal

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \tag{1.356}$$

Ținând seama de relațiile (1.350) şi (1.356), relației (1.353) i se poate asocia următoarea interpretare:

Oricare ar fi $x[n]$, un proces aleator, staționar, cu medie nulă şi densitate spectrală de putere finită, acesta se poate obține la ieşirea unui filtru liniar, cauzal şi invariant în timp, $H(z)$, convenabil ales, dacă la intrarea sa se aplică zgomot alb cu densitatea spectrală de putere σ_w^2. Această situație este reprezentată în figura 1.16a.

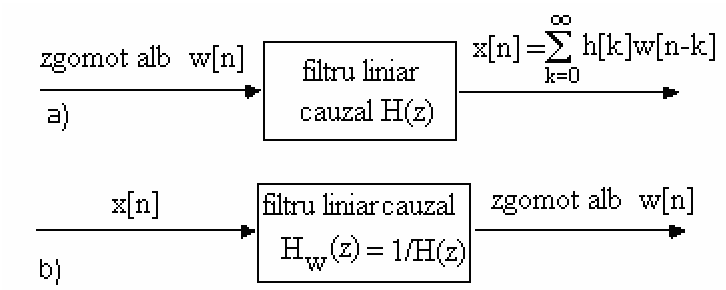


Figura 1.16. Filtre pentru generarea: a) unui proces aleator din zgomot alb, b) unui zgomot alb dintr-un proces aleator

Situația în care filtrul $H(z)$ este de fază minimă (nu are zerouri pe sau în exteriorul cercului unitate) prezintă interes special, deoarece în acest caz există un sistem invers, cauzal, cu funcția de transfer $H_w(z) = \dfrac{1}{H(z)}$, care "albeşte" procesul $x[n]$. Un astfel de filtru se va numi *filtru de albire*. Ieşirea sa, notată cu $w[n]$, este zgomot alb asociat procesului aleator staționar $x[n]$. Această situație este reprezentată în figura 1.16b. Evident, regiunile de convergență pentru $H(z)$ şi $H_w(z)$ sunt diferite, iar condiția de fază minimă pentru un filtru asigură stabilitatea celuilalt, şi invers.

Dacă $\Gamma_{xx}(z)$ este o funcție rațională, atunci H(z) are, de asemenea, o expresie rațională, $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$ şi factorizarea spectrală are forma

$$\Gamma_{xx}(z)=\sigma_w^2 H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)=\sigma_w^2\frac{B(z)B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z)A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \qquad (1.357)$$

unde

$$A(z)=1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k} \qquad (1.358)$$

şi

$$B(z)=1+\sum_{k=1}^{q}b_k z^{-k} \qquad (1.359)$$

sunt polinoame cu zerourile în interiorul cercului unitate.

1.23. Modelarea proceselor aleatoare

Fie cazul în care densitatea spectrală de putere a unui proces aleator staționar $x[n]$ este o funcție rațională, exprimată sub forma

$$\Gamma_{xx}(z)=\sigma_w^2\frac{B(z)B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z)A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)};\quad r_1<|z|<r_2,\, r_1<1,\, r_2>1 \qquad (1.360)$$

unde polinoamele $B(z)$ şi $A(z)$ au rădăcini în interiorul cercului unitate din planul Z. Funcția de sistem $H(z)$ a filtrului care generează procesul aleator $x[n]$, dacă este excitat cu zgomot alb, este de forma

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \;;\; |z|>r_1,\, r_1<1 \tag{1.361}$$

unde $\{b_k\}$ şi $\{a_k\}$ sunt coeficienții care determină pozițiile polilor şi zerourilor filtrului. Filtrul caracterizat de $H(z)$ este cauzal, stabil şi de fază minimă. Filtrul invers, caracterizat de funcția de sistem $\frac{1}{H(z)}$, este, de asemenea, cauzal, stabil şi de fază minimă. Prin urmare, procesul aleator $x[n]$ poate fi reprezentat de coeficienții filtrului şi zgomotul $w[n]$.

Ecuația cu diferențe pentru sistemul liniar caracterizat de (1.361) este

$$x[n]+\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k]=\sum_{k=0}^{q} b_k w[n-k] \tag{1.362}$$

unde $w[n]$ este zgomot alb.

Se disting trei situații:

a) *Proces autoregresiv cu medie alunecătoare* (ARMA), notat $ARMA(q,p)$. În acest caz filtrul liniar cu funcția de sistem $H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$ are poli şi zerouri nebanale. Sistemul care generează zgomot alb din $x[n]$ este de asemenea cu poli şi zerouri şi are funcţia de sistem $H_w(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{A(z)}{B(z)}$.

b) Proces autoregresiv (AR), notat $AR(p)=ARMA(0,p)$, pentru care $b_0=1, b_k=0, k>0$, caz în care $H(z)=\frac{1}{A(z)}$ caracterizează un filtru numai cu poli. Ecuaţia cu diferenţe corespunzătoare este

$$x[n]+\sum_{k=1}^{p}a_k x[n-k]=w[n] \qquad (1.363)$$

Filtrul de albire caracterizat de funcţia de sistem $H_w(z)=\frac{1}{H(z)}$, care generează un proces de zgomot alb, când este excitat cu $x[n]$, este, evident, un filtru numai cu zerouri.

c) *Proces cu medie mobilă* (alunecătoare) (MA), notat $MA(q)=ARMA(q,0)$, $a_k=0, k\geq 1$, caz în care $H(z)=B(z)$ este un filtru numai cu zerouri caracterizat de ecuaţia cu diferenţe

$$x[n]=\sum_{k=0}^{q}b_k w[n-k] \qquad (1.364)$$

Filtrul de albire pentru procesul MA are numai poli.

Se face menţiunea că adoptarea modelului sub forma unei expresii raţionale pentru densitatea spectrală de putere, dat în relaţia (1.356), s-a făcut datorită următoarelor motive:

1- evaluarea numerică a parametrilor necunoscuţi este relativ simplă,

2 - un spectru arbitrar poate fi aproximat destul de fidel de acest model.

1.24. Relații între parametrii modelului şi secvența de autocorelație a procesului

Fie, în general, un filtru cu funcția de sistem dată de (1.361). Dacă acest filtru este excitat cu zgomot alb, atunci densitatea spectrală de putere a procesului aleator staționar rezultat la ieşirea acestuia este o funcție rațională, putându-se stabili o legătură între secvența de autocorelație a procesului, $\gamma_{xx}\left[m\right]$, şi parametrii a_k şi b_k ai filtrului. Aceasta se poate obține multiplicând la dreapta relația (1.362) cu $x^*\left[n-m\right]$ şi apoi mediind ambii membri ai ecuației rezultate pentru $n=n_i$. Dacă procesul aleator $x[n]$ are valori reale, multiplicarea se face cu $x\left[n-m\right]$.

$$E\left[x\left[n_i\right]x^*\left[n_i-m\right]\right]=-\sum_{k=1}^{p}a_k E\left[x\left[n_i-k\right]x^*\left[n_i-m\right]\right]+ \\ +\sum_{k=0}^{q}b_k E\left[w\left[n_i-k\right]x^*\left[n_i-m\right]\right] \tag{1.365}$$

adică

$$\gamma_{xx}\left[m\right]=-\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}\left[m-k\right]+\sum_{k=0}^{q}b_k\gamma_{xw}\left[m-k\right] \tag{1.366}$$

unde $\gamma_{xw}\left[m\right]$ este secvența de corelație între $x\left[n\right]$ şi $w\left[n\right]$.

Secvența de corelație $\gamma_{xw}\left[m\right]$ se poate exprima în funcție de răspunsul la impuls al filtrului $h[n]$, după cum urmează:

$$\gamma_{xw}\left[m\right]=E\left\{x^*\left[n_i\right]w\left[n_i+m\right]\right\}=$$
$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}h\left[k\right]w^*\left[n_i-k\right]w\left[n_i+m\right]\right\}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h[k] E\left\{w^*[n_i - k] w[n_i + m]\right\} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} h[k] \gamma_{ww}[k+m] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sigma_w^2 \delta[k+m] = \sigma_w^2 h[-m] \quad (1.367)$$

unde σ_w^2 este dispersia zgomotului alb. Înseamnă, deci, că

$$\gamma_{wx}[m] = \begin{cases} 0, \, m > 0 \\ \sigma_w^2 h[-m], \, m \le 0 \end{cases} \quad (1.367')$$

Ținând seama de (1.367'), al doilea termen al sumei (1.366) se prelucrează după cum urmează:

$$\sum_{k=0}^{q} b_k \gamma_{xw}[m-k] = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q} b_k h[k-m] \overset{k-m=p}{=} \sigma_w^2 \sum_{p=-m}^{q-m} b_{p+m} h[p] =$$
$$= \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h[k] \quad (1.368)$$

numai pentru $k - m \ge 0$ şi cum $0 \le k \le q$, rezultă $0 \le m \le q$. Pentru $m > q$, limita superioară a sumei este negativă, ceea ce implică argumente negative pentru răspunsul la impuls, caz în care acesta este egal cu zero şi suma devine egală cu zero.

Din (1.366) şi (1.368) rezultă

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}[m-k], m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m}, 0 \le m \le q \\ \gamma_{xx}^*[-m], m < 0 \end{cases} \quad (1.369)$$

Relațiile (1.369) dintre funcția de autocorelație a procesului şi parametrii modelului sunt valabile pentru un proces ARMA.

Aceste relații sunt neliniare din cauza termenului $\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m}$, în care $h[k]$ se determină din raportul polinoamelor $B(z)$ şi $A(z)$, depinzând astfel de coeficienții a_k şi b_k.

Pentru un proces AR, relațiile (1.369) se simplifică, devenind

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}[m-k], m > 0 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2, m = 0 \\ \gamma_{xx}^*[-m], m < 0 \end{cases} \qquad (1.370)$$

În acest caz relațiile dintre $\gamma_{xx}[m]$ şi $\{a_k\}$ sunt liniare. Acestea se numesc ecuațiile *Yule-Walker* şi se exprimă matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[-2] & .... & \gamma_{xx}[-p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & .... & \gamma_{xx}[-p+1] \\ . & . & . & . & . \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & .... & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1.370')

Matricea de corelație este de tip Toeplitz şi există algoritmi pentru inversarea ei.

Prin impunerea $a_k = 0$; $1 \le k \le p; h[k] = b_k; 0 \le k \le q$ în relația (1.369), rezultă relațiile dintre funcția de autocorelație şi parametrii modelului în cazul unui proces MA, adică

$$\gamma_{xx}[m]=\begin{cases}\sigma_w^2\sum_{k=0}^{q}b_k b_{k+m},0\le m\le q\\0,m>q\\\gamma_{xx}^*[-m],m<0\end{cases}\qquad(1.371)$$

În principiu, relațiile (1.369) permit determinarea parametrilor modelului, dacă se cunosc valorile funcției de autocorelație. Cum, însă, în foarte multe cazuri, funcția de autocorelație nu este cunoscută, valorile acesteia pot fi estimate pe baza unui număr de eşantioane (măsurări sau observații) ale unei realizări particulare a procesului aleator. Invers, când se cunosc parametrii modelului, funcția de autocorelație se poate determina recursiv. Alegerea modelului adecvat procesului este un demers esențial, în care numărul de parametri este cel minim necesar reprezentării fidele a procesului.

Dacă procesul se caracterizează printr-o densitate spectrală de putere cu maxime ascuțite, este indicată alegerea unui model AR, cu poli situați în apropierea cercului unitate, care să producă acele maxime. Dacă, însă, densitatea spectrală de putere se caracterizează prin minime pronunțate, eventual anulări, este indicată alegerea unui mode MA, cu zerouri plasate în apropierea sau pe cercul unitate la frecvențe corespunzătoare acelor minime. Când intervin ambele tipuri de comportări ale densității spectrale de putere, se va alege un model ARMA.

1.25. Probleme rezolvate

1. Un punct efectuează o mişcare armonică de forma $x=a\sin\omega t$. Să se determine densitatea de repartiție de ordinul întâi, $w_1(x)$, a mărimii x în orice moment de timp t, dacă probabilitatea aflării punctului în intervalul (x, x+dx] este proporțională cu lungimea intervalului dx şi invers proporțională cu viteza din momentul de timp corespunzător. Să se determine apoi funcția de repartiție de ordinul întâi, $F_1(x)$, şi probabilitatea ca punctul să se afle în intervalul $(-a < x \leq -a/2)$.

Soluție

Conform relației (1.68), se poate scrie:

$$w_1(x)dx = Cdt$$

unde C este o constantă de proporționalitate.

Rezultă atunci:

$$w_1(x) = C\frac{dt}{dx} = \frac{C}{\frac{dx}{dt}} = \frac{C}{a\omega\cos\omega t} = \frac{C}{a\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t}} =$$

$$= \frac{C}{a\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{C}{\omega\sqrt{a^2-x^2}}$$

Deoarece $w_1(x)$ este o mărime reală, rezultă:

$$w_1(x) = \frac{C}{\omega\sqrt{a^2-x^2}} \text{ , pentru } |x| < a$$

Pentru determinarea constantei de proporționalitate, se foloseşte relația generală:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x_1;t_1)dx_1 = 1$$

În acest caz:

$$\int_{-a}^{a} \frac{Cdx}{\omega\sqrt{a^2-x^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{C}{\omega}\arcsin\frac{x}{a}\bigg|_{-a}^{a} = 1 \Rightarrow C = \frac{\omega}{\pi}$$

Deci:

$$w_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ pentru } |x| < a$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} w_1(x)dx = \int_{-a}^{x} \frac{dx}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$P\left\{-a < x \le -\frac{a}{2}\right\} = \int_{-a}^{-\frac{a}{2}} w_1(x)dx = \int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} w_1(x)dx - \int_{-\infty}^{-a} w_1(x)dx =$$

$$= F_1\left(-\frac{a}{2}\right) - F_1(\infty) - F_1(-a) + F_1(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\arcsin(-1) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Valoarea efectivă a tensiunii fluctuante ce corespunde zgomotului staționar cu componentă continuă nulă descris de o lege de repartiție normală este U_{ef}=16V. Sã se determine probabilitatea ca zgomotul să depăşească nivelul de prag U_p=20V. Se dă valoarea funcției Laplace F(1,25)=0,895.

Soluție

Conform relației (1.67), legea de repartiție a zgomotului, reprezentat prin tensiunea fluctuantă, este de forma:

$$w_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}} e^{-\frac{u^2}{2U_{ef}^2}} = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{16^2}}$$

Conform relației (1.77), rezultă:

$$P\left\{u \geq U_p\right\} = P\left\{u \geq 20\right\} = \int_{20}^{\infty} w_1(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(u)du - \int_{-\infty}^{20} w_1(u)du =$$

$$= F(\infty) - \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{20} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{16^2}} du$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\frac{u}{16} = v\,,\, du = 16dv$$

rezultă:

$$P\left\{u \geq 20\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{20}{16}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - F\left(\frac{20}{16}\right) = 1 - F(1{,}25) =$$
$$= 1 - 0{,}895 = 0{,}105$$

3. Funcția caracteristică este definită ca transformata Fourier a densității de repartiție de ordinul întâi cu semnul lui ω inversat, adică o funcție $\psi(\omega)$ de forma:

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) e^{j\omega x} dx$$

Să se demonstreze că

$$\overline{f(t_1)} = m_1\left\{f(t_1)\right\} = \frac{1}{j}\left[\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0}$$

$$\overline{f^2(t_1)} = m_1\left\{f^2(t_1)\right\} = \frac{1}{j^2}\left[\frac{d^2\psi(\omega)}{d\omega^2}\right]_{\omega=0}$$

etc., unde $j = \sqrt{-1}$.

Să se calculeze apoi, pe această cale, valoarea medie în cazul legii de repartiție uniforme, definite prin relația:

$$w_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \quad , \qquad \text{pentru} \quad a \le x \le b \\ 0 \quad , \qquad \text{pentru} \quad x > b \quad si \quad x < a \end{cases}$$

Soluție

$$\left.\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} jxw_1(x)e^{j\omega x}dx\right]_{\omega=0} = j\int_{-\infty}^{\infty} xw_1(x)dx = j\overline{f(t_1)} \Rightarrow$$

$$\overline{f(t_1)} = \frac{1}{j}\left[\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0}$$

$$\left.\frac{d^2\psi(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} j^2x^2w_1(x)e^{j\omega x}dx\right]_{\omega=0} =$$

$$= j^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2w_1(x)dx = j^2\overline{f^2(t_1)} \Rightarrow \overline{f^2(t_1)} = \frac{1}{j^2}\left[\frac{d^2\psi(\omega)}{d\omega^2}\right]_{\omega=0}$$

În cazul legii de repartiție uniforme, funcția caracteristică este de forma:

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)e^{j\omega x}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{j\omega x}dx = \frac{1}{j\omega(b-a)}(e^{j\omega b} - e^{j\omega a})$$

$$\left.\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{1}{b-a}\left.\frac{(jbe^{j\omega b} - jae^{j\omega a})j\omega - j(e^{j\omega b} - e^{j\omega a})}{j^2\omega^2}\right|_{\omega=0} = j\frac{b+a}{2}$$

Rezultă atunci:

$$\overline{f(t_1)} = \frac{1}{j}\left.\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{b+a}{2}$$

4. Un semnal staționar și ergodic, *x*, este caracterizat prin densitatea spectrală de putere:

$$S_{xx}(j\omega)=\frac{2}{1+4\omega^2}$$

Dacă semnalul x este repartizat după o lege normală, să se determine această lege.

Soluție

$$w_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\bar{x})^2}$$

unde $\bar{x}$ şi σ^2 reprezintă valoarea medie şi dispersia.

Conform relațiilor (1.107) şi (1.116), rezultă:

$$\bar{x}=\sqrt{B_{xx}(\infty)} \qquad \text{şi} \qquad \sigma^2=B_{xx}(0)-B_{xx}(\infty)$$

Pentru a calcula funcția de autocorelație $B_{xx}(\tau)$, se foloseşte teorema Wiener - Khintcine:

$$B_{xx}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$j\omega=s$, $\Rightarrow$ $d\omega=\left(1/j\right)ds$ şi atunci:

$$S_{xx}(s)=\frac{2}{4\left(\frac{1}{4}-s^2\right)}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(\frac{1}{2}+s\right)}$$

Funcția de autocorelație se poate calcula folosind teorema reziduurilor.

$$B_{xx}(\tau)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{e^{s\tau}ds}{2\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(\frac{1}{2}+s\right)}=$$

$$
=\begin{cases} \left.\dfrac{e^{s\tau}}{2\left(\dfrac{1}{2}-s\right)}\right|_{s=-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}}, & \text{pentru} \quad \tau > 0 \\ \left.\dfrac{e^{s\tau}}{2\left(\dfrac{1}{2}+s\right)}\right|_{s=\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{\tau}{2}}, & \text{pentru} \quad \tau < 0 \end{cases}
$$

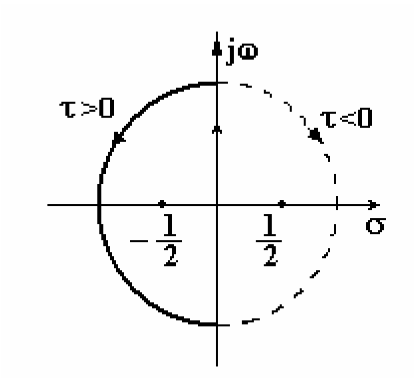


Fig. p1.4

Deci:

$$B_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$$

şi atunci

$$\overline{x} = \sqrt{B_{xx}(\infty)} = 0 \quad \text{, iar} \quad \sigma^2 = B_{xx}(0) - B_{xx}(\infty)$$

Legea de repartiție a semnalului va fi de forma:

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

5. Să se deducă funcția de autocorelație de la ieşirea unui filtru trece jos ideal, caracterizat prin funcția de transfer $H\left(j\omega\right)=A\left(\omega\right)e^{j\phi(\omega)}$, unde:

$$A(\omega)=\begin{cases} A, & \text{pentru} \quad |\omega|\le\omega_1 \\ 0, & \text{pentru} \quad |\omega|\ge\omega_1 \end{cases}$$

dacă la intrarea acestuia se aplică zgomot alb cu densitatea spectrală de putere S_0.

Soluție

Conform relației (1.205), rezultă:

$$S_{gg}(j\omega)=\left|H(j\omega)\right|^2 S_0=\begin{cases} A^2S_0, & \text{pentru} \quad |\omega|\le\omega_1 \\ 0, & \text{pentru} \quad |\omega|>\omega_1 \end{cases}$$

Conform teoremei Wiener - Khintcine:

$$B_{gg}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{gg}(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{A^2S_0}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{A^2S_0}{\pi\tau}\sin\omega_1\tau$$

6. Fie filtrul RC din figura alăturată.

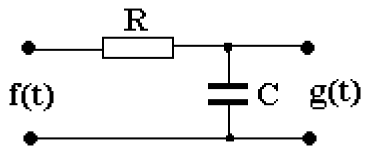


Fig. p6.1

Să se determine funcția de autocorelație de la ieşire, $B_{gg}\left(\tau\right)$, dacă la intrare se aplică zgomot alb *f*(*t*), cu densitatea spectrală de putere $S_{ff}\left(j\omega\right)=S_0$

Soluție

Conform relației (1.204), rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{ff}(j\omega)$$

Funcția de transfer, $H(j\omega)$ a filtrului este:

$$\mathbf{H(j}\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Rezultă atunci:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + j\omega RC}\frac{1}{1 - j\omega RC} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

Deoarece $S_{ff}(j\omega) = S_0$, rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = \frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2}, B_{gg}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

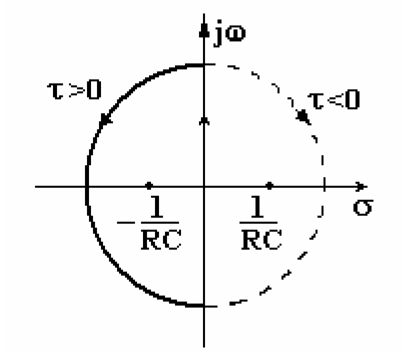


Fig. p6.2

Efectuând schimbarea de variabilă $j\omega = s$, $\Rightarrow d\omega = \left(1/j\right)ds$ şi atunci:

$$B_{gg}(\tau) = \frac{S_0}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau}ds}{(1 + sRC)(1 - sRC)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\frac{S_0}{(RC)^2}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau}ds}{(\frac{1}{RC} + s)(\frac{1}{RC} - s)} =$$

$$
=\begin{cases}
\left.\dfrac{\dfrac{S_0}{(RC)^2}e^{s\tau}}{\left(\dfrac{1}{RC}-s\right)}\right|_{s=-\frac{1}{RC}} = \dfrac{S_0}{2RC}e^{-\frac{\tau}{RC}} & \text{, pentru } \tau > 0 \\[2ex]
\left.\dfrac{\dfrac{S_0}{(RC)^2}e^{s\tau}}{\left(\dfrac{1}{RC}+s\right)}\right|_{s=\frac{1}{RC}} = \dfrac{S_0}{2RC}e^{\frac{\tau}{RC}} & \text{, pentru } \tau > 0
\end{cases}
$$

Scris sub formă compactă, rezultă:

$$B_{gg}(\tau) = \frac{S_0}{2RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

7. Fie $X(t) = \{x^{(k)}(t)\}$ şi $Y(t) = \{y^{(k)}(t)\}$ două procese aleatoare legate prin relația $Y(t) = L_t[X(t)]$, unde L_t este un operator liniar ce operează asupra variabilei *t*. Dacă L_t este operatorul de derivare, să se arate că:

$$B_{X\dot{X}}(t_1,t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_2};\ B_{\dot{X}X}(t_1,t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1};$$

$B_{\dot{X}\dot{X}}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial^2 B_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$, unde $\dot{X}(t) = \dfrac{\partial X(t)}{\partial t}$, iar $B_{XX}(t_1,t_2)$ este funcția de autocorelație. Dacă $X(t)$ este staționar în sens larg, să se arate că: $B_{X\dot{X}}(t_1-t_2) = \dfrac{\partial B_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_2}$; $B_{\dot{X}X}(t_1-t_2) = \dfrac{\partial B_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_1}$;

$$B_{\dot{X}\dot{X}}(t_1-t_2) = \frac{\partial^2 B_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Soluție

Fie $X(t_1) = \{x^{(k)}(t_1)\}$ şi $Y(t_1) = \{y^{(k)}(t_1)\}$ două variabile aleatoare ale proceselor aleatoare $X(t)$ şi $Y(t)$. Cele două procese aleatoare sunt legate prin relația

$$Y(t) = L_t[X(t)] \tag{p7.1}$$

Multiplicând la stânga relația (p7.1) cu $X(t_1)$ şi mediind apoi ambii membri pentru $t = t_2$, rezultă

$$E\{X(t_1)Y(t_2)\} = E\{X(t_1)L_{t_2}[X(t_2)]\} = L_{t_2}[E\{X(t_1)X(t_2)]$$

Dar $E\{X(t_1)Y(t_2)\} = B_{XY}(t_1,t_2)$

reprezintă funcția de corelație şi

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = B_{XX}(t_1,t_2)$$

reprezintă funcția de autocorelație.
Deci, se poate scrie

$$B_{XY}(t_1,t_2) = L_{t_2}[B_{XX}(t_1,t_2)] \tag{p7.2}$$

Multiplicând la dreapta relația (p7.1) cu $X(t_2)$ şi mediind apoi ambii membri pentru $t = t_1$, rezultă

$$E\{Y(t_1)X(t_2)\} = E\{L_{t_1}[X(t_1)]X(t_2)\} = L_{t_1}[E\{X(t_1)X(t_2)\}]$$

sau

$$B_{YX}(t_1,t_2) = L_{t_1}[B_{XX}(t_1,t_2)] \tag{p7.3}$$

Multiplicând la dreapta relația (p7.1) cu $Y(t_2)$ şi mediind apoi ambii membri pentru $t = t_1$, rezultă

$$E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{L_{t_1}[X(t_1)]Y(t_2)\} = L_{t_1}[E\{X(t_1)Y(t_2)\}]$$

sau

$$B_{YY}(t_1,t_2) = L_{t_1}[B_{XY}(t_1,t_2)] \tag{p7.4}$$

În cazul particular când operatorul L_t este de derivare şi procesul aleator $X(t)$ este staționar în sens larg, relațiile (p7.2), (p7.3), (p7.4) devin

$$B_{X\dot{X}}(t_1-t_2)=\frac{\partial B_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_2} \qquad \text{(p7.2')}$$

$$B_{\dot{X}X}(t_1-t_2)=\frac{\partial B_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_1} \qquad \text{(p7.3')}$$

$$B_{\dot{X}\dot{X}}(t_1-t_2)=\frac{\partial^2 B_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \qquad \text{(p7.4')}$$

Dacă se face notația $t_1-t_2=\tau$, se poate scrie echivalent:

$$B_{X\dot{X}}(\tau)=-\frac{\partial B_{XX}(\tau)}{\partial \tau} \qquad \text{(p7.2'')}$$

$$B_{\dot{X}X}(\tau)=\frac{\partial B_{XX}(\tau)}{\partial \tau} \qquad \text{(p7.3'')}$$

$$B_{\dot{X}\dot{X}}(\tau)=-\frac{\partial^2 B_{XX}(\tau)}{\partial \tau^2} \qquad \text{(p7.4'')}$$

8. Să se arate că dacă $x[n]$ este un proces staționar, cu valori complexe, atunci densitatea sa spectrală de putere este o mărime reală, iar dacă $x[n]$ are valori reale, densitatea spectrală de putere este, în plus, şi pară.

Soluție

Dacă $x[n]$ este are valori complexe, atunci funcția sa de autocorelație are, de asemenea, valori complexe, $\gamma_{xx}[m]=\gamma_{xx}^R[m]+j\gamma_{xx}^I[m]$, unde prin $\gamma_{xx}^R[m]$ şi $\gamma_{xx}^I[m]$ s-a notat partea reală, respectiv, imaginară, a funcției de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$. Densitatea spectrală de putere este

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m]e^{-j\omega m} =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{R}[m] + j\gamma_{xx}^{I}[m])(\cos\omega m - j\sin\omega m) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{R}[m]\cos\omega m + \gamma_{xx}^{I}[m]\sin\omega m) +$$

$$j\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{I}[m]\cos\omega m - \gamma_{xx}^{R}[m]\sin\omega m) = \Gamma_{xx}^{R}(\omega) + j\Gamma_{xx}^{I}(\omega) \qquad \text{(p8.1)}$$

Dar $\gamma_{xx}[m] = \gamma_{xx}^{*}[-m] = \gamma_{xx}^{R}[-m] - j\gamma_{xx}^{I}[-m]$

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m]e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^{*}[-m]e^{-j\omega m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{R}[-m] - j\gamma_{xx}^{I}[-m])(\cos\omega m - j\sin\omega m) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{R}[-m]\cos\omega m - \gamma_{xx}^{I}[-m]\sin\omega m) -$$

$$j\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{I}[-m]\cos\omega m + \gamma_{xx}^{R}[-m]\sin\omega m) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{R}[m]\cos\omega m + \gamma_{xx}^{I}[m]\sin\omega m) -$$

$$j\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^{I}[m]\cos\omega m - \gamma_{xx}^{R}[-m]\sin\omega m) = \Gamma_{xx}^{R}(\omega) - j\Gamma_{xx}^{I}(\omega) \qquad \text{(p8.2)}$$

Cum cele două relații pentru densitatea spectrală de putere (p8.1) şi (p8.2) sunt egale, rezultă $\Gamma_{xx}^{I}(\omega) = 0$.

Dacă $x[n]$ este are valori reale, atunci, impunând în relațiile anterioare $\gamma_{xx}^{I}[m] = 0$, rezultă densitatea spectrală de putere

$$\Gamma_{xx}(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}[m]e^{-j\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}[m]\cos\omega m$$

care este o funcție reală şi pară în ω.

9. Densitatea spectrală de putere a unui proces AR este

$$\Gamma_{xx}(\omega)=\frac{\sigma_w^2}{|A(\omega)|^2}=\frac{\sigma_w^2}{\left|1-e^{-j\omega}+\frac{1}{2}e^{-2j\omega}\right|^2}$$

unde σ_w^2 este dispersia semnalului de intrare.

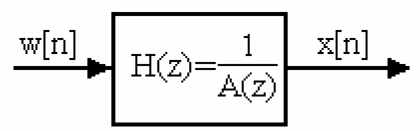
a) Să se determine ecuația cu diferențe pentru sistemul care generează procesul AR, când este excitat cu zgomot alb.

b) Să se determine funcția de sistem a filtrului de albire a semnalului $x[n]$.

Soluție

a) $A(z)=1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$; $\quad H(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

$x[n]=w[n]+x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2]$



b) $H_w(z)=\dfrac{1}{H(z)}=1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$

10. Un proces ARMA are funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ a cărei transformată Z este

$$\Gamma_{xx}(z)=\frac{9(z-\frac{1}{3})(z-3)}{(z-\frac{1}{2})(z-2)},\quad \tfrac{1}{2}<|z|<2$$

a) Să se determine filtrul funcția de sistem $H(z)$ a filtrului cu ajutorul căruia se generează $x[n]$, dacă la intrare se aplică zgomot alb. Este $H(z)$ unic? Explicați. Determinați filtrul $H(z)$ cauzal şi stabil.

b) Să se determine filtrul de albire liniar, cauzal şi stabil pentru secvența $x[n]$.

Soluție

a) Densitatea spectrală a semnalului de la ieşire $x[n]$, se exprimă, în funcție de densitatea spectrală a semnalului de intrare $w[n]$ şi funcția de sistem a filtrului, $H(z)$, în forma:

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ww}(z)H(z)H(z^{-1})$$

Prin rearanjarea expresiei densității de putere a semnalului de ieşire $x[n]$, se obține

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{27}{2}\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}, \quad \tfrac{1}{2} < |z| < 2$$

Dacă pentru $H(z)$ nu se impune nici o condiție de cauzalitate, în regiunea de convergență specificată, rezultă următoarele posibilități:

$$H_1(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}; H_2(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2};$$

$$H_3(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{2}z}, |z| < 2; H_4(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z} |z| < 2.$$

pentru care se obține $\Gamma_{xx}(z)$ din enunț.

Impunând pentru $H(z)$ condiția să fie cauzal, rezultă numai două soluții, $H_1(z)$ şi $H_2(z)$.

b) Pentru ca filtrul de albire să fie stabil, se impune ca filtrul $H(z)$ să fie de fază minimă, adică zerourile sale să fie în interiorul cercului unitate, condiție îndeplinită de filtrul $H_1(z)$.

$$H_w(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \tfrac{1}{3}.$$

11. Fie un proces ARMA generat de ecuația cu diferențe $x[n] = 1,6x[n-1] - 0,63x[n-2] + w[n] + 0,9w[n-1]$, unde $w[n]$ este zgomot alb, staționar.

a) Să se determine funcția de sistem a filtrului de albire stabil şi polii şi zerourile acestuia.

b) Să se determine densitatea spectrală de putere pentru $x[n]$.

Soluție

a) $H_w(z) = \dfrac{W(z)}{X(z)} = \dfrac{1-1,6z^{-1}+0,63z^{-2}}{1+0,9z^{-1}}, \quad |z| > 0,9$

$$p_1 = -0,9; \quad p_2 = 0; \quad z_1 = 0,9; \quad z_2 = 0,7.$$

b)

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1+0,9z^{-1}}{1-1,6z^{-1}+0,63z^{-2}} = \frac{1+0,9z^{-1}}{(1-0,9z^{-1})(1-0,7z^{-1})},$$

$|z| > 0,9$

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ww}(z)H(z)H(z^{-1}) =$$

$$\sigma_w^2 \frac{(1+0,9z^{-1})(1+0,9z)}{(1-0,9z^{-1})(1-0,7z^{-1})(1-0,9z)(1-0,7z)} =$$

$$= \sigma_w^2 \frac{1+0,9(z+z^{-1})+0,81}{(1-0,9(z+z^{-1})+0,81)(1-0,7(z+z^{-1})+0,49)},$$

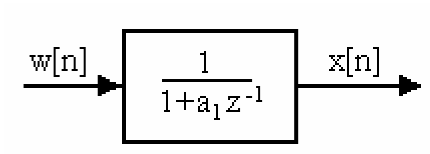
$RC: 0,9 < |z| < \frac{1}{0,9}$

Cum cercul unitate este inclus în regiunea de convergență a lui $\Gamma_{xx}(z)$, densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(\omega)$ se obține prin evaluarea lui $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate. $z = e^{j\omega}, \quad z + z^{-1} = 2\cos\omega$.

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \sigma_w^2 \frac{1,81 + 1,8\cos\omega}{(1,81 - 1,8\cos\omega)(1,49 - 1,4\cos\omega)}$$

12. Un proces AR, de ordinul întâi, $x[n]$, cu valori reale, satisface ecuația cu diferențe $x[n] + a_1 x[n-1] = w[n]$, unde a_1 este o constantă reală, iar $w[n]$, zgomot alb cu dispersia σ_w^2. Pentru cazul când media lui $w[n]$ este egală cu zero şi $|a_1| < 1$, să se arate că $\operatorname{var}(x[n]) = \dfrac{\sigma_w^2}{1 - a_1^2}$.

Soluție



$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0], \quad \gamma_{xx}[m] = Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\},$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1}) = \frac{\sigma_w^2}{(1 + a_1 z^{-1})(1 + a_1 z)}$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{\sigma_w^2}{1 - a_1^2}\left(\frac{z}{z + a_1} - \frac{z}{z - \frac{1}{a_1}}\right),$$

$$\gamma_{xx}[m] = \frac{\sigma_w^2}{1 - a_1^2}\left(a_1^m u[m] + \left(\frac{1}{a_1}\right)^m u[-m-1]\right)$$

$$\gamma_{xx}[0] = \frac{\sigma_w^2}{1 - a_1^2}$$

13. Un proces MA(2) are următoarea secvență de autocorelație:

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} 6\sigma_w^2, & m = 0 \\ -4\sigma_w^2, & m = \pm 1 \\ \sigma_w^2, & m = \pm 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine coeficienții procesului MA(2).

b) Este soluția unică? Dacă nu, găsiți toate soluțiile posibile.

Soluție

a) Un proces MA(2) este caracterizat de următoarea ecuație cu diferențe:

$x[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]$,

unde $w[n]$ este zgomot alb, cu dispersia σ_w^2.

Prin definiție,

$$\gamma_{xx}[m] = E\{x[n_i]x[n_i+m]\} =$$
$$E\{(b_0 w[n_i] + b_1 w[n_i-1] + b_2 w[n_i-2]) \cdot$$
$$(b_0 w[n_i+m] + b_1 w[n_i-1+m] + b_2 w[n_i-2+m])\}$$

Ținând cont că

$$E\{w[m_i]w[n_i]\} = \begin{cases} \sigma_w^2, & \text{pentru } m_i = n_i \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

rezultă

$\gamma_{xx}[0] = (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)\sigma_w^2$

$\gamma_{xx}[1] = (b_0 b_1 + b_1 b_2)\sigma_w^2$

$\gamma_{xx}[2] = b_0 b_2 \sigma_w^2$

Prin identificare cu funcția de autocorelație dată în problemă, se poate scrie

$$\begin{cases} b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 6 \\ b_0 b_1 + b_1 b_2 = -4 \\ b_0 b_2 = 1 \end{cases}$$

de unde rezultă următoarele soluții:

$b_0 = 1, b_1 = -2, b_2 = 1$, respectiv,

$b_0 = -1, b_1 = 2, b_2 = -1$.

b) Soluția nu este unică, există două procese MA(2) caracterizate de aceeaşi funcție de autocoralație, acestea fiind:

$x[n] = w[n] - 2w[n-1] + w[n-2]$

$x[n] = -w[n] + 2w[n-1] - w[n-2]$

14. Să se determine media şi funcția de autocorelație a secvenței $x[n]$, staționare în sens larg, care este ieşirea unui process ARMA(1,1), descris de ecuația cu diferențe

$x[n] = \dfrac{1}{2} x[n-1] + w[n] - w[n-1]$, unde $w[n]$ este zgomot alb, staționar, cu dispersia σ_w^2.

Soluție

Dacă $h[k]$ este funcția pondere a sistemului care furnizează procesul ARMA(1,1), atunci se poate scrie

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] w[n-k]$$

$$E\{x[n_i]\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] w[n_i - k] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] E\{w[n_i - k]\} = 0$$

Funcția de autocorelație a ieşirii este transformata Fourier inversă a densității spectrale de putere de la ieşire. În domeniul Z, aceasta se scrie:

$$\gamma_{xx}[m] = Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\}$$

unde

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ww}(z)\,|\,H(z)\,|^2 = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) \text{ şi } H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1-z}{1-\frac{1}{2}z} = \sigma_w^2 \left(2 + \frac{-\frac{2}{3}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}z}{z-2} \right), RC: \frac{1}{2} < |\,z\,| < 2$$

$$\gamma_{xx}[m] = \sigma_w^2 \left(2\delta[n] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^m u[m] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-m} u[-m-1] \right) =$$

$$= \sigma_w^2 \left(2\delta[n] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|} \right)$$

15. Funcţia de autocorelaţie a unui proces AR, generat de un sistem liniar excitat cu zgomot alb, staţionar, este $\gamma_{xx}[m] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}$. Să se determine ecuaţia cu diferenţe corespunzătoare sistemului care produce procesul AR. Este soluţia unică?

Soluţie

Densitatea spectrală de putere a procesului AR, exprimată în domeniul Z este

$$\Gamma_{xx}(z) = Z\{\gamma_{xx}[m]\} = X(z)X(z^{-1}) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$$

unde $H(z)$ este funcţia de sistem a sistemului ce produce procesul aleator $x[n]$, când este excitat cu zgomotul alb $w[n]$, de dispersie σ_w^2.

$$\Gamma_{xx}(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{-k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{k} - 1$$

Prima progresie este convergentă, dacă $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$, adică $|z| < 4$, iar a doua, dacă $\left|\frac{z^{-1}}{4}\right| < 1$, adică $|z| > \frac{1}{4}$. Domeniul comun de convergență rezultă $\frac{1}{4} < |z| < 4$. În acest caz

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{1-\frac{1}{4}z} + \frac{z}{z-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{15}{16}}{\left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

Impunând condiția ca sistemul să fie stabil şi cauzal, rezultă

$$H(z) = \frac{\pm\sqrt{\frac{15}{16\sigma_w^2}}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)},$$

de unde rezultă ecuația cu diferențe corespunzătoare:

$$x[n] = \frac{1}{4}x[n-1] \pm \sqrt{\frac{15}{16\sigma_w^2}}w[n]$$

Se observă că soluția nu este unică.