

## CAPITOLUL 4

### ESTIMAREA FORMEI SEMNALULUI

Estimarea formei semnalului este o operație de filtrare a semnalului util, purtător de informație, din semnalul recepționat, impunându-se pentru aceasta un semnal dorit a fi estimat,  $d(t)$ .

#### 4.1. Schema bloc a unui sistem de transmisiuni care realizează estimarea formei semnalului

În figura 4.1 se dă schema bloc simplificată a unui sistem de transmisiuni care realizează estimarea formei semnalului.

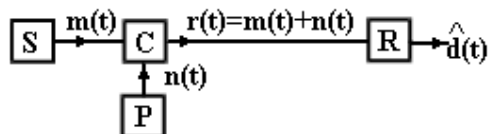


Fig. 4.1. Schema bloc a unui sistem de transmisiuni care realizează estimarea formei semnalului

Sursa de informație, S, furnizează mesajul  $m(t)$  purtător de informație care, în cazul general, va fi descris matematic de un proces aleator, staționar în sens larg. Canalul de transmisiuni, C, este afectat de perturbațiile P, caracterizate de zgomotul  $n(t)$ , care, în cazul general, va fi, de asemenea, descris de un proces aleator, staționar în sens larg. Mai mult, zgomotul de pe canalul de transmisiuni se va considera aditiv, adică semnalul recepționat,  $r(t)$ , va fi de forma:

$$r(t) = m(t) + n(t) \quad (4.1)$$

Cunoscându-se statistica zgomotului de pe canal, receptorul R va trebui proiectat astfel încât, la aplicarea semnalului recepționat la intrarea acestuia, să rezulte la ieșire un estimat,  $\hat{d}(t)$ .

În cazul cel mai general, semnalul dorit a fi estimat este de forma:

$$d(t) = F[m(t)] \quad (4.2)$$

unde F este o transformată cunoscută a mesajului furnizat de sursă.

În aplicațiile practice, transformata F este liniară și de obicei foarte simplă, întâlnindu-se curent următoarele situații:

1) *Filtrarea mesajului* din semnalul recepționat, caz în care:

$$d(t) = m(t) \quad (4.3)$$

2) *Filtrarea cu întârziere* a mesajului din semnalul recepționat, operație întâlnită și sub denumirile de *interpolare* sau *netezire*, caz în care:

$$d(t) = m(t + \alpha), \alpha < 0 \quad (4.4)$$

3) *Filtrarea cu anticipare* a mesajului din semnalul recepționat, operație întâlnită și sub denumirile de *extrapolare* sau *predicție*, caz în care:

$$d(t) = m(t + \alpha), \alpha > 0 \quad (4.5)$$

Între semnalul dorit a fi estimat,  $d(t)$ , și estimatul furnizat la ieșirea receptorului,  $\hat{d}(t)$ , există totdeauna o diferență, numită eroare de estimare, notată  $\varepsilon(t)$ , dată de relația:

$$\varepsilon(t) = d(t) - \hat{d}(t) \quad (4.6)$$

Aprecierea estimării ca optimală se face în raport cu un criteriu care, în general, minimizează o funcție a erorii de estimare.

Unul dintre cele mai utilizate criterii este criteriul erorii

pătratică medii minime, conform căruia se minimizează eroarea pătratică medie:

$$\overline{\varepsilon^2(t_1)} = \overline{[d(t_1) - \hat{d}(t_1)]^2} \quad (4.7)$$

#### 4.2. Ecuația integrală Wiener - Hopf

Considerând semnalele  $m(t)$  și  $n(t)$  procese aleatoare staționare în sens larg, cu valoare medie nulă, receptorul care poate minimiza eroarea pătratică medie dată de relația (4.7) se va numi filtru optimal. În aceste condiții acesta poate fi determinat în clasa filtrelor liniare invariante în timp.

Notând cu  $h_0(t)$  funcția pondere a unui astfel de filtru optimal, estimatul (răspunsul),  $\hat{d}(t)$ , la semnalul recepționat  $r(t)$ , care asigură eroarea pătratică medie minimă,  $\overline{\varepsilon_0^2(t_1)}$ , se poate deduce cu integrala de convoluție:

$$\hat{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) r(t - \tau) d\tau \quad (4.8)$$

Pentru ca filtrul optimal să fie cauzal, trebuie satisfăcută condiția:

$$h_0(t) = 0, \text{ pentru } t < 0 \quad (4.9)$$

Cu restricția dată de (4.9), relația (4.8) devine:

$$\hat{d}(t) = \int_0^{\infty} h_0(\tau) r(t - \tau) d\tau \quad (4.10)$$

Eroarea pătratică medie minimă se poate atunci calcula înlocuind (4.10) în (4.7), pentru  $t = t_1$  arbitrar, adică:

$$\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} = m_1 \left\{ \left[ d(t_1) - \int_0^\infty h_0(\tau) r(t_1 - \tau) d\tau \right]^2 \right\} \quad (4.11)$$

În scopul determinării funcției pondere  $h_0(t)$  a filtrului optimal care asigură eroarea pătratică medie minimă, se consideră un filtru liniar invariant cu funcția pondere:

$$h(t) = h_0(t) + \lambda l(t) \quad (4.12)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real.

Pentru asigurarea cauzalității, va trebui ca pe lângă condiția dată de relația (4.9) să se impună suplimentar condiția:

$$l(t) = 0, \text{ pentru } t < 0 \quad (4.13)$$

Termenul  $\lambda l(t)$  din relația (4.12) reprezintă abaterea funcției  $h(t)$  de la funcția pondere  $h_0(t)$  a filtrului optimal.

Notând cu  $\overline{\varepsilon^2(t_1)}$  eroarea pătratică medie cauzată de filtrul caracterizat de funcția pondere  $h(t)$ , aceasta poate fi calculată cu relația:

$$\overline{\varepsilon^2(t_1)} = m_1 \left\{ \left[ d(t_1) - \int_0^\infty h(\tau) r(t_1 - \tau) d\tau \right]^2 \right\} \quad (4.14)$$

sau, ținând cont de (4.12), rezultă echivalent, relația:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t_1)} &= m_1 \left\{ \left[ d(t_1) - \int_0^\infty h_0(\tau) r(t_1 - \tau) d\tau - \lambda \int_0^\infty l(u) r(t_1 - u) du \right]^2 \right\} = \\ &= a\lambda^2 + b\lambda + c \end{aligned} \quad (4.15)$$

unde coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt independenți de parametrul  $\lambda$ .

Din relația (4.12) rezultă că pentru  $\lambda = 0$  se obține funcția pondere a filtrului optimal, indiferent de  $l(t)$ .

Condiția necesară de extrem a erorii pătratice medii, ca funcție de  $\lambda$ , se obține egalând cu zero derivata acesteia în raport cu  $\lambda$ . Extremul respectiv este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^2(t_1)}{\partial \lambda^2} = 2a = 2m_1 \left\{ \left[ \int_0^\infty l(u)r(t_1-u)du \right]^2 \right\} > 0.$$

Reunind cele două condiții, rezultă că eroarea pătratică medie devine minimă, atunci când este îndeplinită condiția:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon^2(t_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \Leftrightarrow b = 0 \quad (4.16)$$

Identificând coeficientul lui  $\lambda$  din relația (4.15) și egalându-l cu zero, rezultă:

$$\int_0^\infty l(u) \left[ \overline{d(t_1)r(t_1-u)} - \int_0^\infty h_0(\tau) \overline{r(t_1-\tau)r(t_1-u)} d\tau \right] du = 0 \quad (4.17)$$

Ținând cont de (4.13), rezultă că relația (4.17) este adevărată atunci când:

$$\overline{d(t_1)r(t_1-u)} - \int_0^\infty h_0(\tau) \overline{r(t_1-\tau)r(t_1-u)} d\tau = 0, u \geq 0 \quad (4.18)$$

Dar:

$$\overline{d(t_1)r(t_1-u)} = B_{dr}(t_1-u-t_1) = B_{dr}(-u) = B_{rd}(u) \quad (4.19)$$

reprezintă funcția de corelație între semnalul recepționat,  $r(t)$ , și semnalul dorit a fi estimat,  $d(t)$ , iar:

$$\begin{aligned} \overline{r(t_1-\tau)r(t_1-u)} &= B_{rr}[(t_1-u)-(t_1-\tau)] = B_{rr}(\tau-u) = \\ &= B_{rr}(u-\tau) \end{aligned} \quad (4.20)$$

reprezintă funcția de autocorelație a semnalului recepționat.

Cu (4.19) și (4.20), relația (4.18) devine:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau) B_{rr}(u-\tau) d\tau = B_{rd}(u), u \geq 0 \quad (4.21)$$

Ecuția integrală (4.21) este cunoscută în literatura de specialitate ca *ecuația integrală Wiener - Hopf*. Din această ecuație se determină funcția pondere  $h_0(t)$  a filtrului optimal, care asigură eroarea pătratică medie minimă, chiar în cazul cel mai defavorabil, când mesajul  $m(t)$  purtător de informație este înecat în zgomotul  $n(t)$ .

Din demonstrația care a condus la ecuația integrală Wiener - Hopf rezultă că nici un alt filtru liniar nu poate realiza o eroare pătratică medie mai mică decât filtrul liniar cu funcția pondere  $h_0(t)$ , ce satisface această ecuație integrală.

*Observația 1:* Ecuația integrală Wiener - Hopf poate fi formal obținută plecându-se de la integrala de convoluție. Într-adevăr, dacă receptorul R din figura (4.1) este caracterizat de funcția pondere  $h_0(t)$ , în condițiile de cauzalitate se poate scrie:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau) r(u-\tau) d\tau = d(u) \quad (4.22)$$

Înmulțind la stânga cu  $r(0) \neq 0$  ambii membri ai ecuației (4.22), se poate scrie succesiv:

$$\left. \begin{aligned} r(0) \int_0^{\infty} h_0(\tau) r(u-\tau) d\tau &= r(0) d(u) \Leftrightarrow \\ \int_0^{\infty} h_0(\tau) r(0) r(u-\tau) d\tau &= r(0) d(u) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Mediind ambii termeni, rezultă:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \left\{ \int_0^{\infty} h_0(\tau) r(0) r(u-\tau) d\tau \right\} &= m_1 \{ r(0) d(u) \} \Leftrightarrow \\ \int_0^{\infty} h_0(\tau) \overline{r(0) r(u-\tau)} d\tau &= \overline{r(0) d(u)} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Dar:

$$\left. \begin{aligned} \overline{r(0)r(u-\tau)} &= B_{rr}(u-\tau-0) = B_{rr}(u-\tau) \\ \overline{r(0)d(u)} &= B_{rd}(u-0) = B_{rd}(u) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Rezultă astfel ecuația integrală:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau) B_{rr}(u-\tau) d\tau = B_{rd}(u) \quad (4.26)$$

### Observația 2

Faptul că mesajul  $m(t)$  s-a presupus un proces aleator, poate fi justificat presupunând că se fac două observări asupra unui semnal determinist  $s(t)$ .

Se presupune că, la prima observare, peste semnalul determinist se suprapune zgomotul  $n_1(t)$ , modelat matematic de un proces aleator staționar în sens larg. La o a doua observare se presupune că peste semnalul determinist se suprapune zgomotul  $n_2(t)$ , modelat, de asemenea, matematic de un proces aleator staționar în sens larg. Pentru estimarea semnalului determinist  $s(t)$ , utilizând o filtrare optimală Wiener Hopf, se folosește schema bloc din figura 4.4.

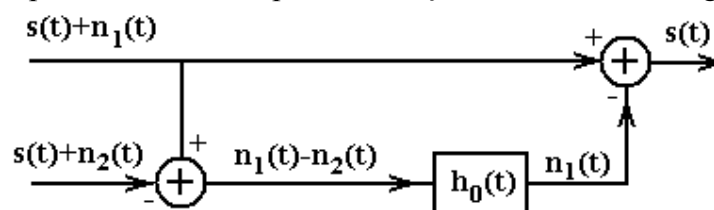


Fig. 4.2. Schema bloc pentru estimarea unui semnal determinist  $s(t)$

În acest caz, semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = n_1(t) - n_2(t), \quad (4.27)$$

fiind într-adevăr un proces aleator, staționar în sens larg, dacă zgomotele  $n_1(t)$  și  $n_2(t)$  sunt procese aleatoare staționare în sens larg.

Filtrul optimal, caracterizat de funcția pondere  $h_o(t)$ , va furniza la ieșire procesul aleator  $n_1(t)$ , cu eroarea pătratică medie minimă, dacă funcția pondere satisface ecuația integrală Wiener – Hopf (4.21), unde:

$$\begin{aligned} B_{rr}(u) &= \overline{r(t_1)r(t_1+u)} = \\ & \overline{[n_1(t_1) - n_2(t_1)][n_1(t_1+u) - n_2(t_1+u)]} = B_{n_2n_2}(u) + B_{n_1n_1}(u) \end{aligned} \quad (4.28)$$

În relația (4.28) s-a ținut cont că zgomotele  $n_1(t)$  și  $n_2(t)$  sunt procese aleatoare statistic independente, cu valoare medie nulă, adică

$$\left. \begin{aligned} \overline{n_1(t_1)n_2(t_1+u)} &= \overline{n_1(t_1)} \cdot \overline{n_2(t_1+u)} = 0 \\ \overline{n_2(t_1)n_1(t_1+u)} &= \overline{n_2(t_1)} \cdot \overline{n_1(t_1+u)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} B_{rd}(u) &= B_{rn_1}(u) = \overline{r(t_1)n_1(t_1+u)} = \overline{[n_1(t_1) - n_2(t_1)]n_1(t_1+u)} \\ &= B_{n_1n_1}(u) \end{aligned} \quad (4.30)$$

În felul acesta, ecuația integrală Wiener-Hopf pentru determinarea funcției pondere  $h_o(t)$  a filtrului optimal va fi în acest caz, de forma:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau) [B_{n_2n_2}(u-\tau) + B_{n_1n_1}(u-\tau)] d\tau = B_{n_1n_1}(u), u \geq 0 \quad (4.31)$$

### 4.3. Soluția ecuației integrale Wiener - Hopf în cazul filtrelor optimale necauzale

Dacă se renunță la condiția de cauzalitate a filtrului optimal, soluția ecuației integrale Wiener - Hopf se obține foarte ușor, deoarece în acest caz relația (4.21) devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{0n}(\tau) B_{rr}(u-\tau) d\tau = B_{rd}(u), -\infty < u < \infty \quad (4.32)$$



unde prin  $h_{0n}(\tau)$  s-a notat funcția pondere a filtrului optimal necauzal.

Fie  $S_{rr}(j\omega)$ ,  $S_{rd}(j\omega)$  și  $H_{0n}(j\omega)$ , densitatea spectrală de putere a semnalului recepționat, densitatea spectrală de putere de interacțiune, respectiv funcția de transfer a filtrului optimal necauzal, adică:

$$\left. \begin{aligned} S_{rr}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{rr}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ S_{rd}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{rd}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ H_{0n}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{0n}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Ținând cont de (4.33), transformata Fourier aplicată ecuației (4.32), permite să se scrie:

$$H_{0n}(j\omega)S_{rr}(j\omega) = S_{rd}(j\omega) \Rightarrow H_{0n}(s) = \frac{S_{rd}(j\omega)}{S_{rr}(j\omega)}$$

sau în variabilă complexă  $s = \sigma + j\omega$ :

$$H_{0n}(s) = \frac{S_{rd}(s)}{S_{rr}(s)} \quad (4.34)$$

Se presupune peste tot că regiunea de convergență a funcțiilor în variabilă complexă  $s$  conține axa imaginară  $j\omega$  și, deci, peste tot este posibilă înlocuirea lui  $s$  cu  $j\omega$ . Funcția de transfer  $H_{0n}(s)$  astfel obținută va avea, probabil, poli și în semiplanul drept, caracterizând astfel un filtru optimal nerealizabil.

Dacă semnalul recepționat  $r(t)$  este dat de relația (4.1), atunci, conform teoremei Wiener - Khintcin, se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 S_{rr}(j\omega) &= F\{B_{rr}(\tau)\} = F\{\overline{r(t_1)r(t_1+\tau)}\} = \\
 &= F\{\overline{[m(t_1)+n(t_1)][m(t_1+\tau)+n(t_1+\tau)]}\} = \\
 &= F\{\overline{m(t_1)m(t_1+\tau)} + \overline{n(t_1)n(t_1+\tau)}\} = \\
 &= F\{B_{mm}(\tau)\} + F\{B_{nn}(\tau)\} = S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega),
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

deoarece

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{n(t_1)m(t_1+\tau)} &= \overline{n(t_1)} \cdot \overline{m(t_1+\tau)} = 0 \\
 \overline{m(t_1)n(t_1+\tau)} &= \overline{m(t_1)} \cdot \overline{n(t_1+\tau)} = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4.37}$$

Relațiile (4.37) se datorează independenței statistice a zgomotului de pe canal față de mesajul  $m(t)$  purtător de informație și faptului că valoarea medie a zgomotului este nulă.

În mod analog, se poate scrie:

$$S_{rd}(j\omega) = F\{B_{rd}(\tau)\} = F\{\overline{r(t_1)d(t_1+\tau)}\} \tag{4.38}$$

În cazul filtrării mesajului din semnalul recepționat, adică atunci când este îndeplinită relația (4.3), rezultă:

$$\begin{aligned}
 S_{rd}(j\omega) &= F\{\overline{r(t_1)m(t_1+\tau)}\} = \\
 &= F\{\overline{[m(t_1)+n(t_1)]m(t_1+\tau)}\} = \\
 &= F\{\overline{m(t_1)m(t_1+\tau)}\} = F\{B_{mm}(\tau)\} = S_{mm}(j\omega)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Funcția de transfer a filtrului optimal necauzal se obține înlocuind (4.36) și (4.39) în relația (4.34), adică:

$$H_{on}(j\omega) = \frac{S_{mm}(j\omega)}{S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)} \tag{4.40}$$

În cazul filtrării cu întârziere sau cu anticipare a mesajului din semnalul recepționat, rezultă:

$$\begin{aligned}
 S_{rd}(j\omega) &= F\left\{\overline{r(t_1)m(t_1 + \tau + \alpha)}\right\} = \\
 &= F\left\{\overline{[m(t_1) + n(t_1)]m(t_1 + \tau + \alpha)}\right\} = \quad .41) \\
 &= F\left\{B_{mm}(\tau + \alpha)\right\} = e^{j\omega\alpha} S_{mm}(j\omega)
 \end{aligned}$$

Înlocuind relațiile (4.36) și (4.41) în (4.34), funcția de transfer a filtrului optimal necauzal devine:

$$H_{on}(j\omega) = \frac{S_{mm}(j\omega)}{S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)} e^{j\omega\alpha} \quad (4.42)$$

În cazul filtrării cu întârziere,  $\alpha < 0$ , iar în cazul filtrării cu anticipare,  $\alpha > 0$ . Din relațiile (4.40) și (4.42) rezultă că modulul funcției de transfer rămâne același, fie că se realizează filtrarea, filtrarea cu întârziere sau filtrarea cu anticipare, adică :

$$|H_{on}(j\omega)| = \frac{|S_{mm}(j\omega)|}{|S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)|} = \frac{S_{mm}(j\omega)}{S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)} \quad (4.43)$$

deoarece densitățile spectrale de putere  $S_{mm}(j\omega)$  și  $S_{nn}(j\omega)$  sunt mărimi reale pozitive.

Dacă densitatea spectrală de putere a mesajului,  $S_{mm}(j\omega)$ , și densitatea spectrală de putere a zgomotului,  $S_{nn}(j\omega)$ , sunt în benzi adiacente (fig. 4.3), atunci filtrul optimal se reduce la un filtru trece bandă, plasat în regiunea spectrului semnalului.

În acest caz, în banda  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ ,  $S_{mm}(j\omega) \neq 0$ ,  $S_{nn}(j\omega) = 0$  și, deci:

$$|H_{on}(j\omega)| = 1 \quad (4.44)$$

iar în banda  $\omega_1 < \omega < \infty$ ,  $S_{mm}(j\omega) = 0$ ,  $S_{nn}(j\omega) \neq 0$  și, deci:

$$|H_{on}(j\omega)| = 0 \quad (4.45)$$

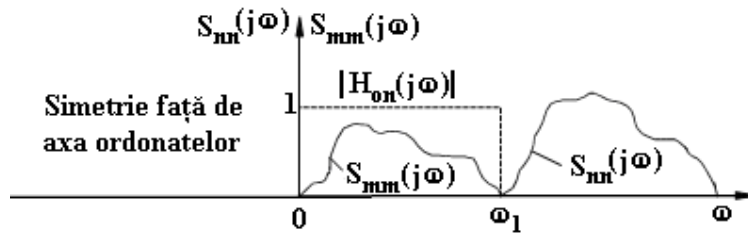


Fig. 4.3. Cazul când  $S_{mm}(j\omega)$  și  $S_{nn}(j\omega)$  sunt în benzi adiacente

Dacă densitățile spectrale de putere ale semnalului și zgomotului se suprapun parțial (fig. 4.4), atunci este necesar ca în banda  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ ,  $|H_{on}(j\omega)| = 1$ , în banda  $\omega_1 < \omega \leq \omega_2$  filtrul să prezinte o atenuare cu atât mai mare cu cât zgomotul este mai mare, iar în banda  $\omega_2 < \omega < \infty$ ,  $|H_{on}(j\omega)| = 0$ .

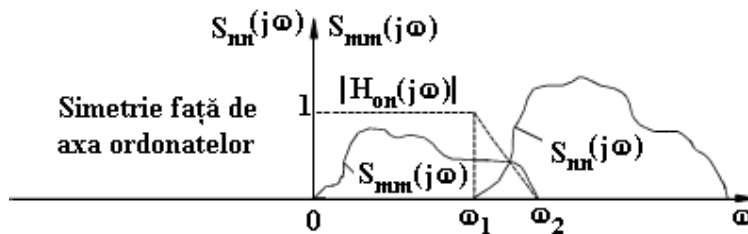


Fig. 4.4. Cazul când  $S_{mm}(j\omega)$  și  $S_{nn}(j\omega)$  se suprapun parțial

Evident, în acest caz, în banda  $(\omega_1, \omega_2)$  apar erori în filtrarea optimă, deoarece în această bandă va trece și o parte din zgomot.

În fine, în cazul în care semnalul util, purtător de informație, este înecat în zgomot (fig. 4.5), neglijând termenul  $S_{mm}(j\omega)$  în raport cu termenul  $S_{nn}(j\omega)$ , rezultă modulul funcției de transfer a filtrului optimal, de forma:

$$|H_{0n}(j\omega)| \approx \frac{|S_{mm}(j\omega)|}{|S_m(j\omega)|} \quad (4.46)$$

Deși în ultimul caz, care este cel mai dificil, apar erori în filtrarea optimală, filtrul optimal cu modulul funcției de transfer dat de relația (4.46) va asigura o eroare pătratică medie minimă.

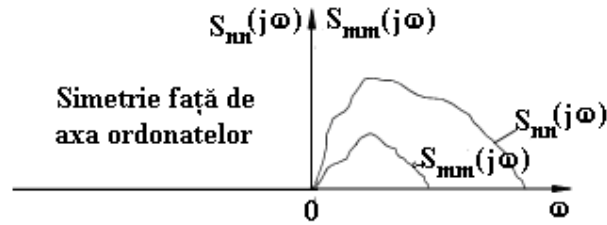


Fig. 4.5. Cazul când semnalul util este înecat în zgomot

Un caz particular interesant este acela al predicției pure în lipsa perturbațiilor.

Impunând în relația (4.42)  $S_m(j\omega) = 0$ , rezultă:

$$H_{0n}(j\omega) = e^{j\omega\alpha}, \alpha > 0 \quad (4.47)$$

Funcția de transfer a filtrului optimal necauzal în cazul filtrării cu întârziere și în lipsa zgomotului va fi atunci:

$$H_{0n}(j\omega) = e^{j\omega\alpha}, \alpha < 0 \quad (4.48)$$

#### 4.4. Soluția ecuației integrale Wiener - Hopf în cazul când semnalul recepționat este zgomot alb

Se presupune că semnalul recepționat  $r(t)$  poate fi aproximat cu zgomotul alb, adică:

$$r(t) = a(t) \quad (4.49)$$

unde prin  $a(t)$  s-a notat zgomotul alb cu densitatea spectrală de putere  $S_0$ .

În acest caz, funcția de autocorelație a semnalului recepționat devine:

$$B_{rr}(u) = B_{aa}(u) = S_0 \delta(u) \quad (4.50)$$

Dacă se notează cu  $h_{0a}(\tau)$  funcția pondere a filtrului optimal și cu  $B_{ad}(u)$  funcția de corelație dintre zgomotul alb și semnalul dorit a fi estimat, atunci ecuația integrală Wiener - Hopf (rel. 4.21) devine:

$$S_0 \int_0^{\infty} h_{0a}(\tau) \delta(u - \tau) d\tau = B_{ad}(u), u \geq 0 \quad (4.51)$$

Fără a micșora generalitatea rezultatelor, se consider  $S_0 = 1$  și atunci, ținând cont de proprietatea de filtrare a distribuției Dirac,  $\delta(u - \tau)$ , relația (4.51) se poate scrie sub forma:

$$h_{0a}(u) = B_{ad}(u), u \geq 0 \quad (4.52)$$

Se notează cu  ${}^+B_{ad}(u)$  funcția de corelație între zgomotul alb și funcția dorită a fi estimată pentru  $u \geq 0$  și cu  ${}^-B_{ad}(u)$ , pentru  $u < 0$ . Cu aceste notații, se poate scrie:

$$B_{ad}(u) = {}^+B_{ad}(u) + {}^-B_{ad}(u) \quad (4.53)$$

O reprezentare grafică posibilă a funcției de corelație  $B_{ad}(u)$  este dată în figura 4.6.

În figura 4.6, cu linie întreruptă s-a reprezentat partea din  $B_{ad}(u)$  pentru  $u < 0$ , iar cu linie continuă, partea din  $B_{ad}(u)$  pentru  $u \geq 0$ .

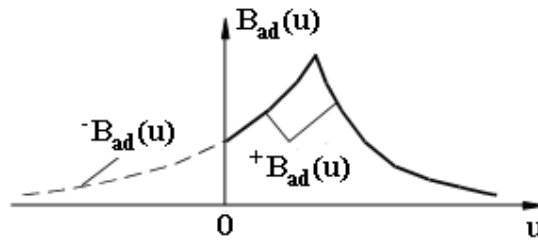


Fig. 4.6. Reprezentarea grafică a funcției de corelație  $B_{ad}(u)$

Ținând cont de relațiile (4.52) și (4.53), rezultă că funcția pondere a filtrului optimal, cauzal, la recepționarea zgomotului alb se determină cu relația

$$h_{oa}(u) = \begin{cases} {}^+B_{ad}(u), & \text{pentru } u \geq 0 \\ 0, & \text{pentru } u < 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

Aplicând transformata Laplace relației (4.54) și notând cu  $H_{oa}(s)$  funcția de transfer a filtrului optimal la recepționarea unui semnal ce poate fi considerat zgomot alb, rezultă

$$H_{oa}(s) = L\{{}^+B_{ad}(u)\} = \int_0^{\infty} {}^+B_{ad}(u)e^{-su} du \stackrel{\text{not}}{=} {}^+S_{ad}(s) \quad (4.55)$$

Pentru  $s = j\omega$ , relația (4.55) devine

$$H_{oa}(j\omega) = {}^+S_{ad}(j\omega) \quad (4.56)$$

#### 4.5. Soluția ecuației integrale Wiener Hopf în domeniul frecvență

Rezultatele obținute în paragraful precedent pot fi folosite în cazul general, dacă semnalul recepționat  $r(t)$ , cu densitatea spectrală de putere  $S_{rr}(j\omega)$ , poate fi transformat în zgomot alb.

Filtrul liniar cu funcția pondere  $h_a(t)$ , respectiv funcția de transfer  $H_a(j\omega)$ , care transformă semnalul de la intrare  $r(t)$  într-un semnal ce poate fi considerat zgomot alb,  $a(t)$ , se numește *filtru de albire*.

Pentru ca operația de albire să nu afecteze estimatul  $\hat{d}(t)$ , este necesar să se cascadeze cu filtrul de albire un filtru liniar care să realizeze operația inversă. Acesta se va numi *filtru invers față de operația de albire* și va fi caracterizat de funcția pondere  $h_a^{-1}(t)$ ,

respectiv de funcția de transfer  $H_a^{-1}(j\omega)$ .

Dacă se notează cu  $h_0(t)$  funcția pondere a filtrului optimal care satisface ecuația integrală Wiener - Hopf, respectiv cu  $H_0(j\omega)$  funcția sa de transfer, atunci schema bloc a receptorului se prezintă ca în figura 4.7.

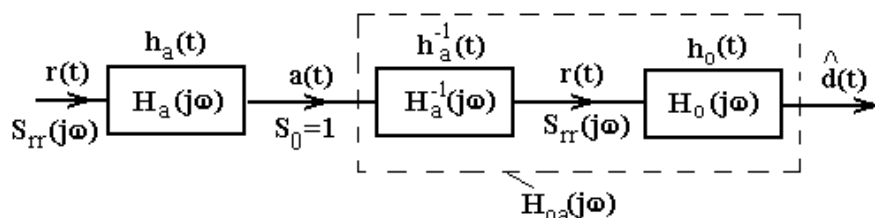


Fig. 4.7. Structura fictivă a filtrului optimal

Structura receptorului din figura 4.7 este fictivă, deoarece, așa cum va rezulta ulterior, operația de albire și inversa sa nu se realizează efectiv, aceste operații fiind introduse numai pentru facilitarea calculului funcției de transfer a filtrului optimal în domeniul frecvență.

Dacă formal se înlocuiește  $j\omega$  cu  $s$  în densitatea spectrală de putere a semnalului recepționat, atunci, în general, funcția  $S_{rr}(s)$  va avea zerouri și poli atât în semiplanul stâng, cât și în semiplanul drept.

Fie  $S_{rr}^-(s)$  partea din  $S_{rr}(s)$  care conține zerourile și poliile din semiplanul drept și  $S_{rr}^+(s)$  partea lui  $S_{rr}(s)$  care conține zerourile și poliile din semiplanul stâng. Cu aceste notații, se poate scrie:

$$S_{rr}(s) = S_{rr}^-(s)S_{rr}^+(s) \quad (4.57)$$

Dacă se înlocuiește  $s$  cu  $j\omega$ , relația (4.57) devine:

$$S_{rr}(j\omega) = S_{rr}^-(j\omega)S_{rr}^+(j\omega) \quad (4.58)$$

Așa cum s-a arătat în Capitolul 1, densitatea spectrală de putere este totdeauna o mărime reală. Pentru ca  $S_{rr}(j\omega)$  din (4.58) să fie o mărime reală, este necesar ca  $S_{rr}^-(s)$  și  $S_{rr}^+(s)$  să fie mărimi complex



conjugate, adică:

$$S_{rr}^-(j\omega) = S_{rr}^+(-j\omega) \quad (4.59)$$

Ținând cont de (4.59), relația (4.58) devine:

$$S_{rr}(j\omega) = |S_{rr}^+(j\omega)|^2 \quad (4.60)$$

Pe de altă parte, din schema din figura 4.7 se poate scrie:

$$H_{0a}(j\omega) = H_a^{-1}(j\omega)H_0(j\omega) \quad (4.61)$$

Ținând cont de (4.56), din relația (4.61) se deduce că:

$$H_0(j\omega) = \frac{+S_{ad}(j\omega)}{H_a^{-1}(j\omega)} \quad (4.62)$$

Conform relației (1.132) se poate scrie:

$$S_{rr}(j\omega) = |H_a^{-1}(j\omega)|^2 S_0 = |H_a^{-1}(j\omega)|^2 \quad (4.63)$$

Comparând relația (4.60) cu (4.63) și având în vedere că faza funcției  $S_{rr}(j\omega)$  este nulă, se poate scrie:

$$H_a^{-1}(j\omega) = S_{rr}^+(j\omega) \quad (4.64)$$

Înlocuind (4.64) în relația (4.62), rezultă:

$$H_0(j\omega) = \frac{+S_{ad}(j\omega)}{S_{rr}^+(j\omega)} \quad (4.65)$$

Pentru a determina relația dintre funcția de transfer a filtrului de albire,  $H_a(j\omega)$  și funcția de transfer a filtrului invers față de operația de albire,  $H_a^{-1}(j\omega)$ , astfel încât cele două operații să fie reversibile, se scrie răspunsul filtrului de albire la excitația  $r(t)$  și cel al filtrului invers față de operația de albire la excitația  $a(t)$ , conform figurii 4.7, adică:

$$a(t) = r(t) * h_a(t) \quad (4.66)$$

$$r(t) = a(t) * h_a^{-1}(t) \quad (4.67)$$

unde „\*” reprezintă operația de convoluție.

Înlocuind (4.66) în relația (4.67), rezultă:

$$r(t) = r(t) * h_a(t) * h_a^{-1}(t) \quad (4.68)$$

Relația (4.68) este adevărată, numai dacă:

$$h_a(t) * h_a^{-1}(t) = \delta(t) \quad (4.69)$$

unde  $\delta(t)$  este distribuția Dirac.

Aplicând transformata Laplace ambilor membri ai relației (4.69), se poate scrie:

$$H_a(s)H_a^{-1}(s) = 1 \quad (4.70)$$

sau, pentru  $s = j\omega$ , rezultă:

$$H_a(j\omega) = \frac{1}{H_a^{-1}(j\omega)} \quad (4.71)$$

Înlocuind (4.64) în relația (4.71), rezultă:

$$H_a(j\omega) = \frac{1}{S_{rr}^+(j\omega)} \quad (4.72)$$

În aplicațiile practice nu se cunoaște  $S_{ad}(j\omega)$  și deci nici  $^+S_{ad}(j\omega)$  ce intervine în funcția de transfer a filtrului optimal. Pentru a elimina acest inconvenient, se ține cont că  $S_{ad}(j\omega)$  și  $B_{ad}(\tau)$  sunt perechi Fourier, aserțiune care poate fi demonstrată similar ca în cazul teoremei Wiener - Khintchine (paragraful 1.5).

Cu alte cuvinte, se poate scrie relația:

$$S_{ad}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{ad}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.73)$$

Dar funcția de corelație între zgomotul alb  $a(t)$  și funcția dorită a fi estimată  $d(t)$  se calculează cu relația:

$$B_{ad}(\tau) = m_1 \{a(t_1)d(t_1 + \tau)\}, \quad (4.74)$$

presupunându-se evident că  $a(t)$  și  $d(t)$  sunt procese aleatoare,

staționare în sens larg.

Pe de altă parte, conform figurii 4.7, se poate scrie:

$$a(t) = r(t) * h_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u) r(t-u) du \quad (4.75)$$

Înlocuind (4.75) în relația (4.74), pentru  $t = t_1$ , rezultă:

$$\begin{aligned} B_{ad}(\tau) &= m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u) r(t_1 - u) d(t_1 + \tau) du \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u) m_1 \{ r(t_1 - u) d(t_1 + \tau) \} du \end{aligned} \quad (4.76)$$

Dar

$$m_1 \{ r(t_1 - u) d(t_1 + \tau) \} = B_{rd}[(t_1 + \tau) - (t_1 - u)] = B_{rd}(\tau + u), \quad (4.77)$$

deoarece atât semnalul recepționat, cât și funcția dorită a fi estimată, sunt procese aleatoare staționare în sens larg.

Ținând cont de (4.76) și (4.77), relația (4.73) devine:

$$S_{ad}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{rd}(\tau + u) h_a(u) e^{-j\omega\tau} d\tau du \quad (4.78)$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\tau + u = v ; d\tau = dv \quad (4.79)$$

rezultă:

$$\begin{aligned} S_{ad}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{rd}(v) h_a(u) e^{-j\omega(v-u)} dv du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u) e^{j\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} B_{rd}(v) e^{-j\omega v} dv = H_a(-j\omega) S_{rd}(j\omega) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Conform relațiilor (4.72) și (4.59), se poate scrie:

$$H_a(-j\omega) = \frac{1}{S_{rr}^+(-j\omega)} = \frac{1}{S_{rr}^-(j\omega)} \quad (4.81)$$

Înlocuind (4.81) în relația (4.80), rezultă:

$$S_{ad}(j\omega) = \frac{S_{rd}(j\omega)}{S_{rr}^-(j\omega)} \quad (4.82)$$

și

$${}^+S_{ad}(j\omega) = {}^+ \left[ \frac{S_{rd}(j\omega)}{S_{rr}^-(j\omega)} \right] \quad (4.83)$$

unde  ${}^+[\bullet]$  reprezintă partea realizabilă a expresiei din interiorul parantezei, respectiv partea care conține numai polii din semiplanul stâng.

Cu (4.83), relația (4.65) se poate scrie echivalent, sub forma:

$$H_0(j\omega) = \frac{1}{S_{rr}^+(j\omega)} \left[ \frac{S_{rd}(j\omega)}{S_{rr}^-(j\omega)} \right] \quad (4.84)$$

care reprezintă soluția ecuației Wiener - Hopf în domeniul frecvență.

#### 4.6. Filtrarea optimă în cazul semnalelor cu spectru Butterworth ( $n = 1$ )

Majoritatea densităților spectrale de putere ale mesajelor  $m(t)$  pot fi approximate prin funcții care sunt inversul unui polinom Butterworth, de ordinul  $2n$ , adică:

$$S_{mm}(j\omega) = \frac{K_n}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^{2n}} \quad (4.85)$$

unde  $K_n > 0$  este o constantă ce depinde de  $n$ , iar  $a > 0$ , o constantă.

Pentru fixarea ideilor, se va considera  $n = 1$ , caz în care:

$$S_{mm}(j\omega) = \frac{K}{a^2 + \omega^2} \quad (4.86)$$

unde  $K = K_1 a^2$ .

Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni poate fi considerat alb, cu densitatea spectrală de putere  $S_0$ , datorită caracterului aditiv al acestuia, se poate scrie:

$$S_{rr}(j\omega) = S_{mm}(j\omega) + S_0 \quad (4.87)$$

unde prin  $S_{rr}(j\omega)$  s-a notat densitatea spectrală de putere a semnalului recepționat,  $r(t)$ , de forma:

$$r(t) = m(t) + n(t) \quad (4.88)$$

Înlocuind (4.86) în (4.87), rezultă:

$$S_{rr}(j\omega) = \frac{K}{a^2 + \omega^2} + S_0 \quad (4.89)$$

Atunci când se trece de la variabila complexă  $s$  la  $j\omega$ , se impune condiția:

$$j\omega = s \Rightarrow \omega = -js \quad (4.90)$$

Înlocuind (4.90) în (4.89), se poate scrie:

$$S_{rr}(s) = \frac{K}{a^2 - s^2} + S_0 = S_0 \frac{\left(1 + \frac{K}{a^2 S_0}\right) a^2 - s^2}{a^2 - s^2} \quad (4.91)$$

Se face notația:

$$1 + \frac{K}{a^2 S_0} = b^2, b > 1 \quad (4.92)$$

Cu notația (4.92), relația (4.91) devine:

$$S_{rr}(s) = \sqrt{S_0} \frac{ab + s}{a + s} \sqrt{S_0} \frac{ab - s}{a - s} = S_{rr}^+(s) S_{rr}^-(s) \quad (4.93)$$

Din (4.93) rezultă că partea din  $S_{rr}(s)$  care conține zerourile și polii în semiplanul stâng este:

$$S_{rr}^+(s) = \sqrt{S_0} \frac{ab + s}{a + s}, a > 0, b > 1 \quad (4.94)$$

iar partea care conține zerourile și polii în semiplanul drept este:

$$S_{rr}^-(s) = \sqrt{S_0} \frac{ab-s}{a-s}, a > 0, b > 1 \quad (4.95)$$

Conform relației (4.72), funcția de transfer în variabila  $s$  a filtrului de albire este de forma:

$$H_a(s) = \frac{1}{S_{rr}^+(s)} = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{a+s}{ab+s} \quad (4.96)$$

O posibilă implementare cu elemente pasive de circuit a acestui filtru de albire este dată în figura 4.8.

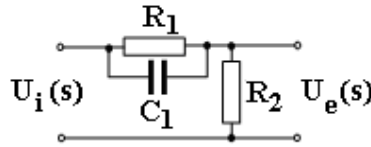


Fig. 4.8. Filtru de albire cu funcția de transfer dată de relația (4.96)

Într-adevăr, conform figurii, se poate scrie:

$$\frac{U_e(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{C_1 R_1} + s}{\frac{1}{C_1 R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + s} \quad (4.97)$$

Prin identificarea relațiilor (4.96) și (4.97) rezultă:

$$a = \frac{1}{C_1 R_1}, b = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (4.98)$$

Dacă  $\frac{1}{\sqrt{S_0}} > 1$ , la ieșirea circuitului din figura 4.8 trebuie

conectat un amplificator cu factorul de amplificare  $\frac{1}{\sqrt{S_0}}$ , iar dacă

$\frac{1}{\sqrt{S_0}} < 1$ , un atenuator. Comparând relațiile (4.65) și (4.84), rezultă

că:

$$S_{ad}(j\omega) = \frac{S_{rd}(j\omega)}{S_{rr}^-(j\omega)} \quad (4.99)$$

Dar:

$$\begin{aligned} S_{rd}(j\omega) &= F\{B_{rd}(\tau)\} = F\{\overline{r(t_1)d(t_1+\tau)}\} = \\ &= F\{\overline{[m(t_1)+n(t_1)]m(t_1+\alpha+\tau)}\} = F\{\overline{m(t_1)m(t_1+\alpha+\tau)}\} \\ &= F\{B_{mm}(\tau+\alpha)\} = e^{j\omega\alpha} S_{mm}(j\omega) \end{aligned} \quad (4.100)$$

deoarece:

$$\overline{n(t_1)m(t_1+\alpha+\tau)} = \overline{n(t_1)} \cdot \overline{m(t_1+\alpha+\tau)} = 0 \quad (4.101)$$

Funcția dorită a fi estimată s-a presupus de forma:

$$d(t) = m(t+\alpha) \quad (4.102)$$

care cuprinde toate cele trei cazuri, adică pentru  $\alpha = 0$  rezultă filtrare, pentru  $\alpha < 0$ , filtrare cu întârziere, iar pentru  $\alpha > 0$ , filtrare cu anticipare.

Ținând cont de (4.86), relația (4.100) devine:

$$S_{rd}(j\omega) = \frac{Ke^{j\omega\alpha}}{a^2 + \omega^2} \quad (4.103)$$

Înlocuind (4.95) și (4.103) în (4.99) și ținând cont de (4.90), se poate scrie:

$$S_{ad}(s) = \frac{S_{rd}(s)}{S_{rr}^-(s)} = \frac{K}{\sqrt{S_0}} \frac{e^{\alpha s}}{(a+s)(ab-s)}, a > 0; b > 1 \quad (4.104)$$

Din relația (4.104) se observă că  $S_{ad}(s)$  conține polul  $s = -a$  în semiplanul stâng și polul  $s = ab$  în semiplanul drept, așa cum este arătat în figura 4.9. Folosind contururile de integrare din figura 4.9 și utilizând teorema reziduurilor, se poate scrie:

$$B_{ad}(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S_{ad}(s) e^{s\tau} ds = \frac{K}{\sqrt{S_0}} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{(\alpha+\tau)s} ds}{(a+s)(ab-s)}$$

$$= \begin{cases} \frac{Ke^{-\alpha a}}{a(b+1)\sqrt{S_0}} e^{-a\tau}, & \text{pentru } \tau \geq -\alpha \\ \frac{Ke^{\alpha ab}}{a(b+1)\sqrt{S_0}} e^{ab\tau}, & \text{pentru } \tau < -\alpha \end{cases} \quad (4.105)$$

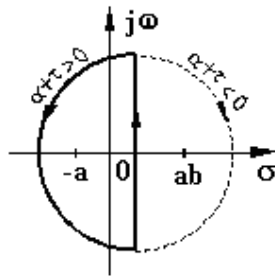


Fig. 4.9. Plasarea polilor funcției  $S_{ad}(s)$

În cazul filtrării cu întârziere ( $\alpha < 0$ ), reprezentarea grafică a funcției  $B_{ad}(\tau)$ , conform relației (4.105), este dată în figura 4.10.

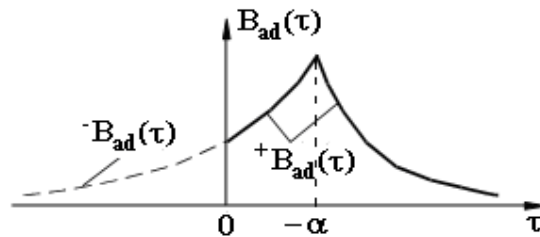


Fig. 4.10. Reprezentarea grafică a funcției de corelație  $B_{ad}(\tau)$  în cazul filtrării cu întârziere

Conform relației (4.105) și a figurii 4.10, rezultă:



$$\begin{aligned}
{}^+S_{ad}(s) &= L\{ {}^+B_{ad}(\tau) \} = \int_0^{\infty} {}^+B_{ad}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \\
&= \frac{K}{a(b+1)\sqrt{S_0}} \left( e^{\alpha ab} \int_0^{-\alpha} e^{ab\tau} e^{-s\tau} d\tau + e^{-\alpha a} \int_{-\alpha}^{\infty} e^{-a\tau} e^{-s\tau} d\tau \right) = \\
&= \frac{K}{a(b+1)\sqrt{S_0}} \left( \frac{e^{\alpha s} - e^{\alpha ab}}{ab-s} + \frac{e^{\alpha s}}{a+s} \right)
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Înlocuind (4.94) și (4.106) în relația (4.65), rezultă funcția de transfer a filtrului optimal, în cazul filtrării cu întârziere, de forma:

$$H_0(s) = \frac{K}{a(b+1)S_0} \left[ \frac{(a+s)(e^{\alpha s} - e^{\alpha ab})}{(ab-s)(ab+s)} + \frac{e^{\alpha s}}{ab+s} \right], \alpha < 0 \tag{4.107}$$

În cazul filtrării, funcția de transfer a filtrului optimal se obține din relația (4.107) pentru  $\alpha = 0$ , adică:

$$H_0(s) = \frac{K}{a(b+1)S_0} \frac{1}{ab+s} \tag{4.108}$$

În cazul filtrării cu anticipare ( $\alpha > 0$ ), reprezentarea grafică a funcției  $B_{ad}(\tau)$ , conform relației (4.105), este dată în figura 4.11.

În acest caz:

$$\begin{aligned}
{}^+S_{ad}(s) &= L\{ {}^+B_{ad}(\tau) \} = \int_0^{\infty} {}^+B_{ad}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \\
&= \frac{Ke^{-\alpha a}}{a(b+1)\sqrt{S_0}} \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-s\tau} d\tau = \frac{Ke^{-\alpha a}}{a(b+1)\sqrt{S_0}} \frac{1}{a+s}
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Înlocuind (4.94) și (4.109) în relația (4.65), rezultă funcția de transfer a filtrului optimal, în cazul filtrării cu anticipare:

$$H_0(s) = \frac{Ke^{-\alpha s}}{a(b+1)S_0} \frac{1}{ab+s}, \alpha > 0 \tag{4.110}$$

Dacă în relația (4.110) se impune condiția  $\alpha = 0$ , rezultă, cum de altfel era de așteptat, aceeași funcție de transfer a filtrului optimal

în cazul filtrării, dată de (4.108).

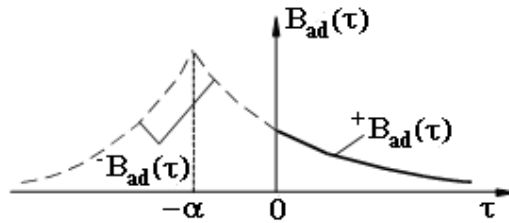


Fig. 4.11. Reprezentarea funcției de corelație  $B_{ad}(\tau)$  în cazul filtrării cu anticipare

#### 4.7. Determinarea erorii pătratice medii în cazul filtrelor optimale Wiener - Hopf

Fie filtrul optimal, caracterizat de funcția pondere  $h_0(t)$ , care verifică ecuația integrală Wiener - Hopf, reprezentat în figura 4.12.

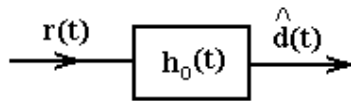


Fig. 4.12. Schema bloc a filtrului optimal

Eroarea pătratică medie cauzată de acest filtru este:

$$\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} = \overline{[d(t_1) - \hat{d}(t_1)]^2} \quad (4.111)$$

unde, se reamintește, prin  $d(t)$  s-a notat funcția dorită a fi estimată, în timp ce  $\hat{d}(t)$  este estimatul furnizat la ieșirea filtrului optimal.

În cazul unui filtru optimal cauzal, estimatul se poate deduce cu integrala de convoluție, adică:

$$\hat{d}(t) = \int_0^{\infty} h_0(u) r(t-u) du \quad (4.112)$$

Substituind (4.112) în relația (4.111), pentru  $t = t_1$ , rezultă:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} &= m_1 \left\{ \left[ d(t_1) - \int_0^\infty h_0(u) r(t_1 - u) du \right]^2 \right\} = \\ &= m_1 \left\{ d^2(t_1) - 2 \int_0^\infty h_0(u) d(t_1) r(t_1 - u) du + \left( \int_0^\infty h_0(u) r(t_1 - u) du \right)^2 \right\}\end{aligned}\quad (4.113)$$

Înlocuind pătratul unei integrale cu produsul a două integrale identice, dar cu variabile de integrare diferite și ținând cont că:

$$m_1 \{d^2(t_1)\} = \overline{d(t_1)d(t_1)} = B_{dd}(0) \quad (4.114)$$

$$m_1 \{d(t_1)r(t_1 - u)\} = B_{dr}(t_1 - u - t_1) = B_{dr}(-u) = B_{rd}(u) \quad (4.115)$$

$$m_1 \{r(t_1 - u)r(t_1 - \tau)\} = B_{rr}[(t_1 - \tau) - (t_1 - u)] = B_{rr}(u - \tau) \quad (4.116)$$

relația (4.113) devine:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} &= B_{dd}(0) - 2 \int_0^\infty h_0(u) B_{rd}(u) du + \\ &+ \int_0^\infty h_0(u) \int_0^\infty h_0(\tau) B_{rr}(u - \tau) d\tau du\end{aligned}\quad (4.117)$$

Dacă în relația (4.117) se ține cont de (4.21), rezultă:

$$\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} = B_{dd}(0) - \int_0^\infty h_0(u) B_{rd}(u) du \quad (4.118)$$

Uneori, în literatura de specialitate, eroarea pătratică medie,  $\overline{\varepsilon_0^2(t_1)}$ , este dată într-o formă echivalentă, care se obține ușor din (4.118), dacă se consideră:

$$B_{rd}(u) = \overline{r(t_1 - u)d(t_1)} \quad (4.119)$$

Înlocuind (4.114) și (4.119) în relația (4.118), se obține:

$$\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} = m_1 \left\{ d^2(t_1) - \int_0^\infty h_0(u) r(t_1 - u) d(t_1) du \right\} \quad (4.120)$$

În fine, dacă în relația (4.120) se ține cont de (4.112), rezultă:

$$\overline{\varepsilon_0^2(t_1)} = \overline{[d(t_1) - \hat{d}(t_1)] d(t_1)} \quad (4.121)$$

În cazul filtrelor optimale necauzale, eroarea pătratică medie, notată cu  $\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)}$ , se obține din (4.118), înlocuind  $h_0(u)$  cu  $h_{0n}(u)$  și prin eliminarea condiției de cauzalitate, adică:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} = B_{dd}(0) - \int_{-\infty}^\infty h_{0n}(u) B_{rd}(u) du \quad (4.122)$$

Conform teoremei Wiener - Khintcin, se poate scrie:

$$B_{dd}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_{dd}(j\omega) d\omega \quad (4.123)$$

și

$$B_{rd}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_{rd}(j\omega) e^{j\omega u} d\omega \quad (4.124)$$

Înlocuind (4.123) și (4.124) în relația (4.122), rezultă:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^\infty S_{dd}(j\omega) d\omega - \int_{-\infty}^\infty S_{rd}(j\omega) \int_{-\infty}^\infty h_{0n}(u) e^{j\omega u} du d\omega \right] \quad (4.125)$$

Dar

$$\int_{-\infty}^\infty h_{0n}(u) e^{j\omega u} du = H_{0n}(-j\omega) \quad (4.126)$$

unde, conform relației (4.33),  $H_{0n}(j\omega)$  este funcția de transfer a filtrului optimal necauzal. Cu (4.126), relația (4.125) devine:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [S_{dd}(j\omega) - S_{rd}(j\omega) H_{0n}(-j\omega)] d\omega \quad (4.127)$$

În cazul general, când funcția dorită a fi estimată este  $d(t) = m(t + \alpha)$  se poate scrie:

$$S_{dd}(j\omega) = F \left\{ \overline{m(t_1 + \alpha)m(t_1 + \alpha + \tau)} \right\} = S_{mm}(j\omega) \quad (4.128)$$

în timp ce:

$$S_{rd}(j\omega) = F \left\{ \overline{r(t_1)m(t_1 + \alpha + \tau)} \right\} = e^{j\omega\alpha} S_{mm}(j\omega) \quad (4.129)$$

În relația (4.129) s-a ținut cont de independența zgomotului de mesajul transmis, adică este adevărată relația (4.37).

Înlocuind relațiile (4.128) și (4.129) în (4.127) ținând cont de (4.42), rezultă:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{mm}(j\omega)S_{nn}(j\omega)}{S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)} d\omega \quad (4.130)$$

Dacă spectrul mesajului  $m(t)$  și al zgomotului  $n(t)$  nu se suprapun (vezi fig. 4.3), atunci:

$$S_{mm}(j\omega)S_{nn}(j\omega) = 0 \quad (4.131)$$

și deci:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} = 0 \quad (4.132)$$

Dacă spectrele celor două semnale se suprapun parțial (vezi fig. 4.4), atunci se poate scrie:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_{mm}(j\omega)S_{nn}(j\omega)}{S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)} d\omega, \quad (4.133)$$

unde factorul 2 din membrul al doilea al relației (4.133) semnifică faptul că s-au luat în considerare și spectrele pentru  $\omega$  negativ (adică simetricile față de axa ordonatelor din fig. 4.4.).

În cazul când semnalul este înecat în zgomot (fig. 4.5), neglijând  $S_{mm}(j\omega)$  în raport cu  $S_{nn}(j\omega)$ , rezultă:

$$\overline{\varepsilon_{0n}^2(t_1)} \cong \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(j\omega) d\omega = P \quad (4.134)$$

unde  $P$  este puterea mesajului purtător de informație,  $m(t)$ .

#### 4.8. Ecuația Wiener - Hopf în domeniul discret

Fie  $r[n]$ ,  $m[n]$  și  $w[n]$  secvența recepționată, secvența purtătoare de informație, respectiv secvența de zgomot de pe canal. Considerând secvențele  $m[n]$  și  $w[n]$  staționare în sens larg, cu valoarea medie nulă, receptorul care poate minimiza eroarea pătratică medie dintre secvența dorită a fi estimată,  $d[n]$ , și secvența estimată de receptor  $\hat{d}[n]$  poate fi determinat în clasa filtrelor discrete liniare, invariante în timp, numite în continuare filtre discrete optimale.

Notând cu  $h_0[k]$  funcția pondere a unui astfel de filtru, răspunsul acestuia se poate deduce cu suma de convoluție

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0[k] r[n-k] \quad (4.135)$$

Pentru ca filtrul discret optimal să fie cauzal este necesar ca

$$h_0[n] = 0, \text{ pentru } n = -1, -2, \dots \quad (4.136)$$

Cu restricția dată de (4.136), relația (4.135) devine:

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0[k] r[n-k] \quad (4.137)$$

Eroarea pătratică medie minimă cauzată de filtrul discret optimal se poate determina cu relația:

$$\overline{\varepsilon_0^2[n]} = m_1 \left\{ \left( d[n] - \hat{d}[n] \right)^2 \right\} = m_1 \left\{ \left( d[n] - \sum_{k=0}^{\infty} h_0[k] r[n-k] \right)^2 \right\} \quad (4.138)$$

În scopul determinării funcției pondere,  $h_0[n]$ , a filtrului discret optimal, se consideră un filtru discret liniar, invariant în timp,

caracterizat de funcția pondere

$$h[n] = h_0[n] + \lambda l[n] \quad (4.139)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real.

Pentru asigurarea cauzalității filtrului va trebui ca, pe lângă condiția dată de relația (4.136), să se impună suplimentar condiția:

$$l[n] = 0, \text{ pentru } n = -1, -2, \dots \quad (4.140)$$

Termenul  $\lambda l[n]$  din relația (4.139) reprezintă abaterea funcției pondere  $h[n]$  de la funcția  $h_0[n]$  a filtrului optimal care asigură eroarea pătratică medie minimă.

Notând cu  $\overline{\varepsilon^2[n]}$  eroarea pătratică medie cauzată de filtrul caracterizat de funcția pondere  $h[n]$ , aceasta poate fi calculată cu relația:

$$\overline{\varepsilon^2[n]} = m_1 \left\{ \left( d[n] - \sum_{k=0}^{\infty} h[k] r[n-k] \right)^2 \right\} \quad (4.141)$$

sau, ținând cont de (4.139) rezultă, echivalent, relația:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_0^2[n]} &= m_1 \left\{ \left( d[n] - \sum_{k=0}^{\infty} h_0[k] r[n-k] - \lambda \sum_{p=0}^{\infty} l[p] r[n-p] \right)^2 \right\} = \\ &= a \lambda^2 + b \lambda + c, \end{aligned} \quad (4.142)$$

unde  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt mărimi care nu depind de parametrul  $\lambda$ .

Din relația (4.139) rezultă că pentru  $\lambda = 0$  se obține funcția pondere a filtrului optimal, indiferent de secvența  $l[n]$ . Condiția necesară de extrem a erorii pătratice medii, ca funcție de  $\lambda$ , se obține egalând cu zero derivata acesteia în raport cu  $\lambda$ . Estimatul respectiv este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2 \overline{\varepsilon^2[n]}}{\partial \lambda^2} = 2a = 2m_1 \left\{ \left( \sum_{p=0}^{\infty} l[p] r[n-p] \right)^2 \right\} > 0 \quad (4.143)$$

Reunind cele două condiții, rezultă că eroarea pătratică medie devine minimă atunci când este îndeplinită condiția:

$$\left. \frac{\partial \overline{\varepsilon^2[n]}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \quad (4.144)$$

Ținând cont de (4.142), relația (4.144) devine:

$$b=0 \quad (4.145)$$

Identificând coeficientul lui  $\lambda$  din relația (4.142) și egalându-l cu zero, rezultă:

$$\sum_{p=0}^{\infty} l[p] \left( \overline{d[n]r[n-p]} - \sum_{k=0}^{\infty} h_0[k] \overline{r[n-k]r[n-p]} \right) = 0 \quad (4.146)$$

Ținând cont de (4.140), rezultă că relația (4.146) este adevărată atunci când:

$$\overline{d[n]r[n-p]} - \sum_{k=0}^{\infty} h_0[k] \overline{r[n-k]r[n-p]} = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.147)$$

Dar

$$\overline{d[n]r[n-p]} = B_{dr}[n-p-n] = B_{dr}[-p] = B_{rd}[p] \quad (4.148)$$

reprezintă funcția de corelație între semnalul recepționat,  $r[n]$ , și semnalul dorit a fi estimat,  $d[n]$  și

$$\overline{r[n-k]r[n-p]} = B_{rr}[(n-p)-(n-k)] = B_{rr}[k-p] = B_{rr}[p-k] \quad (4.149)$$

reprezintă funcția de autocorelație a secvenței recepționate.

Cu (4.148) și (4.149), relația (4.147) devine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_0[k] B_{rr}[p-k] = B_{rd}[p], \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.150)$$

Ecuția (4.150) este cunoscută sub denumirea de ecuația Wiener - Hopf în domeniul discret. Din această ecuație se determină funcția pondere  $h_0[k]$  a filtrului discret optimal care asigură eroarea pătratică medie minimă, chiar în cazul cel mai defavorabil, când



mesajul  $m[n]$ , purtător de informație, este „înecat” în zgomotul  $w[n]$ . Ecuția (4.150) poate fi scrisă într-o formă echivalentă, dacă se ține cont că:

$$B_{rr}[p-k] = m_1 \{r[n-p]r[n-k]\} \quad (4.151)$$

$$B_{rd}[p] = m_1 \{r[n-p]d[n]\} \quad (4.152)$$

Cu (4.151) și (4.152), relația (4.150) devine:

$$m_1 \left\{ r[n-p] \left( d[n] - \sum_{k=0}^{\infty} h_0[k] r[n-k] \right) \right\} = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.153)$$

Ținând cont de (4.137), relația (4.153) se poate scrie, echivalent, sub forma:

$$m_1 \{r[n-p]\varepsilon_0[n]\} = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.154)$$

Relația (4.154) este cunoscută sub denumirea de principiul ortogonalității, adică  $\varepsilon_0[n]$  este ortogonal pe fiecare din secvențele recepționate.

#### **4.9. Soluția ecuației Wiener - Hopf în domeniul discret în cazul filtrelor cu răspuns finit la impuls (FIR)**

Se presupune un filtru cu răspuns finit la impuls (FIR) de lungime  $M$ , cu coeficienții  $h_0[k]$ ,  $0 \leq k \leq M-1$ . Cu această restricție, estimatul  $\hat{d}[n]$  se obține din (4.137):

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] r[n-k] \quad (4.155)$$

Ecuția Wiener - Hopf corespunzătoare acestui caz se deduce din (4.150), dacă sumarea se efectuează până la  $M-1$ , adică:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] B_{rr}[p-k] = B_{rd}[p], \quad p = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.156)$$

Impunând  $p = 0, 1, 2, \dots, M-1$  în relația (4.156) rezultă:

$$h_0[0] B_{rr}[0] + h_0[1] B_{rr}[-1] + \dots + h_0[M-1] B_{rr}[-M+1] = B_{rd}[0] \quad (4.157)$$

$$h_0[0] B_{rr}[1] + h_0[1] B_{rr}[0] + \dots + h_0[M-1] B_{rr}[-M+2] = B_{rd}[1] \quad (4.158)$$

$$h_0[0] B_{rr}[2] + h_0[1] B_{rr}[1] + \dots + h_0[M-1] B_{rr}[-M+3] = B_{rd}[2] \quad (4.159)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$h_0[0] B_{rr}[M-1] + h_0[1] B_{rr}[M-2] + \dots + h_0[M-1] B_{rr}[0] = B_{rd}[M-1] \quad (4.160)$$

Se fac notațiile:

$$\begin{bmatrix} B_{rr}[0] & B_{rr}[-1] & \dots & \dots & B_{rr}[-M+1] \\ B_{rr}[1] & B_{rr}[0] & \dots & \dots & B_{rr}[-M+2] \\ B_{rr}[2] & B_{rr}[1] & \dots & \dots & B_{rr}[-M+3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{rr}[M-1] & B_{rr}[M-2] & \dots & \dots & B_{rr}[0] \end{bmatrix} \stackrel{not}{=} [B_{rr}] \quad (4.161)$$

$$[h_0[0] h_0[1] \dots h_0[M-1]]^T \stackrel{not}{=} [H_{OM}] \quad (4.162)$$

și

$$[B_{rd}[0] B_{rd}[1] \dots B_{rd}[M-1]]^T \stackrel{not}{=} [B_{rd}] \quad (4.163)$$

Matricea  $[B_{rr}]$  este matricea de autocorelație a secvenței recepționate,  $[H_{OM}]$ , matricea coeficienților  $h_0[k]$  ai filtrului FIR optimal, iar  $[B_{rd}]$  este matricea de corelație între secvența recepționată și secvența dorită a fi estimată. Cu notațiile (4.161), (4.162) și (4.163), sistemul de ecuații (4.157) ÷ (4.160) se poate scrie compact sub formă matriceală:

$$[B_{rr}][H_{OM}] = [B_{rd}] \quad (4.164)$$

Din (4.164) rezultă:

$$[H_{OM}] = [B_{rr}]^{-1} [B_{rd}] \quad (4.165)$$

#### 4.10. Determinarea erorii pătratice medii minime în cazul filtrelor FIR

Eroarea pătratică medie minimă cauzată de filtrul FIR optimal se calculează cu relația:

$$\overline{\varepsilon_0^2[n]} = m_1 \left\{ \left( d[n] - \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] r[n-k] \right)^2 \right\} \quad (4.166)$$

Înlocuind pătratul unei sume cu produsul a două sume identice, dar cu indici de sumare distincți, relația (4.166) devine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2[n] = m_1 \left\{ d^2[n] - 2d[n] \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] r[n-k] + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] r[n-k] \sum_{p=0}^{M-1} h_0[p] r[n-p] \right\} \end{aligned} \quad (4.167)$$

Dar

$$m_1 \{ d^2[n] \} = m_1 \{ d[n] d[n] \} = B_{dd}[0] = \sigma_d^2 \quad (4.168)$$

$$m_1 \left\{ d[n] \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] r[n-k] \right\} = \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] B_{rd}[k] \quad (4.169)$$

$$\begin{aligned} m_1 \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] r[n-k] \sum_{p=0}^{M-1} h_0[p] r[n-p] \right\} = \\ = \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] \sum_{p=0}^{M-1} h_0[p] B_{rr}[k-p] = \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] B_{rd}[k] \end{aligned} \quad (4.170)$$

Cu (4.168), (4.169) și (4.170), relația (4.167) devine:

$$\overline{\varepsilon_0^2[n]} = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] B_{rd}[k] \quad (4.171)$$

#### 4.11. Filtre optimale FIR în cazul netezirii, întârzierii și filtrării cu anticipare

Se consideră în continuare că funcția dorită a fi estimată este de forma:

$$d[n] = m[n + \alpha] \quad (4.172)$$

Dacă  $\alpha = 0$ , filtrul optimal realizează operația de filtrare (sau netezire), pentru  $\alpha > 0$  se realizează operația de filtrare cu anticipare (sau predicție) și pentru  $\alpha < 0$ , operația de filtrare cu întârziere. Deoarece

$$r[n] = m[n] + w[n] \quad (4.173)$$

rezultă

$$B_{rr}[p] = \overline{r[n]r[n+p]} = B_{mm}[p] + B_{ww}[p] \quad (4.174)$$

deoarece zgomotul s-a presupus cu valoare medie nulă și necorelat cu secvența de date  $m[n]$ .

Analog:

$$B_{rd}[p] = \overline{r[n]m[n+p+\alpha]} = B_{mm}[p+\alpha] \quad (4.175)$$

Cu (4.174) și (4.175), relația (4.156) devine:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_0[k] (B_{mm}[p-k] + B_{ww}[p-k]) = B_{mm}[p+\alpha], \quad p = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.176)$$

Pentru fixarea ideilor se presupune că secvența purtătoare de informație,  $m[n]$ , are funcția de autocorelație

$$B_{mm}[n] = (0,6)^{|n|}$$

iar  $w[n]$  este o secvență de zgomot alb, cu  $\sigma^2 = 1$ . Se pune problema determinării filtrului FIR optimal Wiener - Hopf de lungime  $M = 2$  în cazul filtrării și determinării erorii pătratice medii a filtrului obținut.

Particularizând relația (4.176) pentru  $M = 2$  și  $\alpha = 0$ , rezultă:

$$\sum_{k=0}^1 h_0[k] (B_{mm}[p-k] + B_{ww}[p-k]) = B_{mm}[p], p = 0, 1$$

Pentru  $p = 0$  și  $p = 1$  se poate scrie:

$$h_0[0](B_{mm}[0] + B_{ww}[0]) + h_0[1](B_{mm}[-1] + B_{ww}[-1]) = B_{mm}[0]$$

$$h_0[0](B_{mm}[1] + B_{ww}[1]) + h_0[1](B_{mm}[0] + B_{ww}[0]) = B_{mm}[1]$$

Dar  $B_{mm}[0] = (0,6)^0 = 1$ ;  $B_{mm}[\pm 1] = 0,6$ ;  $B_{ww}[n] = \delta[n] \Rightarrow B_{ww}[0] = 1$ ;  $B_{ww}[\pm 1] = 0$ .

Cu aceste observații, ultimele două relații devin:

$$\begin{cases} 2h_0[0] + 0,6h_0[1] = 1 \\ 0,6h_0[0] + 2h_0[1] = 0,6 \end{cases}$$

Din acest sistem de ecuații rezultă  $h_0[0] \approx 0,451$  și  $h_0[1] \approx 0,165$ .

Particularizând relația (4.171) pentru  $M = 2$ , rezultă:

$$\overline{\varepsilon_0^2[n]} = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^1 h_0[k] B_{rd}[k]$$

Dar

$$\sigma_d^2 = \sigma_m^2 = B_{mm}[0] = 1$$

$$B_{rd}[k] = B_{rm}[k] = m_1 \{ (m[n] + w[n]) m[n+k] \} = B_{mm}[k]$$

Deci

$$\overline{\varepsilon_0^2[n]} = 1 - h_0[0] B_{mm}[0] - h_0[1] B_{mm}[1] = 1 - 0,451 - 0,165 \cdot 0,6 = 0,45$$

Această eroare ar putea fi micșorată prin creșterea lungimii filtrului.

#### 4.12. Determinarea funcției pondere a filtrelor discrete optimale cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

În cazul filtrelor discrete optimale IIR (evident, cauzale),

ecuația Wiener - Hopf este dată de relația (4.150). În cazul recepționării unei secvențe de zgomot alb, notată cu  $a[n]$ , fie  $B_{aa}[p-k]$  funcția de autocorelație a acesteia,  $B_{ad}[p]$  funcția de corelație dintre secvența de zgomot alb  $a[n]$  și secvența dorită a fi estimată  $d[n]$  și  $h_{0a}[k]$  funcția pondere a unui filtru optimal IIR ce satisface ecuația Wiener - Hopf la recepționarea secvenței  $a[n]$ . În cazul secvenței recepționate de tip zgomot alb, ecuația (4.150) devine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{0a}[k] B_{aa}[p-k] = B_{ad}[p], \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.177)$$

Dar

$$B_{aa}[p-k] = S_0 \delta[p-k] \quad (4.178)$$

Ținând cont de (4.178), ecuația (4.177) devine:

$$S_0 h_{0a}[p] = B_{ad}[p], \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.179)$$

Fără a pierde din generalitate, în continuare se presupune  $S_0 = 1$ . Fie  ${}^+B_{ad}[p]$  partea lui  $B_{ad}[p]$  pentru  $p = 0, 1, 2, \dots$  și  ${}^-B_{ad}[p]$ , pentru  $p = -1, -2, \dots$ . Rezultă atunci:

$$h_{0a}[p] = \begin{cases} {}^+B_{ad}[p], & \text{pentru } p = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{pentru } p = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (4.180)$$

Aplicând transformata Z relației (4.180), rezultă:

$$\begin{aligned} Z\{h_{0a}[p]\} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{0a}[p] z^{-p} \stackrel{\text{not}}{=} H_{0a}(z) = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} {}^+B_{ad}[p] z^{-p} \stackrel{\text{not}}{=} {}^+S_{ad}(z) \end{aligned} \quad (4.181)$$

### 4.13. Determinarea funcțiilor pondere și de sistem ale filtrului discret optimal IIR

Determinarea funcției pondere a filtrului discret optimal IIR la recepționarea secvenței de zgomot alb sugerează posibilitatea determinării funcției de sistem, respectiv a funcției pondere a filtrului optimal IIR în cazul recepționării unei secvențe oarecare  $r[n]$ , dacă aceasta se „albește” cu ajutorul unui filtru.

Prin definiție, un filtru caracterizat de funcția pondere  $h_a[n]$ , respectiv funcția de sistem  $H_a(z)$ , la intrarea căruia se aplică secvența  $r[n]$ , iar la ieșire rezultă secvența de zgomot alb  $a[n]$ , se numește filtru de albire.

Pentru ca estimatul să nu sufere modificări, se cascadează cu filtrul de albire un filtru care realizează operația inversă, caracterizat de funcția pondere  $h_a^{-1}[n]$ , respectiv funcția de sistem  $H_a^{-1}(z)$ . Schema bloc a sistemului discret care determină estimatul  $\hat{d}[n]$  este dată în figura 4.13.

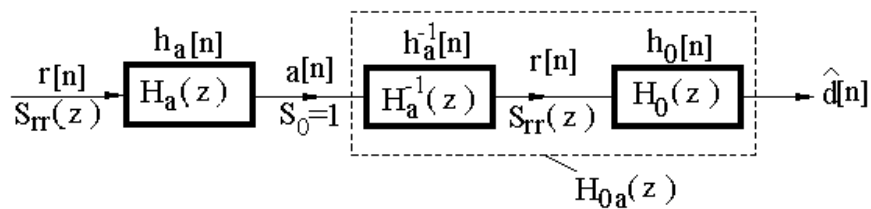


Fig. 4.13

În figura 4.13 prin  $h_0[n]$  și  $H_0(z)$  s-au notat funcția pondere, respectiv funcția de sistem (deocamdată necunoscute) ale filtrului optimal IIR care satisface ecuația Wiener - Hopf.

Conform figurii, se poate scrie:

$$H_0(z) = \frac{H_{0a}(z)}{H_a^{-1}(z)} = \frac{{}^+S_{ad}(z)}{H_a^{-1}(z)} \quad (4.182)$$

unde  $H_{0a}(z)$  este funcția de sistem a unui filtru optimal IIR la recepționarea secvenței de zgomot alb, care, conform paragrafului precedent, este egală cu  ${}^+S_{ad}(z)$  (Fără micșorarea generalității rezultatelor, se presupune că densitatea spectrală de putere a secvenței de zgomot alb este  $S_0 = 1$ ). Pentru ca operația de albire și inversa acesteia să fie reversibile, este necesar să fie îndeplinită relația:

$$S_{rr}(z) = S_{rr}(z) H_a(z) H_a^{-1}(z) \quad (4.183)$$

Din (4.183) rezultă:

$$H_a(z) H_a^{-1}(z) = 1$$

Relația (4.184) stabilește legătura dintre funcția de sistem a filtrului de albire și a celui invers față de operația de albire. În scopul determinării acestor funcții de sistem, se determină mai întâi densitatea spectrală de putere în variabila  $z$  la ieșirea filtrului invers față de operația de albire, știind că la intrarea acestuia se aplică secvența de zgomot alb cu densitatea spectrală de putere  $S_0 = 1$ .

Conform sumei de convoluție, se poate scrie:

$$r[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] a[n-k] \quad (4.185)$$

Funcția de autocorelație a secvenței  $r[n]$  se determină cu relația:

$$B_{rr}[m] = m_1 \{r[n] r[n+m]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] h_a^{-1}[p] m_1 \{a[n-k] a[n+m-p]\} \quad (4.186)$$

Dar

$$m_1 \{a[n-k] a[n+m-p]\} = B_{aa}[m+k-p] \quad (4.187)$$

Ținând cont de (4.187), relația (4.186) devine

$$B_{rr}[m] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] h_a^{-1}[p] B_{aa}[m+k-p] \quad (4.188)$$



Aplicând transformata Z ambilor membri ai relației (4.188), rezultă:

$$S_{rr}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] h_a^{-1}[p] B_{aa}[m+k-p] z^{-m} \quad (4.189)$$

Cu schimbarea de variabilă

$$m+k-p = n \Rightarrow m = n+p-k \quad (4.190)$$

relația (4.189) devine:

$$\begin{aligned} S_{rr}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] h_a^{-1}[p] B_{aa}[n] z^{-n-p+k} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} h_a^{-1}[p] z^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] z^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{aa}[n] z^{-n} \end{aligned} \quad (4.191)$$

Dar

$$\sum_{p=0}^{\infty} h_a^{-1}[p] z^{-p} = H_a^{-1}(z) \quad (4.192)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_a^{-1}[k] z^k = H_a^{-1}(z^{-1}) \quad (4.193)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{aa}[n] z^{-n} = S_{aa}(z) = S_0 = 1 \quad (4.194)$$

Cu (4.192)  $\div$  (4.194), relația (4.191) se poate scrie echivalent sub forma:

$$S_{rr}(z) = H_a^{-1}(z) H_a^{-1}(z^{-1}) \quad (4.195)$$

Densitatea spectrală de putere în variabila  $z$  a secvenței recepționate conține de obicei zerouri și poli, atât în interiorul cercului unitate, cât și în afara acestuia.

Fie  $S_{rr}^+(z)$  partea lui  $S_{rr}(z)$  care conține zerourile și polii în cercul unitate și  $S_{rr}^-(z)$  partea care conține zerourile și polii în afara cercului unitate, adică:

$$S_{rr}(z) = S_{rr}^-(z) S_{rr}^+(z) \quad (4.196)$$

În majoritatea situațiilor practice este îndeplinită condiția:

$$S_{rr}^-(z) = S_{rr}^+(z^{-1}) \quad (4.197)$$

Evident, dacă  $S_{rr}^+(z)$  are zerourile și polii în cercul unitate, atunci  $S_{rr}^+(z^{-1})$  va avea polii și zerourile în afara cercului unitate. Înlocuind (4.197) în (4.196), rezultă:

$$S_{rr}(z) = S_{rr}^+(z)S_{rr}^+(z^{-1}) \quad (4.198)$$

Din (4.195) și (4.198) rezultă:

$$H_a^{-1}(z)H_a^{-1}(z^{-1}) = S_{rr}^+(z)S_{rr}^+(z^{-1}) \quad (4.199)$$

Pentru ca filtrul invers față de operația de albire să fie cauzal și stabil este necesar ca:

$$H_a^{-1}(z) = S_{rr}^+(z) \quad (4.200)$$

Conform relației (4.184), filtrul de albire va avea funcția de sistem

$$H_a(z) = \frac{1}{S_{rr}^+(z)} \quad (4.201)$$

Înlocuind (4.201) în (4.182), rezultă:

$$H_0(z) = \frac{{}^+S_{ad}(z)}{S_{rr}^+(z)} \quad (4.202)$$

Dar

$$S_{ad}(z) = Z\{B_{ad}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{ad}[n]z^{-n} \quad (4.203)$$

$$B_{ad}[n] = m_1 \{a[m]d[m+n]\} \quad (4.204)$$

$$a[m] = \sum_{k=0}^{\infty} h_a[k]r[m-k] \quad (4.205)$$

(filtrul de albire s-a presupus cauzal, adică  $h_a[k] = 0$  pentru  $k = -1, -2, \dots$ ).

Cu (4.205), relația (4.204) devine:

$$B_{ad}[n] = m_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h_a[k] r[m-k] d[m+n] \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_a[k] B_{rd}[n+k] \quad (4.206)$$

Înlocuind (4.206) în (4.203), rezultă:

$$S_{ad}[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_a[k] B_{rd}[n+k] z^{-n} \quad (4.207)$$

Efectuând schimbarea de variabilă

$$n+k = p \quad (4.208)$$

relația (4.207) devine:

$$\begin{aligned} S_{ad}[z] &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_a[k] B_{rd}[p] z^{-(p-k)} = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_{rd}[p] z^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} h_a[k] z^k = S_{rd}(z) H_a(z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.209)$$

Conform relațiilor (4.197) și (4.201), rezultă:

$$H_a(z^{-1}) = \frac{1}{S_{rr}^+(z^{-1})} = \frac{1}{S_{rr}^-(z)} \quad (4.210)$$

Cu (4.210), relația (4.209) devine:

$$S_{ad}(z) = \frac{S_{rd}(z)}{S_{rr}^-(z)} \quad (4.211)$$

Iar

$${}^+S_{ad}(z) = \left[ \frac{S_{rd}(z)}{S_{rr}^-(z)} \right] \quad (4.212)$$

unde  ${}^+[\cdot]$  înseamnă a se lua din paranteză numai partea care conține poli în cercul unitate.

Cu (4.212), relația (4.202) devine:

$$H_0(z) = \frac{1}{S_{rr}^+} \left[ \frac{S_{rd}(z)}{S_{rr}^-(z)} \right] \quad (4.213)$$

care reprezintă soluția ecuației Wiener - Hopf în domeniul frecvență.

Pentru fixarea ideilor, se consideră secvența recepționată de forma:

$$r[n] = m[n] + w[n]$$

Dacă secvența purtătoare de informație,  $m[n]$ , are densitatea spectrală de putere, în variabila  $z$ , de forma:

$$S_{mm}(z) = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)},$$

iar  $w[n]$  este o secvență de zgomot alb cu dispersia  $\sigma_w^2 = 1$ , să se determine funcția de sistem, respectiv funcția pondere a filtrului optimal IIR Wiener - Hopf, în cazul filtrării.

Densitatea spectrală de putere, în variabila  $z$ , a semnalului recepționat este

$$\begin{aligned} S_{rr}(z) &= S_{mm}(z) + 1 = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} + 1 = \\ &= \frac{2-0,6z^{-1}-0,6z}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} = \frac{1,8\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \end{aligned}$$

Rezultă atunci că

$$S_{rr}^+(z) = \frac{1,8\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{1-0,6z^{-1}} \text{ și } S_{rr}^-(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z}{1-0,6z}$$

În cazul filtrării,  $d[n] = m[n]$  și atunci:

$$\begin{aligned} S_{rd}(z) &= S_{rm}(z) = Z\{B_{rm}[p]\} = Z\{r[n]m[n+p]\} = \\ &= Z\{\overline{[m[n]+w[n]]m[n+p]}\} = S_{mm}(z) \end{aligned}$$

Înseamnă atunci că

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{S_{rd}(z)}{S_{rr}^-(z)} \right]^+ &= \left[ \frac{S_{mm}(z)}{S_{rr}^-(z)} \right]^+ = \left[ \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \frac{(1-0,6z)}{1-\frac{1}{3}z} \right]^+ \\
&= \left[ \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z\right)} \right]^+
\end{aligned}$$

Dar

$$\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z\right)} = \frac{A}{1-0,6z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z}$$

rezultă atunci:

$$A = \left. \frac{0,64}{1-\frac{1}{3}z} \right|_{z=0,6} = 0,8.$$

Constanta B nu mai este necesar a fi calculată, deoarece apare polul  $z = 3$  în afara cercului unitate.

Deci

$$H_0(z) = \frac{1}{S_{rr}^+(z)} \left[ \frac{S_{rd}(z)}{S_{rr}^-(z)} \right]^+ = \frac{(1-0,6z^{-1})}{1,8\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \frac{0,8}{(1-0,6z^{-1})} = \frac{4}{9} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Funcția pondere corespunzătoare este:

$$h_0[n] = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

#### 4.14. Principiul filtrării optimale Kalman – Bucy pentru semnale continue

Schema bloc a unui sistem de transmisiuni care utilizează filtrarea optimală Kalman – Bucy este dată în figura 4.14.

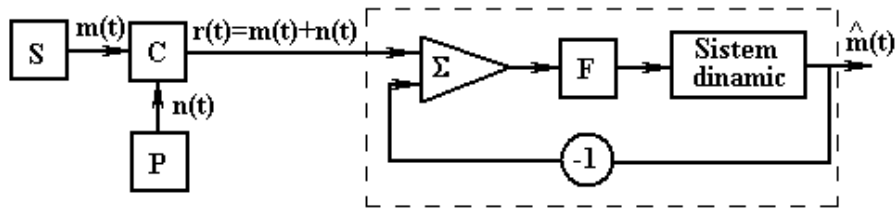


Fig. 4.14. Sistem de transmisiuni cu estimator Kalman – Bucy

Sursa de informație  $S$ , furnizează mesajul  $m(t)$ , purtător de informație. Pe canalul de transmisiuni  $C$  apar perturbațiile  $P$  sub forma zgomotului aditiv,  $n(t)$ . Dacă estimatul  $\hat{m}(t)$  ar fi egal cu mesajul  $m(t)$ , atunci la ieșirea sumatorului  $\Sigma$  ar rezulta zgomotul  $n(t)$ . Filtrul  $F$  este astfel proiectat încât la excitarea acestuia cu zgomotul  $n(t)$  să furnizeze la ieșire un semnal caracterizat de o densitate spectrală de putere constantă, adică să poată fi aproximat cu zgomotul alb.

Sistemul dinamic este astfel dimensionat încât la ieșirea acestuia să rezulte un estimat  $\hat{m}(t)$  când la intrare se aplică zgomot alb, adică să asigure o densitate spectrală de putere  $S_{mm}(j\omega)$ , proprie mesajului purtător de informație,  $m(t)$ .

#### 4.15. Sisteme dinamice generatoare de semnale aleatoare

Sistemele dinamice care vor fi luate în considerare vor fi sisteme liniare invariante (S.L.I), descrise de o ecuație diferențială liniară cu

coeficienți constanți, de forma:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + b_{n-2}u^{(n-2)}(t) + \dots + b_0u(t) \quad (4.214)$$

unde:

$y(t)$  - este răspunsul sistemului;

$u(t)$  - semnalul de la intrarea sistemului;

$a_i, b_i$  - coeficienți constanți

Pentru determinarea răspunsului sistemului descris de ecuația (4.251) la momentul  $t \geq T_0$ , este necesar să se cunoască  $n$  condiții inițiale.

Cunoscându-se coeficienții  $a_i$  și  $b_i$ , se pune problema să se determine numărul minim de parametri care specifică comportarea sistemului în timp. Acești parametri se numesc variabile de stare.

Este cunoscut faptul că, dacă se cunoaște starea sistemului (adică valorile variabilelor de stare) la momentul  $t_i$  și semnalul de la intrare se aplică de la  $t_i$  la  $t_j$  ( $t_j > t_i$ ), atunci la momentul  $t_j$  se poate determina atât răspunsul sistemului, cât și noua stare a acestuia.

Ecuația diferențială (4.214) se poate scrie echivalent, sub forma:

$$y^{(n)}(t) = [b_{n-1}u^{(n-1)}(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}] + [b_{n-2}u^{(n-2)}(t) - a_{n-2}y^{(n-2)}] + \dots + [b_0u(t) - a_0y(t)] \quad (4.215)$$

Integrând de  $n$  ori relația (4.215), se obține:

$$y(t) = \int_{T_0}^t [b_{n-1}u(t) - a_{n-1}y(t)] dt + \int_{T_0}^t dt \int_{T_0}^t [b_{n-2}u(t) - a_{n-2}y(t)] + \dots + \underbrace{\int_{T_0}^t dt \dots \int_{T_0}^t}_{n} [b_0u(t) - a_0y(t)] \quad (4.216)$$

Schema bloc a unui sistem dinamic descris de relația (4.216), realizat cu multiplicatoare cu o constantă, sumatoare și integroare,

este dată în figura 4.15.

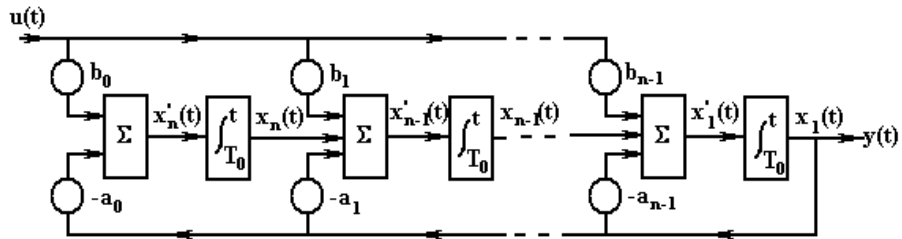


Fig. 4.15. Structura sistemului dinamic descris de ecuația (4.216)

Variabilele de stare, notate  $x_i(t)$ , sunt semnalele de la ieșirile circuitelor de integrare, adică:

$$x_i(t) = \int_{T_0}^t f'_i(t) dt = f_i(t) - f_i(T_0), i = \overline{1, n} \quad (4.217)$$

unde:

$$f'(t) = x'_i(t) \quad (4.218)$$

Variabilele de stare  $x_i(t)$  astfel introduse includ și condițiile inițiale  $f_i(T_0)$ . Cunoașterea celor  $n$  variabile de stare determină starea sistemului, descrisă de matricea:

$$[x(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

Matricea  $[x(t)]$  se numește *matrice de stare* sau *vector de stare*.

Conform figurii 4.15, se pot scrie relațiile:



$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) - a_{n-1}x_1(t) + b_{n-1}u(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) - a_{n-2}x_1(t) + b_{n-2}u(t) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) - a_1x_1(t) + b_1u(t) \\ x_n'(t) &= -a_0x_1(t) + b_0u(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.220)$$

$$x_1(t) = y(t) \quad (4.258)$$

Conform sistemului (4.220), derivata vectorului de stare se poate scrie sub forma:

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \cdot \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) - a_{n-1}x_1(t) \\ x_3(t) - a_{n-2}x_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t) - a_1x_1(t) \\ -a_0x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.222)$$

Dacă se fac notațiile:

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \stackrel{not}{=} [F] \quad (4.223)$$

$$\begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix} \stackrel{not}{=} [G], \quad (4.224)$$

relația (4.222) se poate scrie compact, sub forma:

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = [F][x(t)] + [G]u(t) \quad (4.225)$$

Relația (4.225) se numește *ecuația de stare* a sistemului, specificând constrângerile introduse de semnalele de la intrarea sistemului. În general, pentru a caracteriza legătura dintre dinamica internă a sistemului, specificată de vectorul de stare  $[x(t)]$  și ieșirea sistemului  $y(t)$ , se introduce matricea de selecție  $[C]$ , definită prin relația:

$$[C] = [c_1 c_2 \dots c_n], \quad (4.226)$$

unde componentele  $c_i$  au valorile 1 sau 0 după cum se selectează sau nu variabila de stare  $x_i(t)$ .

Relația de forma:

$$y(t) = [C][x(t)] \quad (4.227)$$

poartă denumirea de *ecuație de ieșire*.

Ecuația de stare (4.225) și ecuația de ieșire (4.227) caracterizează complet sistemul liniar invariant.

Dacă se selectează o singură stare, așa cum a fost cazul reprezentat în figura 4.15, rezultă că matricea de selecție este de forma:

$$[C] = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad (4.228)$$

caz în care:

$$y(t) = x_1(t) \quad (4.229)$$

În cazul particular când la intrare se aplică semnalul:

$$u(t) = e^{st} \quad (4.230)$$

se poate determina o soluție particulară a ecuației (4.214), de forma:

$$y(t) = H(s)e^{st}, \quad (4.231)$$

unde  $H(s)$  este o constantă în raport cu timpul.

Înlocuind (4.230) și (4.231) în ecuația (4.214), se obține:

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)H(s)e^{st} &= \\ &= (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0)e^{st} \end{aligned} \quad (4.232)$$

de unde rezultă:

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (4.233)$$

care reprezintă funcția de transfer a sistemului liniar invariant.

Dacă la intrarea unui astfel de sistem se aplică zgomot alb cu densitate spectrală de putere  $S_0$ , conform relației (1.133), la ieșirea sistemului va rezulta un răspuns cu densitatea spectrală de putere:

$$S_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_0 \quad (4.234)$$

Din (4.233) și (4.234) rezultă atunci că un sistem liniar invariant în timp care formează sistemul dinamic din filtrul Kalman – Bucy (fig. 4.14), poate furniza la ieșire un semnal aleator caracterizat de densitatea spectrală de putere:

$$S_{yy}(j\omega) = \frac{e_{2n-2}\omega^{2n-2} + e_{2n-4}\omega^{2n-4} + \dots + e_2\omega^2 + e_0}{d_{2n}\omega^{2n} + d_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + d_2\omega^2 + d_0} \quad (4.235)$$

Dacă densitatea spectrală de putere a mesajului este cunoscută, atunci  $S_{yy}(j\omega) = S_{mm}(j\omega)$ . Coeficienții ecuației diferențiale (4.214) se obțin prin identificarea relației (4.234) cu (4.235), ținând cont de (4.233).

O modalitate echivalentă rezultă prin descompunerea funcției de transfer  $H(s)$  în fracții simple, care, pentru simplitate, se va considera că are numai poli simpli, reali, adică:

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{s - p_k} \quad (4.236)$$

unde  $\lambda_k$  sunt reziduurile corespunzătoare polilor  $p_k$ .

Sistemul fiind presupus liniar, răspunsul  $y(t)$  va fi suma

răspunsurilor unor sisteme liniare caracterizate de funcțiile de transfer:

$$H_k(s) = \frac{\lambda_k}{s - p_k} \quad (4.237)$$

Notând cu  $x_k(t)$  răspunsul corespunzător sistemului liniar cu funcția de transfer (4.237) la semnalul  $u(t)$ , se poate scrie:

$$\frac{dx_k(t)}{dt} - p_k x_k(t) = \lambda_k u(t) \quad (4.238)$$

Structura unui sistem liniar descris de ecuația (4.238) este dată în figura 4.16.

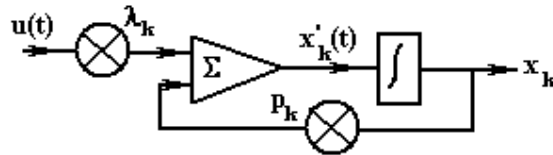


Fig. 4.16. Structura unui bloc de calcul pentru o variabilă de stare

Răspunsul total,  $y(t)$  se obține însumând răspunsurile parțiale, așa cum este arătat în figura 4.17.

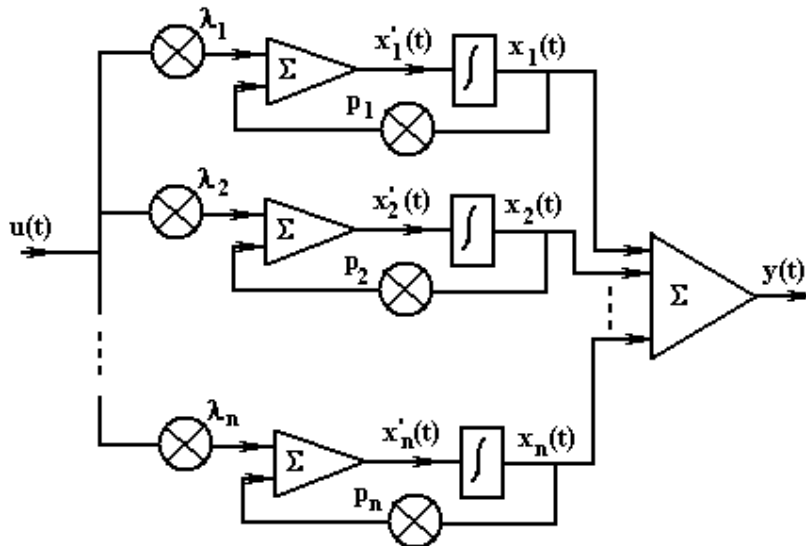


Fig. 4.17. Structura unui sistem dinamic

În cazul schemei din figura 4.17 se poate scrie sistemul de ecuații:

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= p_1 x_1(t) + \lambda_1 u(t) \\ x_2'(t) &= p_2 x_2(t) + \lambda_2 u(t) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n'(t) &= p_n x_n(t) + \lambda_n u(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.239)$$

Ținând cont de (4.219) și (4.225), rezultă din (4.239) că, în acest caz:

$$[F] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}; [G] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.240)$$

Răspunsul este dat de relația:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) \quad (4.241)$$

Conform relației generale (4.227), se poate scrie:

$$y(t) = [C][x(t)], \quad (4.242)$$

unde matricea  $[x(t)]$  este dată de relația (4.219), iar matricea de selecție este în acest caz de forma:

$$[C] = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]_{(1 \times n)} \quad (4.243)$$

#### 4.16. Probleme rezolvate

1. Pe un canal de transmisiuni se transmite mesajul  $m(t)$  a cărui densitate spectrală de putere este:

$$S_{mm}(j\omega) = \frac{\beta}{a^2 + \omega^2}, a > 0$$

Semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = m(t) + n(t)$$

unde  $n(t)$  se poate aproxima cu zgomot alb cu densitate spectrală de putere  $S_0$  și necorelat cu mesajul.

Se cere:

a) Să se determine constanta  $\beta$  astfel încât funcția de autocorelație a mesajului să fie:

$$B_{mm}(\tau) = e^{-a|\tau|}$$

b) Să se calculeze funcția de transfer,  $H_{0n}(s)$  a filtrului optimal Wiener-Hopf necauzal, în cazul filtrării,  $d(t) = m(t)$ ;

c) Să se calculeze eroarea pătratică medie în acest caz și să se analizeze situațiile când raportul

$$\text{semnal/perturbație} = \frac{S_{mm}(0)}{S_0} = \begin{cases} \lambda \ll 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

d) Să se deducă funcția de transfer  $H_0(s)$  a filtrului optimal Wiener-Hopf cauzal, în cazul filtrării.

*Soluție*

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad B_{mm}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{mm}(s) e^{s\tau} ds = \\ &= \frac{\beta}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau} ds}{a^2 - s^2} = \frac{\beta}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau} ds}{(a-s)(a+s)} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left. \frac{\beta e^{s\tau}}{(a+s)} \right|_{s=a}, & \text{pentru } \tau < 0 \\ \left. \frac{\beta e^{s\tau}}{(a-s)} \right|_{s=-a}, & \text{pentru } \tau \geq 0 \end{cases}$$

Rezultă, deci, că  $B_{mm}(\tau) = \frac{\beta}{2a} e^{-a|\tau|}$ , care identificată cu aceea

impusă în text, necesită condiția:  $\frac{\beta}{2a} = 1 \Rightarrow \beta = 2a$

$$\text{b) } H_{0n}(s) = \frac{S_{mm}(s)}{S_{mm}(s) + S_{nn}(s)} = \frac{\frac{2a}{a^2 - s^2}}{\frac{2a}{a^2 - s^2} + S_0} = \frac{2a}{S_0 \frac{2a}{S_0} + a^2 - s^2}$$

$$\text{c) } \overline{\varepsilon^2_{0n}(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{mm}(j\omega)S_{nn}(j\omega)}{S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2aS_0}{a^2 + \omega^2}}{\frac{2a}{a^2 + \omega^2} + S_0} d\omega =$$

$$\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\left(\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2}\right)^2 + \omega^2} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2}}$$

În cazul:

$$\lambda = \frac{S_{mm}(0)}{S_0} = \frac{\frac{2a}{a^2}}{S_0} = \frac{2}{aS_0} \ll 1 \Rightarrow \overline{\varepsilon^2_{0n}(t)} \approx 1$$

În cazul:

$$\lambda = \frac{2}{aS_0} = 3 \Rightarrow \overline{\varepsilon^2_{0n}(t)} = \frac{1}{2}$$

$$d) H_0(s) = \frac{1}{S_{rr}^+(s)} \left[ \frac{S_{rd}(s)}{S_{rr}^-(s)} \right] = \frac{+S_{ad}(s)}{S_{rr}^-(s)}$$

Dar:

$$\begin{aligned} S_{rr}(j\omega) &= F\{B_{rr}(\tau)\} = F\{\overline{r(t)r(t+\tau)}\} = \\ &= F\{\overline{[m(t)+n(t)][m(t+\tau)+n(t+\tau)]}\} = \\ &= S_{mm}(j\omega) + S_{nn}(j\omega) \end{aligned}$$

Rezultă atunci:

$$S_{rr}(s) = S_{mm}(s) + S_{nn}(s) = \frac{2a}{a^2 - s^2} + S_0 =$$

$$\sqrt{S_0} \frac{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} + s}{a+s} \sqrt{S_0} \frac{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} - s}{a-s} = S_{rr}^+(s) S_{rr}^-(s)$$

$$\begin{aligned} S_{rd}(j\omega) &= F\{B_{rd}(\tau)\} = F\{\overline{r(t)m(t+\tau)}\} = F\{\overline{[m(t)+n(t)]m(t+\tau)}\} = \\ &= F\{\overline{m(t)m(t+\tau)}\} = F\{B_{mm}(\tau)\} = S_{mm}(j\omega) \end{aligned}$$

$$S_{ad}(s) = \frac{S_{mm}(s)}{S_{rr}^-(s)} = \frac{2a}{a^2 - s^2} \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{a-s}{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} - s} =$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{S_0}} \frac{1}{(a+s) \left( \sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} - s \right)} = \frac{2a}{\sqrt{S_0}} \left( \frac{A}{a+s} + \frac{B}{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} - s} \right),$$

Rezultă atunci:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} + a}$$



$${}^+S_{ad}(s) = \frac{2a}{\sqrt{S_0}} \frac{A}{a+s} = \frac{2a}{\sqrt{S_0} \left( \sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} + a \right)} \frac{1}{a+s}$$

$$H_0(s) = \frac{{}^+S_{ad}(s)}{S_{rr}^+(s)} = \frac{2a}{S_0 \left( \sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} + a \right) \left( \sqrt{\frac{2a}{S_0} + a^2} + s \right)}$$

4. Pe un canal de transmisiuni se transmite mesajul  $m(t)$  caracterizat de densitatea spectrală de putere:

$$S_{mm}(j\omega) = \frac{2a}{4a^2 + \omega^2}, a > 0$$

Dacă semnalul recepționat este  $r(t) = m(t) + n(t)$ , unde  $n(t)$  se poate considera zgomot alb cu densitate spectrală de putere  $S_0$  și necorelat cu mesajul  $m(t)$ , se cere:

a) Funcția de transfer  $H_a(s)$  a filtrului de albire a semnalului recepționat în cazul în care zgomotul alb de la ieșirea filtrului de albire are densitatea spectrală de putere  $S$ , iar raportul *semnal / perturbatie* este  $S_{mm}(0)/S_0 = \lambda = 3$ ;

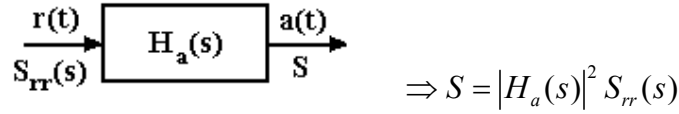
b) Funcția de transfer  $H_0(s)$  a filtrului optimal Wiener-Hopf în cazul filtrării și pentru  $\lambda = 3$ .

*Soluție*

a)

$$\left. \begin{aligned} S_{rr}(s) = S_{mm}(s) + S_{nn}(s) &= \frac{2a}{4a^2 - s^2} + S_0 \\ \lambda = \frac{S_{mm}(0)}{S_0} = \frac{2a}{4a^2 S_0} &= \frac{1}{2aS_0} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$S_{rr}(s) = S_0 \frac{16a^2 - s^2}{4a^2 - s^2} = \sqrt{S_0} \frac{4a+s}{2a+s} \sqrt{S_0} \frac{4a-s}{2a-s} = S_{rr}^+(s) S_{rr}^-(s)$$



Deci:

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s) = \frac{S}{S_{rr}(s)} = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \left( \frac{2a+s}{4a+s} \right) \sqrt{\frac{S}{S_0}} \left( \frac{2a-s}{4a-s} \right)$$

De unde rezultă:

$$H_a(s) = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \frac{2a+s}{4a+s}$$

$$b) H_0(s) = \frac{{}^+S_{ad}(s)}{S_{rr}^+(s)} = \frac{1}{S_{rr}^+(s)} \left[ \begin{array}{c} S_{rd}(s) \\ S_{rr}^-(s) \end{array} \right]$$

$$S_{rd}(s) = S_{rm}(s) = S_{mm}(s) = \frac{2a}{4a^2 - s^2} = \frac{2a}{(2a+s)(2a-s)}$$

$$S_{ad}^-(s) = \frac{S_{rd}(s)}{S_{rr}^-(s)} = \frac{2a}{(2a+s)(2a-s)} \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{2a-s}{4a-s} =$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{S_0}} \frac{1}{(2a+s)(4a-s)} = \frac{2a}{\sqrt{S_0}} \left( \frac{A}{2a+s} + \frac{B}{4a-s} \right)$$

$$\text{unde: } A = \frac{1}{4a-s} \Big|_{s=-2a} = \frac{1}{6a}$$

Deci:

$${}^+S_{ad}(s) = \frac{2a}{\sqrt{S_0}} \frac{A}{2a+s} = \frac{1}{3\sqrt{S_0}} \frac{1}{2a+s}$$

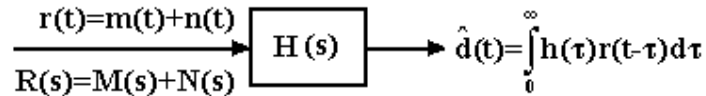
$$H_0(s) = \frac{{}^+S_{ad}(s)}{S_{rr}^+(s)} = \frac{1}{3\sqrt{S_0}} \frac{1}{2a+s} \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{2a+s}{4a+s} = \frac{1}{3S_0} \frac{1}{4a+s}$$

3. Pe un canal de transmisiuni pe care zgomotul  $n(t)$  poate fi considerat alb, cu densitatea spectrală de putere  $S_0$  se transmite mesajul  $m(t)$ , reprezentat printr-un proces aleator, staționar în sens larg, cu densitatea spectrală de putere  $S_{mm}(j\omega)$ . Semnalul recepționat  $r(t) = m(t) + n(t)$  se aplică unui filtru liniar cu funcția de transfer  $H(s)$ . Dacă semnalul dorit la ieșirea filtrului este  $d(t) = m(t)$ , să se arate că densitatea spectrală de putere, exprimată în variabila complexă  $s$ , a erorii filtrului:

$\varepsilon(t) = d(t) - \hat{d}(t) = m(t) - \hat{d}(t)$ , se poate determina cu relația:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(s) = |1 - H(s)|^2 S_{mm}(s) + |H(s)|^2 S_0$$

*Soluție*



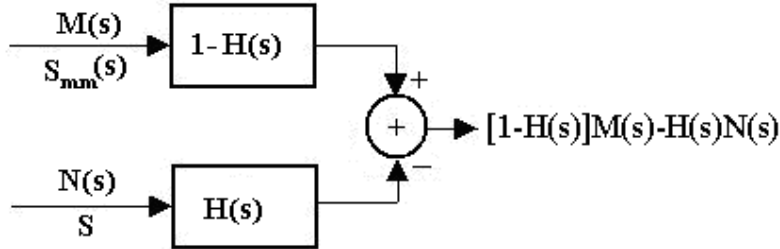
Conform figurii, se poate scrie:

$$\hat{D}(s) = L\{\hat{d}(t)\} = H(s)R(s) = H(s)[M(s) + N(s)]$$

Pe de altă parte:

$$\begin{aligned} L\{\varepsilon(t)\} = \varepsilon(s) &= L\{d(t) - \hat{d}(t)\} = L\{m(t) - \hat{d}(t)\} = M(s) - \hat{D}(s) = \\ &= M(s) - H(s)[M(s) + N(s)] = [1 - H(s)]M(s) - H(s)N(s) \end{aligned}$$

Conform ultimei relații, rezultă schema bloc:



Înseamnă că:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(s) = |1-H(s)|^2 S_{mm}(s) + |H(s)|^2 S_0$$

4. Să se calculeze eroarea pătratică medie a unui filtru Wiener-Hopf cu funcția pondere:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

în cazul în care semnalul dorit a fi estimat este  $d(t) = m(t)$ , funcția de autocorelație a mesajului  $m(t)$  este  $B_{mm}(\tau) = e^{-|\tau|}$ , iar zgomotul aditiv  $n(t)$  este necorelat cu mesajul  $m(t)$ .

*Soluție*

$$\overline{\varepsilon_0^2(t)} = B_{dd}(0) - \int_0^\infty h(u) B_{rd}(u) du; \quad B_{dd}(0) = 1;$$

$$B_{rd}(u) = \overline{r(t)d(t+u)} = \overline{[m(t) + n(t)]m(t+u)} = \overline{m(t)m(t+u)} = B_{mm}(u)$$

$$\overline{\varepsilon_0^2(t)} = 1 - \int_0^\infty h_0(u) B_{mm}(u) du = 1 - \int_0^T e^{-u} du = 2 - e^{-T}$$

5. Funcția pondere a unui filtru optimal Wiener-Hopf este:

$$h_0(\tau) = \begin{cases} e^{-2\tau}, & \text{pentru } \tau \geq 0 \\ 0, & \text{pentru } \tau < 0 \end{cases}$$

Știind că funcția de autocorelație a semnalului recepționat

este  $B_{rr}(u) = e^{-|u|}$ , să se deducă funcția de corelație între semnalul recepționat  $r(t)$  și semnalul dorit a fi estimat, pentru  $u \geq 0$ .

*Soluție*

Din ecuația integrală Wiener-Hopf avem:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau) B_{rr}(u - \tau) d\tau = B_{rd}(u), \quad u \geq 0$$

Dar, 
$$B_{rr}(u - \tau) = e^{-|u - \tau|} = \begin{cases} e^{-(u - \tau)}, & \tau \leq u \\ e^{(u - \tau)}, & \tau > u \end{cases}$$

Înseamnă că:

$$B_{rd}(u) = \int_0^u e^{-2\tau} e^{-(u - \tau)} d\tau + \int_u^{\infty} e^{-2\tau} e^{u - \tau} d\tau = e^{-u} - \frac{2}{3} e^{-2u}, \quad u \geq 0$$

6. Pe un canal de transmisiuni pe care zgomotul aditiv poate fi considerat alb, cu densitatea spectrală de putere  $S_0 = 1$ , se transmite mesajul  $m(t)$ , staționar în sens larg, caracterizat prin funcția de autocorelație:  $B_{mm}(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$ . Semnalul recepționat  $r(t) = m(t) + n(t)$  se aplică unui filtru liniar cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{1 + Ts}, \quad T > 0.$$

Dacă semnalul dorit a fi estimat la ieșirea filtrului este  $d(t) = m(t)$ , se cere:

- Eroarea pătratică medie a filtrului;
- Constanta de timp  $T$ , a filtrului, pentru ca eroarea pătratică medie cauzată de filtru să devină minimă.

*Soluție*

a) 
$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{\varepsilon(t)\varepsilon(t)} = B_{\varepsilon\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(j\omega) d\omega$$

Efectuând schimbarea de variabilă:  $j\omega = s \Rightarrow \omega = \frac{s}{j}; d\omega = \frac{ds}{j}$ , se poate scrie:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(s) ds$$

În problema 3 s-a dedus că:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(s) = |1 - H(s)|^2 S_{mm}(s) + |H(s)|^2 S_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Dar: } S_{mm}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{mm}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{16}{4 + \omega^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{mm}(s) = \frac{16}{4 - s^2} \end{aligned}$$

Dacă  $H(s) = \frac{1}{1 + Ts}$ , atunci:

$$|1 - H(s)|^2 = [1 - H(s)][1 - H(-s)] = 1 - \frac{1}{1 - T^2 s^2}$$

$$\text{și } |H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 - T^2 s^2}$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left(1 - \frac{1}{1 - T^2 s^2}\right) \frac{16}{4 - s^2} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{ds}{1 - T^2 s^2}$$

Utilizând teorema reziduurilor și ținând cont că  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  are sens numai pentru  $t > 0$ , rezultă că se vor lua în considerare numai polii din semiplanul stâng, deci se poate scrie:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = 16 \left[ \frac{1}{2+s} \Big|_{s=2} - \frac{1}{4-s^2} \frac{1}{T^2 \left(\frac{1}{T} + s\right)} \Big|_{s=\frac{1}{T}} - \frac{1}{2+s} \frac{1}{1 - T^2 s^2} \right] +$$

$$+\frac{1}{T^2\left(\frac{1}{T}+s\right)}\Bigg|_{s=\frac{1}{T}} = \frac{8T}{2T+1} + \frac{1}{2T}$$

$$\text{b) } \frac{d\overline{\varepsilon^2(t)}}{dT} = \frac{8(2T+1)-16T^2}{(2T+1)^2} - \frac{1}{2T^2} = \frac{12T^2-4T-1}{2T^2(2T+1)^2} = 0$$

$$12T^2-4T-1=0 \rightarrow T = \frac{2+\sqrt{4+12}}{12} = \frac{1}{2}$$

7. Pe un canal de transmisiuni se transmite mesajul  $m(t)$ , descris matematic de un proces aleator, staționar în sens larg și caracterizat de densitatea spectrală de putere:

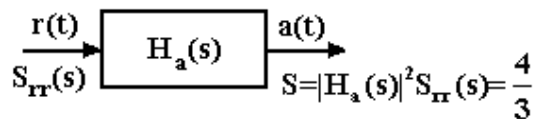
$$S_{mm}(j\omega) = \frac{2}{1+4\omega^2}$$

Dacă semnalul recepționat este  $r(t) = m(t) + n(t)$ , unde zgomotul  $n(t)$  poate fi considerat alb cu densitatea spectrală de putere  $S_0 = 2/3$  W/Hz și necorelat cu mesajul  $m(t)$ , se cere:

a) Funcția de transfer a filtrului de albire a semnalului recepționat astfel încât la ieșirea acestuia să rezulte zgomot alb cu o densitate spectrală de putere dublă față de a zgomotului alb de pe canal;

b) Funcția de transfer a filtrului Wiener-Hopf la recepționarea semnalului  $r(t)$ , în cazul filtrării.

*Soluție*



a)

$$\begin{aligned}
S_{rr}(s) &= S_{mm}(s) + S_{m}(s) = \frac{2}{1-4s^2} + \frac{2}{3} = \frac{2(1-s^2)}{3\left(\frac{1}{4}-s^2\right)} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1+s}{\frac{1}{2}+s} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1-s}{\frac{1}{2}-s} = S_{rr}^+(s) \cdot S_{rr}^-(s) \\
|H_a(s)|^2 S_{rr}(s) &= \frac{4}{3} \rightarrow H_a(s)H_a(-s) = \frac{4}{3S_{rr}(s)} = \\
&= \sqrt{2} \frac{\frac{1}{2}+s}{1+s} \sqrt{2} \frac{\frac{1}{2}-s}{1-s} \rightarrow H_a(s) = \sqrt{2} \frac{\frac{1}{2}+s}{1+s}
\end{aligned}$$

$$\text{b) } H_0(s) = \frac{{}^+S_{ad}(s)}{S_{rr}^+(s)} = \frac{1}{S_{rr}^+(s)} \left[ \frac{S_{rd}(s)}{S_{rr}^-(s)} \right]$$

$$S_{rd}(s) = S_{rm}(s) = S_{mm}(s) = \frac{2}{1-4s^2} = \frac{2}{(1-2s)(1+2s)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(\frac{1}{2}+s\right)}$$

$$S_{ad}(s) = \frac{S_{rd}(s)}{S_{rr}^-(s)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+s\right)(1-s)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left( \frac{A}{\frac{1}{2}+s} + \frac{B}{1-s} \right) \rightarrow$$

$$A = \frac{1}{1-s} \Big|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$${}^+S_{ad}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{A}{\frac{1}{2}+s} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\frac{1}{2}+s}$$

$$H_0(s) = \frac{{}^+S_{ad}(s)}{S_{rr}^+(s)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+s}$$



8. Funcția pondere a unui filtru optimal cauzal Wiener-Hopf este:

$$h_0(\tau) = \begin{cases} e^{-2\tau} & , \tau \geq 0 \\ 0 & , \tau < 0 \end{cases}$$

Să se determine  $B_{dd}(0)$  astfel încât eroarea pătratică medie a filtrului optimal Wiener-Hopf să fie  $0,5B_{dd}(0)$ , dacă funcția de autocorelație a semnalului recepționat este  $B_{rr}(u) = e^{-|u|}$ .

*Soluție*

$$\overline{\mathcal{E}_o^2(t)} = B_{dd}(0) - \int_0^{\infty} h_0(u)B_{rd}(u)du \rightarrow B_{dd}(0) = 2 \int_0^{\infty} h_0(u)B_{rd}(u)du$$

Pe de altă parte, din ecuația integrală Wiener-Hopf rezultă:

$$\begin{aligned} B_{rd}(u) &= \int_0^{\infty} h_0(\tau)B_{rr}(u-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\tau}e^{-|u-\tau|}d\tau = \\ &= \int_0^u e^{-2\tau}e^{-(u-\tau)}d\tau + \int_u^{\infty} e^{-2\tau}e^{u-\tau}d\tau = e^{-u} - \frac{2}{3}e^{-2u} \quad , \quad u \geq 0 \end{aligned}$$

Rezultă atunci:

$$B_{dd}(0) = 2 \int_0^{\infty} e^{-2u} \left( e^{-u} - \frac{2}{3}e^{-2u} \right) du = \frac{1}{3}$$

9. Pe un canal de transmisiuni se transmite mesajul  $m(t)$  descris de un proces aleator, staționar în sens larg, caracterizat de densitatea spectrală de putere:

$$S_{mm}(j\omega) = \frac{1}{4 + \omega^2}$$

Dacă semnalul recepționat este  $r(t) = m(t) + n(t)$ , unde  $n(t)$  este zgomotul de pe canal ce poate fi considerat alb cu densitatea spectrală de putere  $S_0=1$ , să se proiecteze un filtru Kalman-Bucy, care estimează mesajul din semnalul recepționat.

*Soluție*

Funcția de transfer a sistemului dinamic din cadrul filtrului Kalman-Bucy se determină cu relația (1.133), adică:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{S_{mm}(j\omega)}{S_0} = \frac{1}{4 + \omega^2},$$

unde prin  $S$  s-a notat densitatea spectrală a zgomotului alb aplicat la intrarea sistemului dinamic.

Trecând la variabila complexă  $s = \sigma + j\omega$ , se poate scrie:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(2-s)(2+s)}$$

Funcția de transfer a sistemului fizic realizabil rezultă atunci de forma:

$$H(s) = \frac{1}{2+s}$$

Schema filtrului optimal Kalman-Bucy este dată în figura de mai jos

