CAPITOLUL 2

CANALE DISCRETE DE TRANSMISIUNI

2.1. Model matematic de canal discret de transmisiuni

În acest model trebuie precizate mulțimile simbolurilor aplicate la intrarea canalului, ale simbolurilor recepționate la ieşirea acestuia, precum şi perturbațiile care apar.

Fie $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ mulțimea simbolurilor de la intrarea canalului (acceptate la intrare), numită şi alfabetul de la intrarea canalului şi $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ mulțimea simbolurilor recepționate, numită şi alfabetul de la ieşirea canalului de transmisiuni. În general, cele două mulțimi sunt diferite, din cauza perturbațiilor care apar pe canal. Astfel, dacă se presupune că la intrarea unui canal se aplică numai două simboluri, de forma x_1=000 şi x_2=111, iar zgomotele de pe canal se presupun astfel încât pot modifica un zero în unu sau invers, la ieşirea acestuia se pot recepționa simbolurile y_1=000, y_2=001, y_3=010, y_4=011, y_5=100, y_6=101, y_7=110 şi y_8=lll.

Prin definiție, canalul se va numi *discret*, dacă cele două mulțimi sunt finite.

Prin definiţie, un canal discret se numeşte *fără memorie*, dacă recepţionarea unui simbol nu depinde de unul sau mai multe simboluri recepţionate anterior.

Prin definiţie, un canal discret de transmisiuni se va numi *staţionar*, dacă zgomotele sau perturbaţiile care apar pe canal sunt invariante în timp.

În cele ce urmează se vor analiza numai canalele discrete, staţionare şi fără memorie.

Pentru a pune în evidenţă perturbaţiile care pot să apară pe canalele discrete, staţionare şi fără memorie, se definesc trei tipuri de probabilităţi:

a) probabilitatea $p\left(x_k \cap y_j\right)$; $k=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$, prin care se înţelege probabilitatea ca la intrarea canalului să fie simbolul x_k şi la ieşirea acestuia să fie simbolul y_j.

Considerând că la intrarea canalului de transmisiuni se aplică mulţimea *X*, numită şi câmpul de la intrare, iar la ieşire rezultă mulţimea *Y*, numită şi câmpul de la ieşire, probabilităţile $p\left(x_k \cap y_j\right)$ pot fi ordonate într-o matrice de forma

$$\left[P(X,Y)\right]=\begin{bmatrix} p\left(x_1\cap y_1\right) & p\left(x_1\cap y_2\right) & \dots & p\left(x_1\cap y_m\right) \\ p\left(x_2\cap y_1\right) & p\left(x_2\cap y_2\right) & \dots & p\left(x_2\cap y_m\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p\left(x_n\cap y_1\right) & p\left(x_n\cap y_2\right) & \dots & p\left(x_n\cap y_m\right) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Se pot demonstra următoarele proprietăţi:

$$p\left(x_k\right)=\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k\cap y_j\right) \quad , \quad (\forall)\ k=\overline{1,n} \tag{2.2}$$

$$p\left(y_j\right)=\sum_{k=1}^{n} p\left(x_k\cap y_j\right),(\forall)\ j=\overline{1,m} \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right) = 1 \tag{2.4}$$

unde $p\left(x_k\right)$ reprezintă probabilitatea cu care se aplică simbolul x_k la intrarea canalului, iar $p\left(y_j\right)$ probabilitatea cu care se recepționează simbolul y_j. Pentru a demonstra relația (2.2), se face observația că evenimentele $\left(x_k \cap y_1\right),\left(x_k \cap y_2\right),\ldots,\left(x_k \cap y_m\right)$, sunt disjuncte, deoarece, dacă la intrarea canalului este simbolul x_k, la ieşirea acestuia va rezulta fie simbolul y_1, fie y_2, ..., fie simbolul y_n. Ținând cont că probabilitatea reuniunii unor evenimente disjuncte (incompatibile) este egală cu suma probabilităților evenimentelor componente, se poate scrie

$$p\left(x_k \cap y_1 \cup x_k \cap y_2 \cdots \cup x_k \cap y_m\right) = \sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right) \tag{2.5}$$

Pe de altă parte

$$p\left(x_k \cap y_1 \cup x_k \cap y_2 \cdots \cup x_k \cap y_m\right) = p\left[x_k \cap \left(y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_m\right)\right] \tag{2.6}$$

Dar

$$y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_m = E \tag{2.7}$$

unde E reprezintă evenimentul sigur, deoarece la ieşire cu certitudine se va recepționa unul din simbolurile mulțimii Y.

Ținând cont de (2.5), (2.6) şi (2.7), rezultă

$$\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right) = p\left(x_k \cap E\right) = p\left(x_k\right) \tag{2.8}$$

Din (2.7) rezultă

$$\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j\right) = 1 \tag{2.9}$$

Analog ,

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = 1 \qquad (2.10)$$

Relația (2.4) rezultă atunci imediat, ținând cont fie de (2.2) şi (2.10), fie de (2.3) şi (2.9).

b) Probabilitatea $p(y_j \mid x_k)$, $k = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, prin care se va înțelege probabilitatea de a se recepționa simbolul y_j, dacă s-a transmis simbolul x_k. Aceste probabilități condiționate pot fi ordonate într-o matrice, [*P*(*Y*|*X*)] numită *matrice de zgomot sau de canal*. Această matrice poate fi uşor obținută din matricea [*P*(*X,Y*)], dată de relația (2.1), dacă prima linie se împarte la $p(x_1)$, a doua linie la $p(x_2)$ ş. a. m. d., ultima linie se împarte la $p(x_n)$ şi se ține cont de relația

$$p(x_k \cap y_j) = p(x_k) \cdot p(y_j \mid x_k) \qquad (2.11)$$

Astfel, matricea de zgomot sau de canal este de forma

$$\left[P(Y \mid X)\right] = \begin{bmatrix} p(y_1 \mid x_1) & p(y_2 \mid x_1) & \dots & p(y_m \mid x_1) \\ p(y_1 \mid x_2) & p(y_2 \mid x_2) & \dots & p(y_m \mid x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1 \mid x_n) & p(y_2 \mid x_n) & \dots & p(y_m \mid x_n) \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

Matricea de zgomot astfel întocmită este stochastică, adică

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_k) = 1 \ , \qquad (\forall) k = \overline{1,n} \qquad (2.13)$$

deoarece, dacă la intrarea canalului se aplică un anumit simbol $x_k \in X$, cu certitudine la ieşirea acestuia se va recepționa unul din simbolurile $y_j \in Y$.

c) Probabilitatea $p(x_k \mid y_j)$, $k = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, prin care se va înțelege probabilitatea de a se fi transmis simbolul x_k, dacă s-a recepționat simbolul y_j. Aceste probabilități condiționate pot fi grupate într-o matrice, [$P(X|Y)$], ce poate fi ușor obținută din matricea [$P(X,Y)$], dacă prima coloană se împarte la $p(y_1)$, a doua coloană la $p(y_2)$ şi aşa mai departe, ultima coloană se împarte la $p(y_m)$ şi se ține cont de relația

$$p\left(x_k \cap y_j\right) = p\left(y_j\right) \cdot p\left(x_k \middle| y_j\right) \tag{2.14}$$

Astfel, această matrice este de forma

$$\left[P\left(X \mid Y\right)\right] = \begin{bmatrix} p\left(x_1 \mid y_1\right) & p\left(x_1 \mid y_2\right) & \dots & p\left(x_1 \mid y_m\right) \\ p\left(x_2 \mid y_1\right) & p\left(x_2 \mid y_2\right) & \dots & p\left(x_2 \mid y_m\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p\left(x_n \mid y_1\right) & p\left(x_n \mid y_2\right) & \dots & p\left(x_n \mid y_m\right) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Deoarece, atunci când s-a recepționat un anumit simbol y_j, cu certitudine la intrarea canalului s-a aplicat unul din simbolurile $x_k \in X$, se poate scrie relația

$$\sum_{k=1}^{n} p\left(x_k \middle| y_j\right) = 1 \quad , \quad \left(\forall\right) j = \overline{1,m} \tag{2.16}$$

Din punct de vedere informațional, un canal discret de transmisiuni este caracterizat de următoarele mărimi informaționale

1) Entropia intrare - ieşire, $H\left(X,Y\right)$;
2) Entropiile condiționate, $H\left(X\middle|Y\right)$ şi $H\left(Y\middle|X\right)$;
3) Transinformația, $I(X,Y)$;
4) Capacitatea canalului, C.

2.2. Entropia intrare - ieşire a unui canal discret de transmisiuni

Se presupune că la intrarea unui canal de transmisiuni se aplică câmpul $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, iar la ieşirea acestuia se recepționează câmpul $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$. Dacă se notează cu $p(x_k \cap y_j)$ probabilitatea evenimentului că la intrarea canalului se află simbolul x_k şi la ieşirea acestuia există simbolul y_j, informația ataşată acestui eveniment, notată cu $i(x_k \cap y_j)$, se determină cu relația (1.10), adică

$$i(x_k \cap y_j) = -\log i(x_k \cap y_j) \tag{2.17}$$

Deoarece o informație înlătură o anumită nedeterminare, rezultă că informația dată de relația (2.17) este numeric egală cu nedeterminarea ca la intrarea canalului să fie simbolul x_k şi la ieşirea acestuia să fie simbolul y_j.

Informația definită cu relația (2.17) determină o variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile $p(x_k \cap y_j)$; $k=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$. Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete defineşte entropia intrare - ieşire şi va fi notată cu $H(X,Y)$, adică

$$H(X,Y) = \overline{i(x_k \cap y_j)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k \cap y_j)\cdot \log p(x_k \cap y_j) \tag{2.18}$$

Înlocuind (2.17) în (2.18), rezultă

$$H(X,Y) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k \cap y_j)\cdot \log p(x_k \cap y_j)\langle\frac{\text{biți}}{\text{pereche de simboluri}}\rangle \quad (2.19)$$

Se consideră, în continuare, două situații extreme

1) lipsa perturbațiilor de pe canal;

2) perturbații foarte puternice pe canal, care determină practic independența statistică a ieşirii de intrare, şi invers.

În primul caz, se poate scrie

$$p(x_k|y_j) = p(y_j|x_k) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, \text{dacă } x_k = y_j \\ 0, \text{dacă } x_k \neq y_j \end{cases} \quad (2.20)$$

În acest caz, dacă se ştie ce s-a recepționat, se ştie cu certitudine ce s-a transmis sau, dacă se ştie ce s-a transmis, se ştie cu certitudine ce se va recepționa.

Dacă este adevărată relația (2.20), atunci (2.19) devine

$$H(X,Y) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k \cap y_j)\cdot \log p\left[p(x_k)\cdot p(y_j|x_k)\right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \log p(x_k)\cdot \sum_{j=1}^{m} p(x_k \cap y_j) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k)\cdot p(y_j|x_k)\cdot \log p(y_j|x_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} p(x_k)\log p(x_k) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k)\delta_{kj}\log \delta_{kj} = H(X) \quad (2.21)$$

Pe de altă parte, este evident că în lipsa perturbațiilor câmpul de la intrare este identic cu cel de la ieşire, adică

$$H(X) = H(Y) \quad (2.22)$$

Rezultă, deci, că în lipsa perturbațiilor de pe canal se poate scrie relația

$$H(X,Y) = H(X) = H(Y) \quad (2.23)$$

În cel de-al doilea caz are loc relația

$$p\left(x_k \cap y_j\right) = p\left(x_k\right)\cdot p\left(y_j\right) \qquad (2.24)$$

deoarece la perturbații foarte puternice simbolurile de la intrare x_k, $k=\overline{1,n}$, devin statistic independente de simbolurile de la ieşirea canalului y_j, $j=\overline{1,m}$.

Ținând cont de (2.24), relația (2.19) devine

$$H\left(X,Y\right) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\cdot \log p\left[p\left(x_k\right)\cdot p\left(y_j\right)\right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \log p\left(x_k\right)\cdot \sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right) - \sum_{j=1}^{m} \log p\left(y_j\right)\sum_{k=1}^{n} p\left(x_k \cap y_j\right) = \qquad (2.25)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} p\left(x_k\right)\log p\left(x_k\right) - \sum_{j=1}^{m} p\left(y_j\right)\log p\left(y_j\right) = H\left(X\right)+H\left(Y\right)$$

Canalele discrete reale se încadrează între aceste două situații extreme.

O interpretare geometrică intuitivă se poate obține asociind câmpului *X* de Ia intrarea canalului mulțimea *A* şi câmpului *Y* de la ieşirea canalului mulțimea *B*.

Pe aceste mulțimi se definesc măsurile *m*(*A*), respectiv *m*(*B*) şi se fac următoarele corespondențe *m*(*A*)↔*H*(*X*), *m*(*B*)↔*H*(*Y*) şi $m\left(A\cup B\right) \leftrightarrow H\left(X,Y\right)$. Interpretarea geometrică este dată în Fig. 2.1. În această figură suprafața cercului mic este *m*(*A*), suprafața cercului mare este *m*(*B*), iar suprafața haşurată $m\left(A\cup B\right)$.

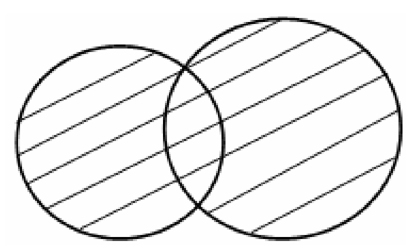

Fig. 2.1. Interpretarea geometrică a entropiei H(X,Y).

2.3. Entropii condiționate

Fie Y câmpul de la ieşirea unui canal de transmisiuni. Dacă se cunoaşte acest câmp, din cauza perturbațiilor de pe canalul de transmisiuni rămâne o anumită incertitudine (nedeterminare) asupra câmpului X de la intrarea canalului. Valoarea medie a acestei nedeterminări se numeşte *entropia condiționată* a câmpului de la intrare de cel de la ieşire. În scopul stabilirii unei relații de calcul pentru această entropie, se presupune că la un moment dat s-a recepționat simbolul y_j, $j = \overline{1,m}$. Din cauza perturbațiilor de pe canal, la intrarea acestuia s-ar fi putut aplica fie x_1, fie x_2, ..., fie x_n. Graful corespunzător acestei situații este reprezentat în Fig.2.2.

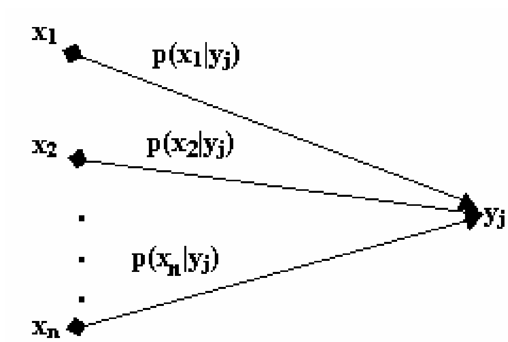

Fig. 2.2. Graful corespunzător recepționării simbolului y_j

Fie $p\left(x_k|y_j\right)$ probabilitatea de a se fi transmis simbolul x_k, dacă s-a recepționat simbolul y_j. Informația ataşată acestui eveniment se notează cu $i\left(x_k|y_j\right)$ şi se deduce cu relația (1.10), adică

$$i\left(x_k|y_j\right) = -\log p\left(x_k|y_j\right) \tag{2.26}$$

Deoarece o informație înlătură o anumită nedeterminare, înseamnă că informația calculată cu relația (2.26) este numeric egală cu nedeterminarea asupra simbolului x_k, dacă s-a recepționat simbolul y_j. Informația definită cu relația (2.26) determină o variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile $p\left(x_k|y_j\right)$, $k=\overline{1,n}$. Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete, notată cu $H\left(X|y_j\right)$, se poate calcula cu relația

$$H\left(X|y_j\right)=\overline{i\left(x_k|y_j\right)}=\sum_{k=1}^{n}p\left(x_k|y_j\right)i\left(x_k|y_j\right) \tag{2.27}$$

sau, ținând cont de (2.26), rezultă

$$H\left(X|y_j\right)=-\sum_{k=1}^{n}p\left(x_k|y_j\right)\log\left(x_k|y_j\right) \tag{2.28}$$

Din punct de vedere fizic, această mărime măsoară nedeterminarea medie asupra intrării la recepționarea simbolului y_j.

Considerând toate posibilitățile de recepționare, y_j, $j=\overline{1,m}$, rezultă că mărimea definită cu relația (2.28) determină o nouă variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile $p\left(y_j\right)$. Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete se va nota cu $H\left(X|Y\right)$ şi va măsura nedeterminarea medie asupra intrării *X*, dacă se cunoaşte ieşirea *Y*, adică entropia condiționată a câmpului de la intrarea canalului de câmpul de la ieşirea acestuia. Această mărime se va calcula cu relația

$$H\left(X|Y\right)=\overline{H\left(X|y_j\right)}=\sum_{j=1}^{m}p\left(y_j\right)H\left(X|y_j\right) \tag{2.29}$$

Înlocuind (2.28) în (2.29), rezultă

$$H\left(X|Y\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(y_j\right)p\left(x_k|y_j\right)\log\left(x_k|y_j\right) \tag{2.30}$$

sau, ținând cont de (2.14), se poate scrie, echivalent

$$H\left(X|Y\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log\left(x_k|y_j\right) \tag{2.31}$$

Entropia condiționată calculată cu relația (2.30) sau (2.31) este denumită uneori *echivocație*, deoarece măsoară echivocul asupra intrării dacă se cunoaşte ieşirea.

În mod analog, se poate determina entropia condiționată a câmpului de la ieşire de câmpul de la intrare, cu relația

$$H\left(Y|X\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\right)p\left(y_j|x_k\right)\log\left(y_j|x_k\right), \tag{2.32}$$

sau, ținând cont de (2.11), se poate scrie echivalent

$$H\left(Y|X\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(y_j\cap x_k\right)\log\left(y_j|x_k\right), \tag{2.33}$$

Entropia condiționată calculată cu relația (2.32) sau (2.33) este numită uneori *eroare medie*. În cazul extrem al perturbațiilor foarte puternice, ținând cont de (2.20), relațiile (2.30) şi (2.32) devin

$$H\left(X|Y\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(y_j\right)\delta_{kj}\log_{kj}=0, \tag{2.34}$$

$$H\left(Y|X\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\right)\delta_{kj}\log_{kj}=0, \tag{2.35}$$

În cazul extrem al perturbațiilor foarte puternice, ținând cont de (2.11) şi (2.24), se poate scrie

$$p\left(x_k\right)\cdot p\left(y_j|x_k\right)=p\left(x_k\right)\cdot p\left(y_j\right), \tag{2.36}$$

de unde rezultă

$$p\left(y_j|x_k\right)=p\left(y_j\right), \tag{2.37}$$

În mod analog, ținând cont de (2.14) şi (2.24), se poate scrie

$$p\left(x_k \middle| y_j\right) = p\left(x_k\right) \tag{2.38}$$

Înlocuind (2.38) în (2.31), rezultă că, în cazul perturbațiilor foarte puternice, echivocația devine

$$\begin{aligned} H\left(X \middle| Y\right) &= -\sum_{k=1}^{n} \log p\left(x_k\right) \sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right) = \\ &= -\sum_{k=1}^{n} p\left(x_k\right) \log p\left(x_k\right) = H\left(X\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Înlocuind (2.37) în (2.33), rezultă că, în cazul perturbațiilor foarte puternice, eroarea medie devine

$$\begin{aligned} H\left(Y \middle| X\right) &= -\sum_{j=1}^{m} \log p\left(y_j\right) \sum_{k=1}^{n} p\left(x_k \cap y_j\right) = \\ &= -\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j\right) \log p\left(y_j\right) = H\left(Y\right) \end{aligned} \tag{2.40}$$

O interpretare geometrică intuitivă se poate obține dacă se fac corespondențele $m(A) \leftrightarrow H(X)$, $m(B) \leftrightarrow H(Y)$, $m\left(A \cap \overline{B}\right) \leftrightarrow H\left(X \middle| Y\right)$ şi $m\left(\overline{A} \cap \mathrm{B}\right) \leftrightarrow H\left(Y \middle| X\right)$.

În Fig. 2.3, suprafața haşurată vertical reprezintă $H\left(X \middle| Y\right)$, iar cea haşurată orizontal, $H\left(Y \middle| X\right)$.

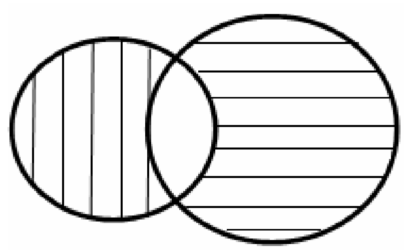

Fig. 2.3. Interpretare geometrică a echivocației şi a erorii medii

2.4. Transinformația

Transinformația măsoară informația medie transmisă pe canalul discret de transmisiuni.

În scopul stabilirii unei relații de calcul pentru această mărime informațională, fie simbolul x_k aplicat la intrarea canalului cu probabilitatea $p(x_k)$. Incertitudinea inițială asupra simbolului x_k poate fi înlăturată printr-o informație, $i(x_k)$, calculată cu relația

$$i(x_k) = -\log p(x_k) \tag{2.41}$$

Fie $p\left(x_k | y_j\right)$ probabilitatea de a se fi transmis simbolul x_k, dacă s-a recepționat simbolul y_j. Incertitudinea finală asupra simbolului x_k, adică după recepționarea simbolului y_j se poate înlătura cu o informație, notată cu $i\left(x_k | y_j\right)$, ce poate fi determinată cu relația

$$i\left(x_k | y_j\right) = -\log p\left(x_k | y_j\right) \tag{2.42}$$

Dacă $i(x_k)$ este informația care înlătură incertitudinea inițială asupra lui x_k şi $i\left(x_k | y_j\right)$ este informația care înlătură incertitudinea finală asupra aceluiaşi simbol, rezultă că nedeterminarea înlăturată asupra acestui simbol se datorează transmisiei unei informații pe canal, numită în continuare *informație mutuală*, notată cu $i\left(x_k | y_j\right)$ şi care se determină cu relația

$$i\left(x_k, y_j\right) = i(x_k) - i\left(x_k | y_j\right) \tag{2.43}$$

Înlocuind (2.41) şi (2.42) în (2.43), rezultă

$$i\left(x_k, y_j\right) = -\log p\left(x_k\right) + \log p\left(x_k \middle| y_j\right) = \log \frac{p\left(x_k \middle| y_j\right)}{p\left(x_k\right)}. \qquad (2.44)$$

Dacă $p\left(x_k \middle| y_j\right) < p\left(x_k\right)$, rezultă că informația mutuală $i\left(x_k, y_j\right)$ transmisă pe canal este negativă. Acest rezultat teoretic îşi găseşte corespondențe numeroase în lumea reală. De exemplu, dacă un student are o anumită nedeterminare (neînțelegere) asupra unei demonstrații şi dacă cere ajutorul unui coleg pentru a-şi înlătura această nedeterminare, se pot întâmpla două situații: dacă nedeterminarea a dispărut sau s-a micşorat, înseamnă că i s-a transmis o informație pozitivă; dacă nedeterminarea a crescut, înseamnă că i s-a transmis o informație negativă. Transmiterea unei informații negative este uneori deliberat provocată, pentru a se crea o situație de incertitudine cu diverse scopuri. Deşi informația mutuală poate fi negativă, aşa cum se va demonstra ulterior, informația medie transmisă, adică transinformația, este totdeauna nenegativă.

Ținând cont de (2.14), relația (2.44) se poate scrie într-o formă simetrică, după cum urmează

$$i\left(x_k, y_j\right) = -\log \frac{p\left(x_k \middle| y_j\right) \cdot p\left(y_j\right)}{p\left(x_k\right) \cdot p\left(y_j\right)} = \log \frac{p\left(x_k \cap y_j\right)}{p\left(x_k\right) \cdot p\left(y_j\right)} \qquad (2.45)$$

Simetria în raport cu variabilele x_k şi y_j din relația (2.45) are corespondent fizic în faptul că informația dată de x_k asupra lui y_j este egală cu informația dată de y_j asupra lui x_k.

Informația mutuală definită cu relațiile (2.44) sau (2.45) determină o variabilă aleatoare discretă, care poate lua valori cu probabilitățile $p\left(x_k \cap y_j\right); k = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}$. Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete se numeşte *transinformaţie* şi măsoară, din punct de vedere fizic, informaţia medie transmisă pe canalul discret de transmisiuni. Notând această mărime cu $I\left(X,Y\right)$, se poate scrie

$$I\left(X,Y\right)=\overline{i\left(x_k,y_j\right)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)i\left(x_k,y_j\right) \tag{2.46}$$

Înlocuind (2.44) sau (2.45) în relaţia (2.46), se obţin două relaţii echivalente de calcul pentru transinformaţie:

$$I\left(X,Y\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log\frac{p\left(x_k|y_j\right)}{p\left(x_k\right)} \tag{2.47}$$

$$I\left(X,Y\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log\frac{p\left(x_k\cap y_j\right)}{p\left(x_k\right)\cdot p\left(y_j\right)} \tag{2.48}$$

Simetria funcţiei $I\left(X,Y\right)$ în raport cu variabilele x_k şi y_j din relaţia (2.48) semnifică fizic faptul că informaţia câmpului de la intrare, *X*, asupra câmpului de la ieşire, *Y*, este egală cu informaţia câmpului de la ieşire asupra câmpului de la intrare.

În cazul limită (extrem) al lipsei perturbaţiilor de pe canalul de transmisiuni, înlocuind (2.20) în (2.47), rezultă

$$\begin{aligned}I\left(X,Y\right)&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log\frac{\delta_{kj}}{p\left(x_k\right)}=\\&=-\sum_{k=1}^{n}\log p\left(x_k\right)\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(y_j\right)\delta_{kj}\log\delta_{kj}=\\&=-\sum_{k=1}^{n}p\left(x_k\right)\log p\left(x_k\right)=H\left(X\right)\end{aligned} \tag{2.49}$$

Deoarece, în lipsa perturbaţiilor, câmpurile de la intrarea şi de la ieşirea canalului de transmisiuni sunt identice, *X*=*Y*, se poate scrie

$$I(X,Y) = H(X) = H(Y) \tag{2.50}$$

În celălalt caz limită, al perturbaților foarte puternice, înlocuind (2.24) în (2.48), rezultă

$$I(X,Y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\log\frac{p(x_k)p(y_j)}{p(x_k)p(y_j)} = 0\,, \tag{2.51}$$

Rezultatul obținut nu este surprinzător, deoarece este binecunoscut faptul că pe canalele foarte perturbate (eventual bruiate) nu se poate transmite nici o informație.

Dacă se fac corespondențele $m(A) \leftrightarrow H(X)$, $m(B) \leftrightarrow H(Y)$, şi $m(A \cap B) \leftrightarrow I(X,Y)$, rezultă interpretarea geometrică intuitivă a transinformației din Fig. 2.4. În această figură suprafața cercului mic este $m(A)$, a cercului mare $m(B)$, iar suprafața haşurată reprezintă transinformația.

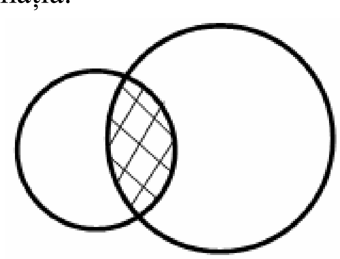

Fig. 2.4 Interpretarea geometrică a transinformației

2.5. Principalele relații între mărimile informaționale

Cele mai importante relații între mărimile informaționale, definite anterior, sunt

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \tag{2.52,a}$$

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) \tag{2.52,b}$$

$$I(X,Y) = H(Y) + H(X) - H(X,Y) \tag{2.53}$$

$$I(X,Y)=H(X)-H(X|Y) \tag{2.54,a}$$

$$I(X,Y)=H(Y)-H(Y|X) \tag{2.54,b}$$

Relația (2.52,a) rezultă din (2.19) şi (2.33), după cum urmează

$$H(X,Y)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log\left[p\left(x_k\right)p\left(y_j|x_k\right)\right]=$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\log p\left(x_k\right)\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log p\left(y_j|x_k\right)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}p\left(x_k\right)\log p\left(x_k\right)+H\left(Y|X\right)=H(X)+H\left(Y|X\right) \tag{2.55}$$

În mod analog, relația (2.52,b) rezultă din (2.19) şi (2.31). Pentru a demonstra relația (2.53), se prelucrează adecvat relația (2.48) şi se ține cont de (2.19), aşa cum este arătat în continuare:

$$I(X,Y)=-\sum_{k=1}^{n}\log p\left(x_k\right)\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)-\sum_{j=1}^{m}\log p\left(y_j\right)\sum_{k=1}^{n}p\left(x_k\cap y_j\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\cap y_j\right)\log p\left(y_j\cap x_k\right)=H(X)+H(Y)-H(X,Y) \tag{2.56}$$

Relația (2.54,a) se obține înlocuind (2.52,b) în (2.53), iar relația (2.54,b) se obține înlocuind (2.52,a) în (2 53).

Relațiile dintre cele şase mărimi informaționale sunt utile pentru un calcul expeditiv a trei mărimi informaționale, dacă celelalte trei sunt cunoscute.

În afara relațiilor de egalitate între cele şase mărimi informaționale, între acestea se pot stabili următoarele relații de inegalitate

$$H(X,Y)\le H(X)+H(Y) \tag{2.57,a}$$

$$H\left(X|Y\right) \leq H\left(X\right) \tag{2.58}$$

$$H\left(Y|X\right) \leq H\left(Y\right) \tag{2.59}$$

$$I\left(X,Y\right) \geq 0 \tag{2.60}$$

$$I\left(X,Y\right) \leq H\left(X\right) \tag{2.61}$$

$$I\left(X,Y\right) \leq H\left(Y\right) \tag{2.62}$$

Relația (2.57,a) este echivalentă cu

$$H\left(X,Y\right) - H\left(X\right) - H\left(Y\right) \leq 0 \tag{2.57,b}$$

Pentru demonstrarea inegalității (2.57,b), se ține cont de (2.19), (2.2) şi (2.3), adică

$$H\left(X,Y\right) - H\left(X\right) - H\left(Y\right) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\log p\left(x_k \cap y_j\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\log p\left(x_k\right) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\log p\left(y_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\log\frac{p\left(x_k\right)p\left(y_j\right)}{p\left(x_k \cap y_j\right)} \tag{2.63}$$

Dacă în (2.63) se face notația

$$\frac{p\left(x_k\right)\cdot p\left(y_j\right)}{p\left(x_k \cap y_j\right)} = z \tag{2.64}$$

şi se ține cont de (1.36), rezultă

$$H\left(X,Y\right) - H\left(X\right) - H\left(Y\right) \leq \log e \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\left[\frac{p\left(x_k\right)p\left(y_j\right)}{p\left(x_k \cap y_j\right)} - 1\right] =$$

$$= \log e\left[\sum_{k=1}^{n} p\left(x_k\right)\sum_{j=1}^{m}\log p\left(y_j\right) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_k \cap y_j\right)\right] = \log e\left(1-1\right) = 0$$

$$\tag{2.65}$$

Relația (2 58) se obține înlocuind (2.52,b) în (2.57,a), iar relația (2.59), înlocuind (2.52,a) în (2.57,a). Relația (2.60) rezultă din (2.53) şi (2.57,a). Relațiile (2.61) şi (2.62) se deduc din (2.54,a), respectiv (2.54,b), ținând cont că orice entropie este nenegativă.

2.6. Principalele tipuri de canale de transmisiuni

În cele mai frecvente situații practice, canalele discrete de transmisiuni sunt caracterizate prin matricea de zgomot (2.12). Funcție de structura acestei matrice, canalele discrete de transmisiuni se clasifică astfel

a) canale cu echivocație nulă;
b) canale cu eroare medie nulă;
c) canale uniforme față de intrare;
d) canale uniforme față de ieşire;
e) canale simetrice.

Prin definiție, *un canal este cu echivocație nulă*, dacă în fiecare coloană a matricei sale de zgomot există o singură probabilitate condiționată diferită de zero, restul fiind nule. De exemplu, matricea de zgomot a unui canal cu echivocație nulă, de forma

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

are graful reprezentat în Fig.2.5.

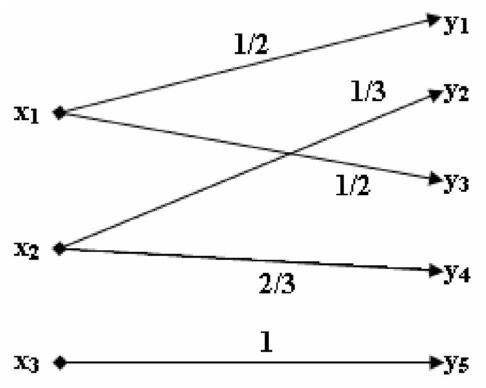

Fig. 2.5. Graful unui canal cu echivocație nulă

În cazul acestui tip de canal, dacă se ştie ce s-a recepționat, se ştie cu certitudine ce s-a transmis, reciproca nefiind totdeauna adevărată. Înseamnă că, în general, pentru acest tip de canal, probabilitățile $p\left(x_k|y_j\right)$; $k=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$, pot lua fie valoarea 1, fie 0. Conform relației (2.30), echivocația acestui tip de canal este

$$H\left(X|Y\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(y_j\right)\delta_{kj}\log\delta_{kj}=0 \qquad (2.66)$$

unde δ_{kj} poate lua fie valoarea 1, fie valoarea 0.

Conform relației (2.54,a), informația medie transmisă pe un astfel de canal este

$$I\left(X,Y\right)=H\left(X\right) \qquad (2.67)$$

Prin definiție, *un canal este cu eroare medie nulă*, dacă în fiecare linie a matricei sale de zgomot există o singură probabilitate condiționată diferită de zero, restul fiind nule. Matricea de zgomot fiind stochastică, rezultă că unica probabilitate condiționată din fiecare linie diferită de zero este egală cu unitatea. Din această categorie de canale fac parte, de exemplu, toate circuitele combinaționale şi secvențiale.

De exemplu, considerând o poartă logică *ŞI* cu două intrări, dacă la intrarea acestui "canal" se aplică simbolurile x_1,=00, x_2=01, x_3=10 şi x_4=11, la ieşire vor rezulta simbolurile y_0,=0 sau y_2=l, astfel că matricea de zgomot, în acest caz particular, este de forma $\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix}1\,0\\1\,0\\1\,0\\0\,1\end{bmatrix}$

iar graful canalului este reprezentat în Fig. 2.6.

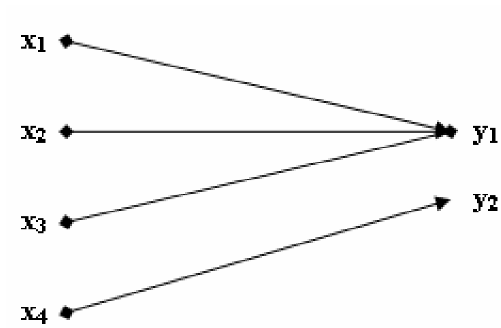

Fig. 2.6 Graful unui canal cu eroare medie nulă

În general, în cazul acestui tip de canal discret de transmisiuni, dacă se ştie ce se transmite, se ştie cu certitudine ce se recepționează, reciproca nefiind totdeauna adevărată.

Ținând cont de relația (2.32), eroarea medie a unui astfel de canal discret de transmisiuni este

$$H\left(Y|X\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p\left(x_k\right)\delta_{kj}\log\delta_{kj}=0 \qquad (2.68)$$

de unde şi denumirea canalului. Informația medie transmisă pe un astfel de canal este egală cu entropia câmpului de la ieşirea canalului.

Prin definiție, *un canal se numeşte uniform față de intrare*, dacă în fiecare linie a matricei sale de zgomot se foloseşte aceeaşi mulțime de probabilități condiționate, ordinea de scriere a acestor probabilități putând diferi de la o linie la alta. În cazul acestor canale, se poate demonstra că eroarea lor medie nu depinde de probabilitățile $p(x_k)$, $k=\overline{1,n}$, cu care sunt aplicate simbolurile la intrarea canalului.

Într-adevăr, conform definiției acestui tip de canal, se poate scrie

$$\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j \middle| x_k\right) \log p\left(y_j \middle| x_k\right) = A = \text{const},\ \ (\forall) k = \overline{1,n} \tag{2.69}$$

Ținând cont de (2.32) şi (2.69), rezultă

$$H\left(Y \middle| X\right) = -\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j \middle| x_k\right) \log p\left(y_j \middle| x_k\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} p(x_k) = -A \tag{2.70}$$

Prin definiție, *un canal se numeşte uniform față de ieşire*, dacă în fiecare coloană a matricei sale de zgomot se foloseşte aceeaşi mulțime de probabilități condiționate, ordinea de scriere a acestor probabilități putând diferi de la o coloană la alta. În cazul acestor canale se poate demonstra că, dacă simbolurile se aplică la intrarea canalului echiprobabil, atunci la ieşirea acestuia simbolurile vor rezulta, de asemenea, echiprobabile.

Într-adevăr, se presupune că

$$p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = \frac{1}{n} \tag{2.71}$$

Conform relațiilor (2.3) şi (2.11), se poate scrie

$$\begin{aligned} p(y_j) &= \sum_{k=1}^{n} p\left(y_j \cap x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k) p\left(y_j \middle| x_k\right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p\left(y_j \middle| x_k\right), (\forall) j = \overline{1,m} \end{aligned} \tag{2.72}$$

Dar

$$\sum_{k=1}^{n} p\left(y_j | x_k\right) = B = \text{const.}, \quad (\forall)\, j = \overline{1, m} \tag{2.73}$$

deoarece în fiecare coloană se folosesc aceleaşi probabilităţi condiţionate.

Ţinând cont de (2.73), relaţia (2.72) devine

$$p\left(y_j\right) = \frac{B}{n}, \quad (\forall)\, j = \overline{1, m} \tag{2.74}$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j\right) = 1 \tag{2.75}$$

rezultă

$$B = \frac{n}{m} \tag{2.76}$$

şi deci

$$p\left(y_j\right) = \frac{1}{m}, \quad (\forall)\, j = \overline{1, m} \tag{2.77}$$

Prin definiţie, *un canal discret de transmisiuni se numeşte simetric*, dacă este caracterizat de o matrice de zgomot pătrată şi este uniform atât fată de intrare, cât şi faţă de ieşire.

2.7. Definirea capacităţi, redundanţei şi eficienţei unui canal discret de transmisiuni

Pentru a defini o măsură a eficienţei cu care se transmite informaţia pe un canal discret de transmisiuni şi apoi o margine superioară a acesteia, C. E. Shannon a introdus noţiunea de *capacitatea canalului.*

Prin definiție, *capacitatea unui canal discret* de transmisiuni este valoarea maximă a transinformației, adică

$$\begin{aligned} C &= \max\left[I(X,Y)\right] = \max\left[H(X) - H(X|Y)\right] = \\ &= \max\left[H(Y) - H(Y|X)\right] \end{aligned} \tag{2.78}$$

Maximizările în (2.78) se fac în raport cu probabilitățile $p(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, ale simbolurilor de la intrarea canalului.

Pentru a realiza acest deziderat, este necesar uneori ca sursa primară de informație $S = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$ ce-şi furnizează mesajele cu probabilitățile fixe $p(s_k)$, $k = \overline{1,N}$, să fie transformată într-o sursă secundară $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, astfel încât probabilitățile $p(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, cu care sursa secundară furnizează simbolurile x_i la intrarea canalului să maximizeze transinformația.

Această transformare corespunde unei adaptări statistice a sursei primare la canalul de transmisiuni şi se realizează prin operația de codare.

Prin *operația de codare* se întocmesc cuvinte de cod formate din succesiuni de simboluri $x_i \in X$. Dacă mulțimea cuvintelor de cod se notează cu $V = \{v_1, v_2, ..., v_N\}$, atunci prin operația de codare se realizează bijecția dintre $s_k \in S$ şi $v_k \in V$. Cuvintele de cod se vor aplica la intrarea canalului, evident, cu aceleaşi probabilități cu care sunt furnizate mesajele, adică $p(v_k) = p(s_k)$, $k = \overline{1,N}$, iar cuvintele de cod trebuie astfel întocmite, încât probabilitățile de folosire $p(x_i)$ ale simbolurilor x_i să maximizeze informația medie transmisă pe canal, adică transinformația.

Prin definiție, se numeşte *redundanță absolută* a unui canal discret de transmisiuni diferența dintre capacitatea canalului şi informația medie transmisă pe acesta, adică

$$R_C = C - I(X,Y) \tag{2.79}$$

Redundanța relativă se obține prin raportarea redundanței absolute la capacitatea canalului, adică

$$\rho_c = \frac{R_c}{C} = 1 - \frac{I(X,Y)}{C} \tag{2.80}$$

Prin definiție, se numeşte eficiența canalului de transmisiuni raportul dintre informația medie transmisă pe canal şi capacitatea acestuia, adică

$$\eta_C = \frac{I(X,Y)}{C} \tag{2.81}$$

2.8. Determinarea capacității canalului simetric de ordin n

Matricea de zgomot a unui astfel de canal este

$$\left[P(Y|X)\right] = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{n-1} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \frac{p}{n-1} & \text{1-p} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{n-1} & \frac{p}{n-1} & \cdots & \text{1-p} \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

unde $0<p<1$ este un parametru ce caracterizează canalul respectiv.

Canalul fiind uniform față de intrare, înseamnă că eroarea sa medie este o constantă. Într-adevăr

$$\begin{aligned}H(Y|X) &= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k \cap y_j)\log p(y_j|x_k) = \\&= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_k)\, p(y_j|x_k)\log p(y_j|x_k) = \\&= -\left[(1-p)\log(1-p) + (n-1)\frac{p}{n-1}\log\frac{p}{n-1}\right]\cdot\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = \\&= -(1-p)\log(1-p) - p\log p + p\log(n-1) = \text{const.}\end{aligned} \tag{2.83}$$

Datorită acestei proprietăți, capacitatea acestui canal discret de transmisiuni se determină uşor, utilizând relația

$$C = \max\left[H(Y) - H(Y|X)\right] = \max\left[H(Y)\right] - H(Y|X) \tag{2.84}$$

Pe de altă parte, valoarea maximă a entropiei H(Y) se atinge atunci când

$$p(y_1) = p(y_2) = \ldots = p(y_n) = \frac{1}{n}, \tag{2.85}$$

obținându-se

$$\max\left[H(Y)\right] = \log n \tag{2.86}$$

Canalul fiind uniform şi față de ieşire, rezultă că, dacă

$$p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = \frac{1}{n}\ , \tag{2.87}$$

este adevărată şi relația (2.85).

Înlocuind (2.83) şi (2.86) în relația (2.84), rezultă

$$C = \log n + (1-p)\log(1-p) + p\log p - p\log(n-1) \tag{2.88}$$

care reprezintă capacitatea canalului simetric de ordinul n şi care se atinge când simbolurile de la intrarea acestuia sunt aplicate echiprobabil.

Un caz particular, frecvent întâlnit în aplicații, este acela al canalului *binar simetric*. Acest caz se obține pentru n=2.

Particularizând relația (2.82) pentru n=2, se obține matricea de zgomot a canalului binar simetric, cu graful reprezentat în Fig. 2.7.

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix} \tag{2.89}$$

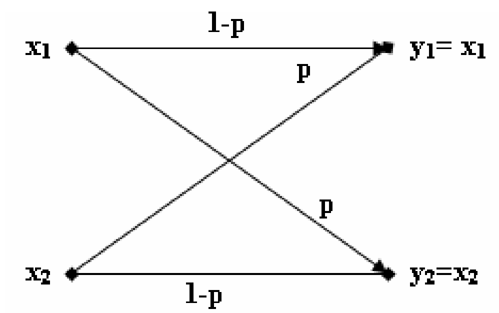

Fig. 2.7. Graful unui canal binar simetric

În acest caz, *p* reprezintă probabilitatea transmisiei incorecte (eronate), în timp ce 1-*p* probabilitatea transmiterii corecte.

În cazurile practice, prin x_1 şi x_2 se pot înțelege "0" şi "1" logic, două semnale sinusoidale de aceeaşi amplitudine, dar de frecvențe diferite, două semnale de aceleaşi amplitudini şi frecvențe, dar de faze diferite etc.

Capacitatea canalului simetric de ordinul doi se obține particularizând relația generală (2.88) pentru *n*=2, rezultând

$$C=1+\left(1-p\right)\log\left(1-p\right)+p\log p \tag{2.90}$$

sau, cu notația (1.44), se poate scrie

$$C=1-H\left(p\right) \tag{2.91}$$

Având în vedere reprezentarea grafică a funcției $H\left(p\right)$ (Fig. 1.3), reprezentarea grafică a capacității canalului simetric de ordinul doi, funcție de parametrul *p*, este dată în Fig. 2.8. În această figură, cu linie întreruptă s-a reprezentat $H(p)$, iar cu linie continuă capacitatea canalului. Atât din relația (2.90), cât şi din reprezentarea grafică a capacității canalului simetric de ordinul doi rezultă că aceasta este nulă pentru p=1/2 şi maximă, egală cu C=1, pentru p=0 sau p=1.

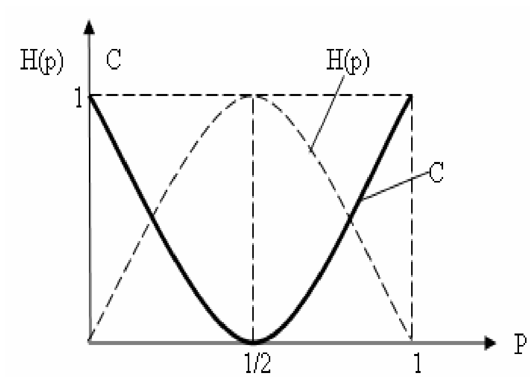

Fig. 2.8. Reprezentarea grafică a capacității canalului simetric de ordin doi

2.9. Determinarea capacității canalului binar cu anulări

Acest canal este uniform față de intrare, având un alfabet de intrare binar şi un alfabet de ieşire ternar.

Matricea de zgomot a acestui canal este de forma

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix} p\left(y_1|x_1\right) & p\left(y_2|x_1\right) & p\left(y_3|x_1\right) \\ p\left(y_1|x_2\right) & p\left(y_2|x_2\right) & p\left(y_3|x_2\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & q & 1-p-q \\ 1-p-q & q & p \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

unde p şi q sunt numere reale ce caracterizează canalul respectiv, satisfăcând condiţiile

$$\begin{cases} 0 \le p \le 1 \\ 0 \le q \le 1 \end{cases} \tag{2.93}$$

Dacă, de exemplu, x_1, reprezintă un semnal de frecvenţă f_1, iar x_2 un semnal de frecvenţă f_2, atunci prin y_1, se va înţelege un semnal de frecvenţă f_1, prin y_3, un semnal de frecvenţă f_2 iar prin y_2 un semnal de frecvenţă $(f_1 + f_2)/2$.

La recepţionarea simbolului y_2, egal probabil ar fi putut fi transmise simbolurile x_1, sau x_2 şi din această cauză, la recepţionarea unui astfel de semnal, el se anulează, de unde şi denumirea canalului.

Canalul fiind uniform faţă de intrare, înseamnă că eroarea sa medie este o constantă. Într-adevăr

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_k \cap y_j)\log p(y_j|x_k) = \\
&= -\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_k)\,p(y_j|x_k)\log p(y_j|x_k) = \\
&= -\left[p\log p + q\log q + (1-p-q)\log(1-p-q)\right]\left[p(x_1)+p(x_2)\right] = \\
&= -p\log p - q\log q - (1-p-q)\log(1-p-q) = const.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Datorită acestei proprietăţi, capacitatea acestui canal de transmisiuni se determină uşor utilizând relaţia (2.84).

Spre deosebire de cazul canalului simetric de ordinul *n*, când valoarea maximă a entropiei $H(Y)$ se atingea când simbolurile recepţionate erau echiprobabile, în acest caz, aşa cum se va demonstra ulterior, $p(y_2) = const.$ şi, deci, valoarea maximă a entropiei se obține atunci când

$$p(y_1) = p(y_3) \tag{2.95}$$

Într-adevăr, conform relației (2.3), se poate scrie

$$p(y_1) = p(x_1) \cdot p + p(x_2) \cdot (1 - p - q) \tag{2.96}$$

$$p(y_2) = q\left[p(x_1) + p(x_2)\right] = q = const. \tag{2.97}$$

$$p(y_3) = p(x_1) \cdot (1 - p - q) + p(x_2) \cdot p \tag{2.98}$$

Înlocuind (2.96) şi (2.98) în (2.95), rezultă

$$(2p + q - 1)\, p(x_1) = (2p + q - 1)\, p(x_2) \tag{2.99}$$

Dacă

$$(2p + q - 1) \neq 0 \tag{2.100}$$

entropia $H(Y)$ devine maximă atunci când

$$p(x_1) = p(x_2) \tag{2.101}$$

şi cum

$$p(x_1) + p(x_2) = 1 \tag{2.102}$$

rezultă că entropia $H(Y)$ devine maximă, dacă simbolurile x_1 şi x_2 sunt aplicate echiprobabil la intrarea canalului, adică

$$p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \tag{2.103}$$

Ținând cont de (2.103), relațiile (2.96) şi (2.98) devin

$$p(y_1) = p(y_3) = \frac{1 - q}{2} \tag{2.104}$$

Cu relațiile (2.97) şi (2.104), valoarea maximă a entropiei $H(Y)$ este

$$\max\left[H(Y)\right] = 1 - q - (1 - q)\log(1 - q) - q\log q \tag{2.105}$$

Înlocuind relațiile (2.94) şi (2.105) în relația (2.84), rezultă capacitatea canalului binar cu anulări, de forma

$$C = 1 - q - (1-q)\log(1-q) + p\log p + (1-p-q)\log(1-p-q)$$
(2.106)

În cazul q=0, canalul binar cu anulări devine binar simetric. Impunând q=0 în relația (2.106), rezultă capacitatea canalului binar simetric, dată de relația (2.90).

Dacă relația (2.100) nu este satisfăcută, se poate scrie

$$2p + q - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1-q}{2} \tag{2.107}$$

Înlocuind (2.107) în (2.106), rezultă C=0. În acest caz simbolurile y_1 şi y_3 provin egal probabil din simbolurile x_1, şi x_2, astfel încât, pentru acest caz particular, nu se transmite nici o informație pe canalul respectiv.