

## CAPITOLUL 2

### DETECȚIA PREZENȚEI SEMNALELOR

#### 2.1. Modelul unui sistem de transmisiune pentru detecția prezenței semnalelor

Problema detecției prezenței unui semnal util, purtător de informație, în semnalul recepționat, se pune în cazul în care semnalul util este înecat în zgomot (are amplitudine mai mică sau comparabilă cu a zgomotului și spectrul inclus în spectrul acestuia), caz în care prin nici o metodă deterministă clasică nu se poate decide dacă în semnalul recepționat este prezent sau nu, semnalul util.

De exemplu, în scopul depistării unei ținte (avion, rachetă, submarin, banc de pești, un anumit tip de zăcământ etc.) se trimite către aceasta un semnal determinist cunoscut. În cazul prezenței țintei, va rezulta un semnal reflectat,  $s(t)$ , care sumat cu zgomotul,  $n(t)$ , va da naștere semnalului recepționat  $r(t)$ , de forma:

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (2.1)$$

În lipsa țintei, semnalul recepționat are forma:

$$r(t) = n(t) \quad (2.2)$$

Prezența sau lipsa semnalului, în cazul când acesta este înecat în zgomot, nu poate fi sesizată prin metode clasice deterministe, motiv pentru care se recurge la detecția prezenței semnalului util folosind metode statistice. Modelul unui sistem general de transmisiune care realizează detecția prezenței semnalelor este dat în Fig. 2.1.

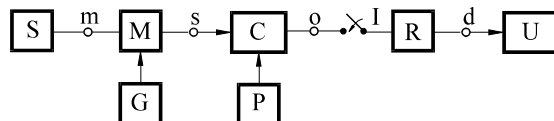


Fig. 2.1. Modelul unui sistem de transmisiuni care realizează detecția prezenței semnalului

Sursa discretă de informație, S, este în general caracterizată de distribuția:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{M-1} \\ p(a_0) & p(a_1) & \dots & p(a_{M-1}) \end{pmatrix}, \sum_{i=0}^{M-1} p(a_i) = 1 \quad (2.3)$$

În aplicațiile curente sursa discretă de informație furnizează numai două mesaje,  $a_0$  și  $a_1$ , care pot fi simbolurile 0 și 1 în cazul transmisiilor în cod, absența sau prezența unui avion în cazul radarului, absența sau prezența unei nave în cazul sonarului etc.

În schema bloc din Fig. 2.1, prin  $m$  s-a notat spațiul mesajelor.

Emitătorul este format din generatorul de purtătoare G și modulatorul M.

În cele ce urmează, se va considera numai cazul în care generatorul de purtătoare generează un semnal determinist, deși există situații în care semnalele purtătoare pot fi condiționat deterministe, sau chiar semnale aleatoare. În cazul când purtătoarea (semnalul generat de G) este un semnal determinist, fiecărui mesaj  $a_0, a_1, \dots, a_{M-1}$  furnizat de sursă îi corespunde, la ieșirea din modulator, un semnal cunoscut:  $s_0(t), s_1(t), \dots$ , respectiv  $s_{M-1}(t)$ .

În schema bloc din Fig. 2.1, prin  $s$  s-a notat spațiul semnalelor generate de emițător.

Semnalele modulate sunt transmise pe canalul de transmisiuni, C, pe care apar perturbațiile aditive, P. Toate celelalte perturbații care afectează semnalul transmis prin canal, (de exemplu perturbațiile

multiplicative) se consideră că sunt introduse de modulator.

Canalul perturbat are, deci, ca singur efect însumarea zgomotului  $n(t)$  la semnalul transmis,  $s(t)$ , în afară, evident, de atenuarea inerentă.

În schema bloc din Fig. 2.1, prin  $o$  s-a notat spațiul observațiilor sau spațiul semnalelor recepționate.

La recepție se fac ipoteze cu privire la mesajele furnizate de sursă. Fiecare ipoteză, notată cu  $H_0, H_1, \dots, H_{M-1}$ , se referă la câte un mesaj  $a_0, a_1, \dots$ , respectiv  $a_{M-1}$  furnizat de sursă.

Pe baza semnalului recepționat la ieșirea din canal și cunoscându-se statistica zgomotului de pe acesta, receptorul R trebuie astfel proiectat, încât să ia decizii, în scopul de a stabili ce ipoteză este adevărată, respectiv, care mesaj a fost furnizat de sursă.

La ieșirea din receptor se iau deciziile  $D_0, D_1, \dots, D_{M-1}$ , care se transmit la utilizatorul U.

În schema bloc din Fig. 2.1, prin  $d$  s-a notat spațiul deciziilor.

Trecerea de la spațiul semnalelor  $s$  la spațiul deciziilor  $d$  este prezentată în Fig. 2.2.



Fig. 2.2 Diagrama de trecere de la spațiul semnalelor la spațiul deciziilor

Spațiul semnalelor este transformat în spațiul observațiilor printr-un mecanism guvernat de legi probabilistice. Spațiul observațiilor, respectiv al semnalelor recepționate, este transformat în spațiul deciziilor cu ajutorul unor reguli de decizie.

Deoarece s-a presupus că purtătoarea este un semnal determinist, evident că între spațiul mesajelor și spațiul semnalelor există o corespondență bijectivă. În cazul ideal, între spațiul mesajelor și spațiul deciziilor trebuie să existe tot o corespondență bijectivă.

Acest lucru nu este posibil în general, deoarece prezența perturbațiilor determină ca unele decizii să fie greșite. Regulile de decizie trebuie astfel alese, încât pe baza unui criteriu de fidelitate impus, să se obțină rezultatele cele mai bune.

La recepție sunt posibile două situații:

a) Întrerupătorul I se închide la momente de timp discrete,  $t_1, t_2, \dots, t_N$  în intervalul de timp  $[0, T]$ , când sursa furnizează un mesaj, caz în care observațiile sunt variabile aleatoare discrete, iar decizia se ia în condiții de observare la momente discrete de timp;

b) Întrerupătorul I stă închis pe toată durata  $[0, T]$  de furnizare a mesajului  $a_i$ , caz în care observațiile sunt procese aleatoare, continue în timp, iar decizia se ia în condițiile unei observări continue.

## **2.2. Detectia prezenței semnalului între două alternative în cazul observării la momente de timp discrete**

În acest caz, sursa de informație este caracterizată de distribuția:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ p(a_0) & p(a_1) \end{pmatrix}, p(a_0) + p(a_1) = 1 \quad (2.4)$$

Referitor la cele două mesaje,  $a_0$  și  $a_1$ , la recepție se fac două ipoteze notate cu  $H_0$ , respectiv  $H_1$ . Prin  $H_0$  se va înțelege ipoteza că sursa S a furnizat mesajul  $a_0$ , iar prin  $H_1$ , ipoteza că s-a furnizat mesajul  $a_1$ .

Conform schemei bloc din Fig. 2.1, când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , emițătorul generează semnalul determinist  $s_0(t)$ , iar când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , emițătorul generează semnalul determinist  $s_1(t)$ . La recepție sunt cunoscute formele semnalelor  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$ , precum și

intervalul  $[0, T]$  în care acestea sunt generate, dar nu se știe care din cele două semnale este generat la un moment de timp dat. Această nedeterminare este cauzată de zgomotul  $n(t)$  de pe canalul de transmisiuni, care, în cazul cel mai sever, "îneacă" semnalele deterministe  $s_0(t)$  sau  $s_1(t)$ .

În cazul ipotezei  $H_0$ , semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = s_0(t) + n(t) \quad (2.5)$$

În cazul ipotezei  $H_1$ , semnalul recepționat este de forma:

$$r(t) = s_1(t) + n(t) \quad (2.6)$$

Dacă observarea semnalului recepționat se realizează la momentele discrete de timp  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , în intervalul de observare  $[0, T]$ , la recepție se obțin eșantioanele:

$$r(t_j) = s_i(t_j) + n(t_j) \quad ; \quad j = \overline{1, N} \quad ; \quad i = 0, 1 \quad (2.7)$$

Pentru simplificarea scrierii, se fac următoarele notații:

$$\left. \begin{array}{l} r(t_j) \stackrel{\text{not.}}{=} r_j \\ n(t_j) \stackrel{\text{not.}}{=} n_j \\ s_i(t_j) \stackrel{\text{not.}}{=} s_{ij} \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

În felul acesta, la recepție, eșantioanele  $r_1, r_2, \dots, r_N$  pot fi considerate componentele vectorului:

$$\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N) \quad (2.9)$$

În mod analog, eșantioanele  $n_j$  și  $s_{ij}$  pot fi considerate componentele vectorilor:

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (2.10)$$

respectiv:

$$\vec{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iN}), \quad i = 0, 1 \quad (2.11)$$

Astfel, spațiul observațiilor poate fi privit ca un spațiu vectorial,  $N$

dimensional, iar relațiile (2.5) și (2.6) pot fi scrise sub următoarele forme vectoriale:

$$H_0 : \vec{r} = \vec{s}_0 + \vec{n} \quad (2.12)$$

$$H_1 : \vec{r} = \vec{s}_1 + \vec{n} \quad (2.13)$$

Cunoscându-se statistica zgomotului de pe canalul de transmisiuni, receptorul trebuie astfel proiectat, încât, din poziția punctului reprezentativ al semnalului recepționat (vârful vectorului  $\vec{r}$ ), să poată să decidă care din cele două ipoteze se consideră adevărată.

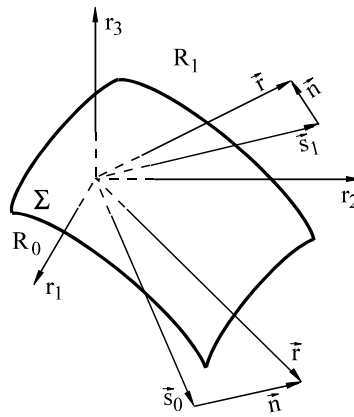


Fig. 2.3 Partiționarea spațiului semnalului recepționat în domeniile  $R_0$  și  $R_1$

În acest scop, spațiul observațiilor este împărțit în două domenii,  $R_0$  și  $R_1$ , de hipersuprafața  $\Sigma$ , așa cum este arătat în Fig. 2.3, în cazul unui spațiu tridimensional. Hipersuprafața  $\Sigma$  se alege de așa manieră încât, dacă punctul reprezentativ al semnalului recepționat  $\vec{r}$  aparține domeniului  $R_0$ , receptorul să ia decizia  $D_0$ , adică să considere că ipoteza  $H_0$  este adevărată, iar dacă punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_1$ , receptorul să ia decizia  $D_1$ , adică să considere că ipoteza  $H_1$  este adevărată.

Datorită perturbațiilor de pe canalul de transmisiuni pot să apară următoarele situații:

a) sursa furnizează mesajul  $a_0$  și punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_0$ ;

b) sursa furnizează mesajul  $a_1$  și punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_1$ ;

c) sursa furnizează mesajul  $a_0$  și punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_1$ ;

d) sursa furnizează mesajul  $a_1$  și punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_0$ ;

Evident că în cazurile a) și b) se iau decizii corecte, în timp ce în cazurile c) și d) se iau decizii incorecte. Proiectarea receptorului trebuie astfel realizată, încât probabilitățile deciziilor corecte să fie cât mai mari, iar cele ale deciziilor incorecte, cât mai mici. În acest scop, se utilizează diverse criterii sau reguli de decizie, dintre care criteriul riscului minim, numit și criteriul sau regula lui Bayes, este cel mai frecvent folosit, datorită generalității sale.

### 2.3. Criteriul riscului minim (regula Bayes)

Se consideră sursa discretă caracterizată de distribuția (2.4).

Criteriul riscului minim permite să se țină seama de faptul că cele patru situații posibile în care se iau decizii, și anume:

- receptorul ia decizia  $D_0$ , și sursa furnizează mesajul  $a_0$ ,
- receptorul ia decizia  $D_1$ , și sursa furnizează mesajul  $a_1$ ,
- receptorul ia decizia  $D_0$ , și sursa furnizează mesajul  $a_1$ ,
- receptorul ia decizia  $D_1$ , și sursa furnizează mesajul  $a_0$ ,

au consecințe diferite pentru utilizator (destinatar).

Aceste consecințe sunt exprimate numeric prin costurile  $C_{ij}$ , unde indicele  $i$  specifică faptul că s-a luat decizia  $D_i$  ( $i=0,1$ ), iar indicele  $j$  specifică faptul că sursa a furnizat mesajul  $a_j$  ( $j=0,1$ ). Rezultă atunci că  $C_{00}$  și  $C_{11}$  reprezintă costurile deciziilor corecte, în timp ce

$C_{01}$  și  $C_{10}$ , costurile deciziilor incorecte.

Probabilitățile celor patru costuri se notează cu  $p(D_i \cap a_j)$ , ( $i, j=0,1$ ), deoarece ele reprezintă intersecția a două evenimente:

1) sursa furnizează mesajul  $a_j$ ,  $j=0,1$

și

2) receptorul ia decizia  $D_i$ ,  $i=0,1$ .

Prin definiție, costul mediu în luarea deciziilor se numește *risc* și va fi notat în continuare cu  $R$ .

Rezultă atunci:

$$R = \overline{C_{ij}} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} p(D_i \cap a_j) \quad (2.14)$$

deoarece costurile  $C_{ij}$  determină o variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile  $p(D_i \cap a_j)$ .

Criteriul riscului minim constă în determinarea condițiilor care minimizează riscul și anume, cum trebuie poziționată hipersuprafața  $\Sigma$ , ce separă cele două domenii,  $R_0$  și  $R_1$ , astfel încât riscul să devină minim.

Deoarece totdeauna se poate scrie:

$$p(D_i \cap a_j) = p(a_j) p(D_i | a_j) \quad (2.15)$$

unde  $p(D_i | a_j)$  este probabilitatea condiționată că receptorul va lua decizia  $D_i$ , dacă sursa furnizează mesajul  $a_j$ , relația (2.14) se poate scrie detaliat sub următoarea formă echivalentă:

$$R = C_{00} p(a_0) p(D_0 | a_0) + C_{01} p(a_1) p(D_0 | a_1) + C_{10} p(a_0) p(D_1 | a_0) + C_{11} p(a_1) p(D_1 | a_1) \quad (2.16)$$

Semnificația geometrică a probabilităților condiționate  $p(D_i | a_j)$ , ( $i, j=0,1$ ), se poate deduce, considerând spațiul vectorial  $N$  dimensional al semnalului recepționat, împărțit în domeniile  $R_0$  și  $R_1$  de hipersuprafața  $\Sigma$ . În aceste condiții, fie volumul diferențial  $dV$ , de forma:



$$dr_1 dr_2 \dots dr_N = dV \quad (2.17)$$

Fie densitatea de probabilitate condiționată de mesajul  $a_j$

$$w(r_1, r_2, \dots, r_N | a_j) = w(\vec{r} | a_j) \quad , \quad j = 0, 1 \quad (2.18)$$

Conform paragrafului 1.1, rezultă că produsul  $w(\vec{r} | a_j) dV$  reprezintă probabilitatea ca punctul reprezentativ al semnalului recepționat să fie în interiorul volumului diferențial  $dV$ , dacă sursa a furnizat mesajul  $a_j$ , ( $j=0,1$ ).

Probabilitatea ca punctul reprezentativ al semnalului recepționat să fie în domeniul  $R_0$ , dacă sursa furnizează mesajul  $a_j$ , se poate calcula atunci cu relația:

$$p(D_0 | a_j) = \int_{R_0} w(\vec{r} | a_j) dV \quad , \quad j = 0, 1 \quad (2.19)$$

În mod analog, probabilitatea ca punctul reprezentativ al semnalului recepționat să fie în domeniul  $R_1$ , dacă sursa furnizează mesajul  $a_j$ , se calculează cu relația:

$$p(D_1 | a_j) = \int_{R_1} w(\vec{r} | a_j) dV \quad , \quad j = 0, 1 \quad (2.20)$$

Cu (2.19) și (2.20), relația (2.16) devine:

$$\begin{aligned} R = & C_{00} p(a_0) \int_{R_0} w(\vec{r} | a_0) dV + C_{01} p(a_1) \int_{R_0} w(\vec{r} | a_1) dV + \\ & + C_{10} p(a_0) \int_{R_1} w(\vec{r} | a_0) dV + C_{11} p(a_1) \int_{R_1} w(\vec{r} | a_1) dV \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pe de altă parte, este evident faptul că, atunci când sursa  $S$  furnizează mesajul  $a_0$ , punctul reprezentativ al semnalului recepționat va aparține cu certitudine fie domeniului  $R_0$ , fie domeniului  $R_1$ , ceea ce, din punct de vedere analitic, înseamnă:

$$p(D_0 | a_0) + p(D_1 | a_0) = 1 \quad (2.22)$$

sau, ținând cont de (2.19) și (2.20), rezultă:

$$\int_{R_1} w(\vec{r}|a_0) dV = 1 - \int_{R_0} w(\vec{r}|a_0) dV \quad (2.23)$$

În mod analog, se poate deduce relația:

$$\int_{R_1} w(\vec{r}|a_1) dV = 1 - \int_{R_0} w(\vec{r}|a_1) dV \quad (2.24)$$

Înlocuind (2.23) și (2.24) în relația (2.21), rezultă:

$$R = C_{10} p(a_0) + C_{11} p(a_1) + \int_{R_0} [(C_{01} - C_{11}) p(a_1) w(\vec{r}|a_1) - (C_{10} - C_{00}) p(a_0) w(\vec{r}|a_0)] dV \quad (2.25)$$

Din relația (2.25) rezultă că riscul R devine minim odată cu valoarea minimă a integralei pe domeniul  $R_0$ , deoarece primii doi termeni din membrul drept al relației (2.25) sunt constanți. Condițiile care asigură valoarea minimă a integralei pe domeniul  $R_0$  din relația (2.25) se pot ușor stabili, cunoscându-se faptul că totdeauna probabilitățile și densitățile de probabilitate sunt nenegative și se ține cont că în aplicațiile practice totdeauna costurile deciziilor incorecte sunt mai mari decât costurile deciziilor corecte. În aceste condiții, cei doi termeni ai integrandului din relația (2.25) sunt nenegativi și, deci, integrala respectivă își atinge valoarea minimă, dacă în domeniul  $R_0$  sunt incluse punctele din spațiul semnalului recepționat, care satisfac relația:

$$(C_{01} - C_{11}) p(a_1) w(\vec{r}|a_1) - (C_{10} - C_{00}) p(a_0) w(\vec{r}|a_0) < 0 \quad (2.26)$$

În domeniul  $R_1$  se vor include atunci punctele care satisfac relația:

$$(C_{01} - C_{11}) p(a_1) w(\vec{r}|a_1) - (C_{10} - C_{00}) p(a_0) w(\vec{r}|a_0) > 0 \quad (2.27)$$

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.26), se consideră adevărată ipoteza  $H_0$ , această relație se scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{w(\vec{r}|a_1)}{w(\vec{r}|a_0)} \underset{H_0}{<} \frac{(C_{10} - C_{00}) p(a_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(a_1)} \quad (2.28)$$

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.27), se consideră adevărată ipoteza  $H_1$ , această relație se scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_1}{>} \frac{(C_{10} - C_{00}) p(a_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(a_1)} \quad (2.29)$$

Relațiile (2.28) și (2.29) pot fi scrise compact într-o singură relație, de forma:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_1}{>} \frac{(C_{10} - C_{00}) p(a_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(a_1)} \underset{H_0}{<} \quad (2.30)$$

care reprezintă forma analitică a *criteriului riscului minim*, sau *regula de decizie Bayes*.

Raportul:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \stackrel{\text{not.}}{=} \Lambda(\vec{r}) \quad (2.31)$$

poartă denumirea de *raport de plauzibilitate*. Din relația (2.31) se constată că raportul de plauzibilitate este o variabilă aleatoare monodimensională, ce poate lua valori numai pe axa reală pozitivă.

Raportul:

$$\frac{(C_{10} - C_{00}) p(a_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(a_1)} \stackrel{\text{not.}}{=} K \quad (2.32)$$

poartă denumirea de *pragul testului*.

Cu notațiile (2.31) și (2.32) criteriul riscului minim se poate scrie sub forma:

$$\Lambda(\vec{r}) \underset{H_1}{>} \underset{H_0}{<} K \quad (2.33)$$

În multe aplicații practice, pentru simplificarea implementării receptorului, relația (2.33) se logaritmează, având în vedere că ambii

membri ai relației (2.33) sunt nenegativi, iar funcția logaritm este monoton crescătoare. Sub formă logaritmică, criteriul riscului minim se scrie sub forma:

$$\ln \Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln K \quad (2.33')$$

Conform relației (2.33), receptorul care ia decizii conform criteriului riscului minim va conține două blocuri, așa cum este arătat în Fig. 2.4.

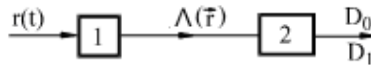


Fig. 2.4. Schema bloc a receptorului

Blocul 1 calculează raportul de plauzibilitate, care nu va depinde nici de probabilitățile cu care sunt furnizate mesajele de sursa S, nici de valorile costurilor alocate deciziilor, ceea ce, evident, constituie un avantaj notabil. Raportul de plauzibilitate depinde însă de statistica zgomotului de pe canalul de transmisiuni și, deci, structura blocului 1 va depinde de legea de repartiție a zgomotului. Blocul 2 poate fi un comparator clasic, care compară  $\Lambda(\vec{r})$  cu un anumit prag K, furnizând, de exemplu, "1" logic pentru decizia  $D_1$  și "0" logic pentru decizia  $D_0$ . O interpretare geometrică intuitivă a criteriului riscului minim este dată în Fig. 2.5.

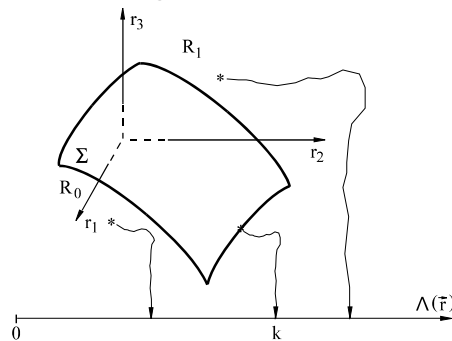


Fig. 2.5. Interpretarea geometrică a criteriului riscului minim

## 2.4. Criteriul observatorului ideal

S-a arătat în paragraful precedent că, la luarea deciziei între două alternative, în cazul observării la momente de timp discrete, sunt patru decizii, dintre care două corecte, de probabilități  $p(D_0|a_0)$  și  $p(D_1|a_1)$  și două incorecte, de probabilități  $p(D_0|a_1)$ , respectiv  $p(D_1|a_0)$ .

Ținând cont, de asemenea, că cele două mesaje  $a_0$  și  $a_1$  sunt furnizate de sursă cu probabilitățile  $p(a_0)$ , respectiv  $p(a_1)$ , rezultă că probabilitatea medie a luării unei decizii incorecte, notată cu  $P(\varepsilon)$ , se poate calcula cu relația:

$$P(\varepsilon) = p(a_0) p(D_1|a_0) + p(a_1) p(D_0|a_1) \quad (2.34)$$

Criteriul observatorului ideal constă în minimizarea probabilității erorii receptorului, adică a lui  $P(\varepsilon)$ . Pentru minimizarea acestei probabilități, se înlocuiesc relațiile (2.19) și (2.20) în (2.34):

$$P(\varepsilon) = p(a_0) \int_{R_1} w(\vec{r}|a_0) dV + p(a_1) \int_{R_0} w(\vec{r}|a_1) dV \quad (2.35)$$

Înlocuind (2.24) în relația (2.35), rezultă:

$$P(\varepsilon) = p(a_0) + \int_{R_0} [p(a_1) w(\vec{r}|a_1) - p(a_0) w(\vec{r}|a_0)] dV \quad (2.36)$$

Valoarea minimă a lui  $P(\varepsilon)$  se obține odată cu valoarea minimă a integralei pe domeniul  $R_0$ .

Pe de altă parte, deoarece ambii termeni ai integrandului sunt nenegativi, rezultă că valoarea minimă a integralei pe domeniul  $R_0$  se obține atunci când în acest domeniu se includ punctele spațiului semnalului recepționat, care satisfac relația:

$$p(a_1) w(\vec{r}|a_1) - p(a_0) w(\vec{r}|a_0) < 0 \quad (2.37)$$

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.37), se consideră adevărată ipoteza  $H_0$ , această relație se scrie sub forma

echivalentă:

$$\frac{w(\bar{r} | a_1)}{w(\bar{r} | a_0)} \underset{H_0}{<} \frac{p(a_0)}{p(a_1)} \quad (2.38)$$

Punctele spațiului semnalului recepționat care satisfac relația:

$$p(a_1)w(\bar{r} | a_1) - p(a_0)w(\bar{r} | a_0) > 0 \quad (2.39)$$

sunt atribuite domeniului  $R_1$ .

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.39), se consideră adevărată ipoteza  $H_1$ , această relație se scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{w(\bar{r} | a_1)}{w(\bar{r} | a_0)} \underset{H_1}{>} \frac{p(a_0)}{p(a_1)} \quad (2.40)$$

Relațiile (2.38) și (2.40) pot fi scrise compact într-o singură relație, de forma:

$$\frac{w(\bar{r} | a_1)}{w(\bar{r} | a_0)} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{p(a_0)}{p(a_1)} \quad (2.41)$$

care reprezintă forma analitică a *criteriului observatorului ideal*.

Se observă din relația (2.41) că în cazul criteriului observatorului ideal raportul de plauzibilitate rămâne același ca în cazul criteriului riscului minim, în timp ce pragul testului se obține în cazul particular:

$$C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11} \neq 0 \quad (2.42)$$

În aplicațiile practice, relația (2.42) se obține impunând valorile pentru costurile deciziilor corecte ( $C_{00}=C_{11}=0$ ), iar valorile costurilor deciziilor incorecte, egale cu unitatea ( $C_{01}=C_{10}=1$ ).

Se constată ușor că, dacă în relația (2.25) se impun condițiile  $C_{00}=C_{11}=0$  și  $C_{01}=C_{10}=1$ , rezultă:

$$R = P(\varepsilon) \quad (2.43)$$

ceea ce subliniază faptul că acest criteriu este un caz particular al

criteriului riscului minim.

Observatorul care alege hipersuprafața  $\Sigma$  care separă domeniile  $R_0$  și  $R_1$ , astfel încât  $P(\epsilon)$  să fie minimă, se numește *observator ideal*.

## 2.5. Criteriul plauzibilității maxime

Considerând că observarea semnalului recepționat  $r(t)$  este terminată, deci punctul reprezentativ al semnalului recepționat cunoscut, se definește funcția:

$$L(a_j) = w(\vec{r} | a_j); \quad j = 0, 1. \quad (2.44)$$

numită *funcție de plauzibilitate*.

Conform acestui criteriu, se consideră mai plauzibil că s-a furnizat mesajul  $a_0$  decât mesajul  $a_1$ , dacă:

$$L(a_0) > L(a_1) \quad (2.45)$$

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.45), se consideră adevărată ipoteza  $H_0$ , această relație se scrie, ținând cont de (2.44), sub forma echivalentă:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)_{H_0}} < 1 \quad (2.46)$$

În mod analog, se consideră mai plauzibil că s-a furnizat mesajul  $a_1$  decât mesajul  $a_0$ , dacă:

$$L(a_1) > L(a_0) \quad (2.47)$$

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.47), se consideră adevărată ipoteza  $H_1$ , această relație se scrie, ținând cont de (2.44), sub forma echivalentă:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)_{H_1}}{w(\vec{r} | a_0)} > 1 \quad (2.48)$$

Relațiile (2.46) și (2.48) pot fi scrise compact într-o singură

relație, de forma:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \quad (2.49)$$

care reprezintă forma analitică a *criteriului plauzibilității maxime*.

Se constată din relația finală (2.49) că, și în cazul acestui criteriu, raportul de plauzibilitate rămâne același, în timp ce pragul testului devine unitar ( $K=1$ ). ținând cont de (2.32), pragul testului devine unitar, atunci când:

$$(C_{10} - C_{00}) p(a_0) = (C_{01} - C_{11}) p(a_1) \neq 0 \quad (2.50)$$

În aplicațiile practice, relația (2.50) se obține impunând valori nule pentru costurile deciziilor corecte, valori egale cu unitatea pentru costurile deciziilor incorecte și presupunând că sursa de informație S furnizează cele două mesaje echiprobabil. Rezultă, deci, că și acest criteriu este un caz particular al criteriului riscului minim.

Criteriul plauzibilității maxime este cel mai folosit în aplicații, deoarece pragul testului fiind egal cu unitatea, conform relației (2.33), rezultă:

$$\ln \Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \quad (2.51)$$

ceea ce conduce la simplificarea substanțială a implementării receptorului.

## 2.6. Criteriul lui Neyman - Pearson

În tehnica radar s-au încetățenit următoarele denumiri, care apoi au fost extrapolate și în alte domenii, deși denumirea lor este proprie doar tehnicii radar:

a) *Probabilitatea de detecție*, notată în continuare cu  $P_d$ ,



respectiv probabilitatea de decizie corectă  $D_1$  când sursa furnizează mesajul  $a_1$  și definită cu relația:

$$P_d = p(D_1 | a_1) = \int_{R_1} w(\vec{r} | a_1) dV \quad (2.52)$$

b) *Probabilitatea de pierdere*, notată în continuare cu  $P_m$ , respectiv probabilitatea unei decizii eronate  $D_0$ , când sursa furnizează mesajul  $a_1$  și definită cu relația:

$$P_m = p(D_0 | a_1) = \int_{R_0} w(\vec{r} | a_1) dV \quad (2.53)$$

c) *Probabilitatea alarmei false*, notată în continuare cu  $P_f$ , respectiv probabilitatea unei decizii eronate  $D_1$ , când sursa furnizează mesajul  $a_0$  și definită cu relația:

$$P_f = p(D_1 | a_0) = \int_{R_1} w(\vec{r} | a_0) dV \quad (2.54)$$

Aceste denumiri sunt ușor de intuit în terminologia tehnicii radar, deoarece, dacă se transmite un semnal spre o anumită țintă potențială, se disting următoarele situații:

- a) Luarea deciziei că în semnalul recepționat există semnal reflectat, când ținta există, caz în care aceasta este detectată;
- b) Luarea deciziei că în semnalul recepționat nu există semnal reflectat, deși ținta există, caz în care rezultă o pierdere;
- c) Luarea deciziei că în semnalul recepționat există semnal reflectat și ținta nu există, caz în care rezultă o alarmă falsă;

Criteriul lui Neyman - Pearson constă în faptul că se impune o valoare limită admisibilă probabilității alarmei false și se deduc, în această situație, condițiile care minimizează probabilitatea de pierdere.

Cu alte cuvinte, se impune:

$$\left. \begin{array}{l} P_f = a = \text{const.} \\ P_m = \text{minim} \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

Extremul probabilității de pierdere,  $P_m$ , se va determina

folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, construindu-se funcția:

$$\Phi = P_m + \lambda (P_f - a) \quad (2.56)$$

unde  $\lambda$  este multiplicatorul lui Lagrange, fiind un număr real pozitiv.

Evident, extremul funcției  $\Phi$  se va atinge odată cu extremul lui  $P_m$ .

Înlocuind (2.53) și (2.54) în relația (2.56), rezultă:

$$\Phi = \int_{R_0} w(\vec{r} | a_1) dV + \lambda \left[ \int_{R_1} w(\vec{r} | a_0) dV - a \right] \quad (2.57)$$

Ținând cont de (2.23), relația (2.57) se poate scrie sub forma:

$$\Phi = \lambda (1 - a) + \int_{R_0} [w(\vec{r} | a_1) - \lambda w(\vec{r} | a_0)] dV \quad (2.58)$$

Deoarece  $\lambda(1-a)$  este o constantă, rezultă că valoarea minimă a funcției  $\Phi$ , deci și valoarea minimă a lui  $P_m$ , se obține odată cu valoarea minimă a integralei pe domeniul  $R_0$  din relația (2.58).

Pe de altă parte, deoarece ambii termeni de sub integrală sunt nenegativi:

$$\left. \begin{array}{l} w(\vec{r} | a_1) \geq 0 \\ \lambda w(\vec{r} | a_0) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.59)$$

rezultă că valoarea minimă a integralei pe domeniul  $R_0$  se atinge atunci când în acest domeniu se includ punctele spațiului recepționat, care satisfac condiția:

$$w(\vec{r} | a_1) - \lambda w(\vec{r} | a_0) < 0 \quad (2.60)$$

Punctele spațiului recepționat care satisfac relația:

$$w(\vec{r} | a_1) - \lambda w(\vec{r} | a_0) > 0 \quad (2.61)$$

se vor include în domeniul  $R_1$ .

Deoarece, atunci când este satisfăcută relația (2.60), se consideră adevărată ipoteza  $H_0$ , această relație se scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_0}{<} \lambda \quad (2.62)$$

În mod analog, rezultă:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_1}{>} \lambda \quad (2.63)$$

Relațiile (2.62) și (2.63) pot fi scrise compact într-o singură relație, de forma:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{>}} \lambda \quad (2.64)$$

care reprezintă forma analitică a *criteriului lui Neyman - Pearson*.

Din relația (2.64) rezultă că, și în cazul acestui criteriu, raportul de plauzibilitate are aceeași expresie, în timp ce pragul testului este egal cu multiplicatorul lui Lagrange, care poate fi determinat din condiția impusă probabilității alarmei false.

Într-adevăr, ținând cont de (2.64) și definiția lui  $P_f$ , rezultă că probabilitatea alarmei false este egală cu probabilitatea ca raportul de plauzibilitate să fie mai mare decât  $\lambda$ , dacă a fost furnizat mesajul  $a_0$ .

$$P_f = P \left\{ \Lambda = \frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} > \lambda | a_0 \right\} \quad (2.65)$$

Pentru determinarea pragului  $\lambda$ , este necesar să se cunoască densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare  $(\Lambda | a_0)$ , adică  $w(\Lambda | a_0)$ . În aceste condiții, se poate scrie:

$$P_f = P \{ \Lambda > \lambda | a_0 \} = \int_{\lambda}^{\infty} w(\Lambda | a_0) d\Lambda \quad (2.66)$$

Impunându-se o valoare maximă admisibilă alarmei false,  $P_f = a$ , din relația (2.66) se poate deduce pragul testului,  $\lambda$ .

## 2.7. Criteriul minimax

Acest criteriu se aplică în cazurile în care costurile deciziilor sunt cunoscute, însă probabilitățile cu care sursa S își furnizează mesajele sunt necunoscute.

Conform acestui criteriu, se consideră necunoscută probabilitatea de furnizare a mesajului  $a_1$ , adică  $p(a_1)$  și, funcție de aceasta, se calculează riscul, conform relației (2.16).

Cu alte cuvinte, pentru  $0 \leq p(a_1) \leq 1$  se aplică criteriul riscului minim și apoi se alege valoarea lui  $p(a_1)$  care maximizează riscul. Riscul astfel obținut  $R_M$  se numește *riscul minimax*, adică:

$$R_M = \max_{p(a_1)} \min_{(R_0, R_1)} R \quad (2.67)$$

Ținând cont că:

$$p(a_1) + p(a_0) = 1 \quad (2.68)$$

relația (2.16) devine:

$$R = C_{00} [1 - p(a_1)] p(D_0 | a_0) + C_{01} p(a_1) p(D_0 | a_1) + C_{10} [1 - p(a_1)] p(D_1 | a_0) + C_{11} p(a_1) p(D_1 | a_1) \quad (2.69)$$

Condiția necesară de extrem a riscului, în raport cu variabila  $p(a_1)$ , se determină cu relația:

$$\frac{\partial R}{\partial p(a_1)} = -C_{00} p(D_0 | a_0) + C_{01} p(D_0 | a_1) - C_{10} p(D_1 | a_0) + C_{11} p(D_1 | a_1) = 0 \quad (2.70)$$

Deoarece însă:

$$\left. \begin{aligned} p(D_0 | a_0) + p(D_1 | a_0) &= 1 \\ p(D_0 | a_1) + p(D_1 | a_1) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

relația (2.70) devine:

$$C_{11} - C_{00} + (C_{01} - C_{11}) p(D_0 | a_1) - (C_{10} - C_{00}) p(D_1 | a_0) = 0 \quad (2.72)$$

sau, ținând cont de (2.53) și (2.54), rezultă echivalent relația:

$$C_{11} - C_{00} + (C_{01} - C_{11}) P_m - (C_{10} - C_{00}) P_f = 0 \quad (2.73)$$

Ecuatia (2.73) este cunoscută sub denumirea de *ecuația minimax*.

Se consideră, în continuare, două situații extreme:

$$p(a_1) = 0 \quad (2.74)$$

și

$$p(a_1) = 1 \quad (2.75)$$

În cazul când este satisfăcută relația (2.74), din (2.32), rezultă  $K \rightarrow \infty$ , ceea ce înseamnă că domeniul  $R_1$  devine mulțime vidă. În acest caz se va lua totdeauna decizia  $D_0$ , adică se vor considera adevărate relațiile:

$$\left. \begin{aligned} p(D_0 | a_0) &= p(D_0 | a_1) = 1 \\ p(D_1 | a_0) &= p(D_1 | a_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Cu (2.74) și (2.76) relația (2.69) devine:

$$R = C_{00} \quad (2.77)$$

În cazul când este satisfăcută relația (2.75), din (2.32) și (2.68) rezultă  $K=0$ , ceea ce înseamnă că domeniul  $R_0$  devine mulțime vidă. În acest caz, se va lua totdeauna decizia  $D_1$ , adică se vor considera adevărate relațiile:

$$\left. \begin{aligned} p(D_0 | a_0) &= p(D_0 | a_1) = 0 \\ p(D_1 | a_0) &= p(D_1 | a_1) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

Cu (2.75) și (2.78), relația (2.69) devine:

$$R = C_{11} \quad (2.79)$$

O posibilă variație a riscului, funcție de variabila  $p(a_1)$ , este dată în Fig. 2.6.

Criteriul minimax are avantajul că asigură faptul că riscul nu va depăși valoarea  $R_M$  pentru orice valoare a lui  $p(a_1)$ , respectiv  $p(a_0)$ . În aplicații, rareori se întâmplă să apară tocmai cazul cel mai defavorabil

( $R=R_M$ ), astfel încât criteriul minimax este acoperitor.

Odată determinată  $p(a_1)$ , cu relația (2.68) se determină  $p(a_0)$ . Cunoscând, de asemenea, costurile deciziilor, se poate determina pragul testului și apoi aplica criteriul riscului minim, descris la paragraful 2.3.

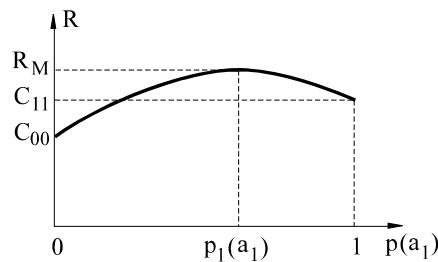


Fig. 2.6. Reprezentarea grafică a riscului funcție de probabilitatea  $p(a_1)$

## 2.8. Statistică suficientă

În toate criteriile de luare a deciziei între două alternative, receptorul trebuia să calculeze raportul de plauzibilitate (2.31) și, în funcție de criteriul adoptat, acesta se compara cu un anumit prag.

În cazul observării la momente discrete de timp  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , se prelevează din semnalul recepționat eșantioanele  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , astfel încât cu relațiile (2.18) și (2.31), raportul de plauzibilitate are forma:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} = \frac{w(r_1, r_2, \dots, r_N | a_1)}{w(r_1, r_2, \dots, r_N | a_0)} \quad (2.80)$$

Evident, cu cât numărul de eșantioane necesar luării deciziei este mai mare, cu atât raportul de plauzibilitate este mai dificil de calculat, deci cu atât mai sofisticat trebuie să fie receptorul.

Din această cauză, se pune problema dacă nu s-ar putea lua decizia asupra prezenței sau lipsei semnalului util în semnalul recepționat, pe baza unui singur eșantion prelevat din semnalul

recepționat, reprezentat într-un sistem de referință, convenabil ales.  
Să presupunem că, printr-o schimbare adecvată a sistemului de referință, semnalul recepționat poate fi reprezentat prin vectorul  $\vec{r}$ , de forma:

$$\vec{r} = (l, l_1, \dots, l_{N-1}) \quad (2.81)$$

Dacă se reușește ca, în noul sistem de coordonate, componenta  $l$  să conțină toată informația necesară luării deciziei, iar celelalte componente să nu afecteze decizia, se spune că s-a obținut o *statistică suficientă*, reprezentată prin componenta  $l$ . În noul sistem de coordonate, raportul de plauzibilitate se scrie astfel:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{w(l, l_1, l_2, \dots, l_{N-1} | a_1)}{w(l, l_1, l_2, \dots, l_{N-1} | a_0)} \quad (2.82)$$

Pentru simplificarea scrierii, se face notația:

$$(l_1, l_2, \dots, l_{N-1}) \stackrel{not.}{=} \vec{L} \quad (2.83)$$

Cu (2.83), relația (2.82) devine:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{w(l, \vec{L} | a_1)}{w(l, \vec{L} | a_0)} \quad (2.84)$$

Deoarece:

$$w(l, \vec{L} | a_j) = w(l | a_j) w(\vec{L} | l, a_j) \quad , \quad j = 0, 1 \quad (2.85)$$

se poate scrie:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{w(l | a_1) w(\vec{L} | l, a_1)}{w(l | a_0) w(\vec{L} | l, a_0)} \quad (2.86)$$

Pentru a exista statistică suficientă, adică raportul de plauzibilitate să nu depindă decât de  $l$ , este necesar ca:

$$w(\vec{L} | l, a_1) = w(\vec{L} | l, a_0) \quad (2.87)$$

În acest caz:

$$\Lambda(\vec{r}) = \Lambda(l) = \frac{w(l|a_1)}{w(l|a_0)} \quad (2.86')$$

Mai mult, dacă între  $l$  și  $\vec{L}$  există independență statistică, relația (2.87) devine:

$$w(\vec{L}|a_1) = w(\vec{L}|a_0) \quad (2.88)$$

permițând să se verifice cu ușurință dacă  $l$  este o statistică suficientă.

Un exemplu sugestiv de statistică suficientă în cazul tridimensional, la aplicarea criteriului plauzibilității maxime ( $K=1$ ), este ilustrat în Fig. 2.7. Se presupune că, atunci când sursa  $S$  furnizează mesajul  $a_0$ , emițătorul generează semnalul  $s_0(t)$ , reprezentat de vectorul  $\vec{s}_0$ . Punctul reprezentativ al acestui vector s-a notat cu  $A$ .

Analog, când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , emițătorul generează semnalul  $s_1(t)$ , reprezentat de vectorul  $\vec{s}_1$ . Punctul reprezentativ al acestui vector s-a notat cu  $B$ .

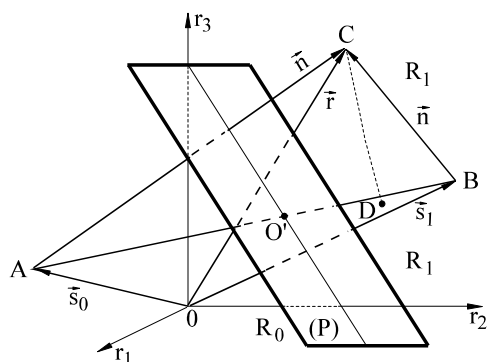


Fig. 2.7. Obținerea statisticii suficiente în spațiul tridimensional

Dacă  $n(t)$  este zgomotul de pe canalul de transmisiuni, reprezentat de vectorul  $\vec{n}$ , atunci în ipoteza  $H_0$  semnalul recepționat va fi de forma:



$$\vec{r} = \vec{s}_0 + \vec{n} \quad (2.89)$$

iar în ipoteza  $H_1$ , de forma:

$$\vec{r} = \vec{s}_1 + \vec{n} \quad (2.90)$$

Punctul reprezentativ al vectorului  $\vec{r}$  s-a notat cu  $C$ .

Dacă se aplică criteriul plauzibilității maxime în luarea deciziei, cele două domenii,  $R_0$  și  $R_1$ , rezultă prin separarea spațiului tridimensional prin planul (P), perpendicular pe mijlocul segmentului AB, deoarece acest plan va fi locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele reprezentative A și B. Domeniul de sub planul (P) va fi notat cu  $R_0$ , iar cel de deasupra, cu  $R_1$ . Conform acestui criteriu, dacă punctul reprezentativ al semnalului recepționat,  $C$ , aparține domeniului  $R_1$ , se consideră adevărată ipoteza  $H_1$ , adică receptorul decide că sursa a furnizat mesajul  $a_1$ , iar dacă punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_0$ , se consideră adevărată ipoteza  $H_0$ , adică receptorul decide că sursa a furnizat mesajul  $a_0$ . În sistemul de referință inițial ( $r_1, r_2, r_3$ ), punctul reprezentativ al semnalului recepționat este caracterizat de trei componente și, deci, raportul de plauzibilitate va depinde de toate aceste trei coordonate. Fie  $D$  proiecția punctului  $C$  pe planul (OAB).

Pentru a se obține o statistică suficientă, se modifică sistemul de referință după cum urmează:

- direcția AB se consideră axa  $l$ ;
- intersecția planului (P) cu planul (OAB) se consideră axa  $l_1$ ;
- perpendiculara în punctul  $O' = \{(P) \cap AB\}$  pe planul (OAB) se consideră axa  $l_2$ .

În noul sistem de coordonate  $l, l_1$  și  $l_2$ , decizia se ia pe baza poziției punctului  $D$ , deci independent de coordonata  $l_2$ , așa cum este arătat în Fig. 2.8.

Mai mult, din figurile 2.7 și 2.8 rezultă că, dacă proiecția punctului  $D$

pe axa  $l$  este o mărime pozitivă, punctul reprezentativ al semnalului recepționat, C, este în domeniul  $R_1$ , iar dacă proiecția punctului D pe axa  $l$  este o mărime negativă, punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_0$ .

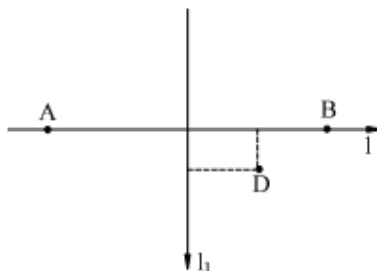


Fig. 2.8. Reducerea problemei în plan

Rezultă, deci, că în noul sistem de referință,  $l, l_1, l_2$ , s-a obținut o statistică suficientă, deoarece numai pe baza unei singure coordonate se poate lua decizia.

## 2.9. Detecția prezenței a două semnale deterministe cunoscute în cazul observării la momente discrete de timp

Fie sursa discretă de informație  $S$ , caracterizată de distribuția:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ p(a_0) & p(a_1) \end{pmatrix}, \quad p(a_0) + p(a_1) = 1 \quad (2.91)$$

Când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , emițătorul generează semnalul determinist  $s_0(t)$ , cunoscut la recepție, iar când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , emițătorul generează semnalul determinist  $s_1(t)$ , cunoscut, de asemenea, la recepție.

Trebuie subliniat faptul că, din cauza perturbațiilor de pe canal,

deși la recepție sunt cunoscute formele semnalelor  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$ , nu se știe care din acestea este în semnalul recepționat. Mai mult, se consideră că transmisiunea este coerentă, adică la recepție se cunoaște intervalul de timp  $[0, T]$  în care, potențial, sursa de informație furnizează fie mesajul  $a_0$ , fie mesajul  $a_1$ .

Dacă se notează zgomotul de pe canalul de transmisiuni cu  $n(t)$ , atunci, în cazul ipotezei  $H_0$ , semnalul recepționat are forma:

$$r(t) = s_0(t) + n(t) \quad (2.92)$$

iar în cazul ipotezei  $H_1$  are forma:

$$r(t) = s_1(t) + n(t) \quad (2.93)$$

În cazul observării la momente de timp discrete, se fac observații în intervalul de timp  $[0, T]$  la momentele de timp  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .

La momentul  $t_j \in [0, T]$ ,  $j = \overline{1, N}$ , rezultă:

$$r(t_j) = s_i(t_j) + n(t_j) \quad ; \quad i = 0, 1 \quad (2.94)$$

Cu notațiile (2.8), relațiile (2.92) și (2.93) se pot scrie sub forma:

$$(r_j | a_j) = s_{ij} + n_j \quad ; \quad i = 0, 1; \quad j = \overline{1, N} \quad (2.95)$$

De regulă, zgomotul de pe canalul de transmisiuni este repartizat după o lege normală, cu valoare medie nulă.

Notând cu  $\sigma_j^2$  dispersia eșantionului  $n_j$ , legea de repartiție a acestuia se poate scrie astfel:

$$w_1(n_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{n_j^2}{2\sigma_j^2}} \quad (2.96)$$

Zgomotul de pe canalele reale de transmisiuni este bine aproximat de un proces aleator staționar, ceea ce determină ca toate dispersiile eșantioanelor prelevate din zgomot să fie egale, adică:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_j^2 = \dots = \sigma_N^2 \stackrel{not.}{=} \sigma^2 \quad (2.97)$$

În afara acestor considerente statistice asupra zgomotului, mai trebuie adăugat faptul că, de obicei, acesta este un zgomot cvasialb, adică are o densitate spectrală de putere constantă  $S_0$  într-o anumită bandă de frecvență.

Dacă banda zgomotului cvasialb este de cel puțin zece ori mai mare decât banda canalului, acesta poate fi considerat cu bună aproximație zgomot alb pentru canalul respectiv.

Pe de altă parte, s-a demonstrat în capitolul întâi, relația (1.84), că funcția de autocorelație a zgomotului alb,  $B_{nn}(\tau)$ , este proporțională cu distribuția Dirac, adică:

$$B_{nn}(\tau) = S_0 \delta(\tau) \quad (2.98)$$

Deoarece funcția de autocorelație reprezintă o măsură a dependenței statistice între valorile instantanee ale unui proces aleator și deoarece  $\delta(\tau) = 0$  pentru  $\tau \neq 0$ , rezultă că eșantioanele prelevate  $n_j$  sunt statistic independente, ceea ce permite să se scrie relația:

$$w(n_1, n_2, \dots, n_N) \stackrel{not.}{=} w(\vec{n}) = \prod_{j=1}^N w_1(n_j) \quad (2.99)$$

Înlocuindu-se relația (2.96) în (2.99) și ținând cont de (2.97), rezultă:

$$w(\vec{n}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^N n_j^2} \quad (2.100)$$

Dacă zgomotul cvasialb nu poate fi considerat zgomot alb pentru canalul de transmisiuni respectiv, atunci se poate arăta că eșantioanele zgomotului devin statistic independente, putându-se, deci, scrie și în acest caz relația (2.100), dacă eșantioanele zgomotului cvasialb sunt prelevate la intervalele de timp:

$$T_1 = \frac{1}{2f_0} \quad (2.101)$$

unde  $f_0$  este frecvența cea mai mare din spectrul zgomotului.

Într-adevăr, conform relației (1.86), se poate scrie:

$$B_{nn}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(j\omega) \cos \omega\tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{nn}(j\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (2.102)$$

unde  $S_{nn}(j\omega)$  este densitatea spectrală de putere a zgomotului cvasialb, adică:

$$S_{nn}(j\omega) = \begin{cases} S_0, & \text{pentru } 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0, & \text{pentru } \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (2.103)$$

Ținând cont de (2.103), relația (2.102) devine:

$$B_{nn}(\tau) = \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_0} \cos \omega\tau d\omega = \frac{S_0}{\pi\tau} \sin \omega_0\tau \quad (2.104)$$

Dacă eșantioanele se prelevează la intervalele de timp:

$$\tau = k T_1 = \frac{k}{2f_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.105)$$

atunci:

$$B_{nn}(k T_1) = 2 f_0 S_0 \frac{\sin k\pi}{k\pi} = \begin{cases} 2 f_0 S_0, & \text{pentru } k = 0 \\ 0, & \text{pentru } k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.106)$$

Conform relației (2.106), rezultă că eșantioanele zgomotului cvasialb, distanțate la intervalul de timp  $T_1 = 1/(2f_0)$ , sunt statistic independente. În intervalul  $[0, T]$  numărul eșantioanelor statistic independente se deduce, evident, cu relația:

$$N = \frac{T}{T_1} = 2 f_0 T \quad (2.107)$$

În cele ce urmează, se consideră fie că zgomotul se poate considera alb pentru canalul respectiv, fie eșantionarea semnalului recepționat se realizează cu perioada  $T_1 = 1/(2f_0)$ , unde  $f_0$  este frecvența cea mai mare din spectrul zgomotului cvasialb și, deci, se poate scrie relația (2.100).

Indiferent de criteriul de decizie adoptat, raportul de plauzibilitate este de forma (2.31). Pentru a-l putea calcula, va trebui

să se calculeze densitățile de probabilitate ale variabilei aleatoare date de relația (2.95):

Deoarece eşantioanele  $n_j$  ale zgomotului s-au presupus repartizate după o lege normală, monodimensională, rezultă că și variabila aleatoare  $(r_j | a_i)$  va fi repartizată după o lege normală, zgomotul fiind statistic independent de valorile eşantioanelor deterministe  $s_{ij}$ .

Pentru a putea scrie legea de repartiție a variabilei aleatoare  $(r_j | a_i)$ , va trebui să se determine valoarea medie statistică și dispersia acesteia.

Având în vedere (2.95), se poate scrie:

$$m_1 \{ (r_j | a_i) \} \stackrel{not.}{=} (\bar{r}_j | a_i) = m_1 \{ n_j + s_{ij} \} = \bar{n}_j + s_{ij} = s_{ij}, \quad i = 0, 1 \quad (2.108)$$

Notând cu  $D \{ (r_j | a_i) \}$  dispersia, rezultă:

$$\begin{aligned} D \{ (r_j | a_i) \} &\stackrel{not.}{=} m_1 \left\{ \left[ (r_j | a_i) - (\bar{r}_j | a_i) \right]^2 \right\} = \\ &= m_1 \left\{ (n_j + s_{ij} - s_{ij})^2 \right\} = m_1 \{ n_j^2 \} = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Legea de repartiție a variabilei aleatoare  $(r_j | a_i)$  este atunci de forma:

$$w_1(r_j | a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_j - s_{ij})^2}, \quad i = 0, 1 \quad (2.110)$$

Eşantioanele zgomotului fiind statistic independente, rezultă că și variabilele aleatoare  $(r_j | a_i)$ ,  $j = \overline{1, N}$  sunt statistic independente, deci se poate scrie relația:

$$w(r_1, r_2, \dots, r_N | a_i) \stackrel{not.}{=} w(\vec{r} | a_i) = \prod_{j=1}^N w_1(r_j | a_i), \quad i = 0, 1. \quad (2.111)$$

Înlocuind (2.110) în (2.111) rezultă

$$w(\vec{r} | a_i) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^N (r_j - s_{ij})^2}, \quad i = 0, 1. \quad (2.112)$$

Considerând pragul testului egal cu  $K$ , se poate scrie relația:

$$\frac{w(\vec{r} | a_1)}{w(\vec{r} | a_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} K \quad (2.113)$$

Înlocuind relația (2.112) în (2.113) și apoi logaritmand în baza  $e$ , rezultă:

$$\sum_{j=1}^N r_j (s_{1j} - s_{0j}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (s_{1j}^2 - s_{0j}^2) \quad (2.114)$$

Pentru fixarea ideilor, se particularizează relația (2.114) în cazul în care emițătorul generează impulsuri rectangulare, de amplitudine constantă, egală cu  $a$ , când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , și de amplitudine zero, atunci când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , așa cum este arătat în Fig. 2.9.

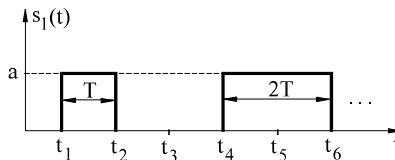


Fig 2.9. Semnalul generat de emițător

În acest caz particular,  $s_{1j}=a$ ,  $s_{0j}=0$  și, deci, relația (2.114) devine:

$$\sum_{j=1}^N r_j \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma^2 \ln K}{a} + \frac{Na}{2} \quad (2.115)$$

Mai mult, dacă se utilizează criteriul plauzibilității maxime ( $K=1$ ,  $\ln K=0$ ), rezultă:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a}{2} \quad (2.116)$$

Relația (2.116) pune în evidență faptul intuitiv conform căruia, dacă media aritmetică a eșantioanelor prelevate din semnalul recepționat este mai mare decât jumătatea amplitudinii impulsurilor așteptate, se consideră adevărată ipoteza  $H_1$ , adică se decide că sursa a furnizat mesajul  $a_1$ , în caz contrar, se consideră adevărată ipoteza  $H_0$ , adică sursa a furnizat mesajul  $a_0$ .

### 2.10. Determinarea probabilităților deciziilor corecte și incorecte în cazul detecției a două semnale deterministe cunoscute

În scopul determinării acestor probabilități, în relația (2.114) se fac următoarele notații:

$$\sum_{j=1}^N r_j (s_{1j} - s_{0j}) \stackrel{not.}{=} (z | a_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.117)$$

$$\sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (s_{1j}^2 - s_{0j}^2) \stackrel{not.}{=} K_1 \quad (2.118)$$

Cu aceste notații, probabilitățile deciziilor corecte și incorecte se determină după cum urmează:

- probabilitatea unei pierderi (decizie incorectă):

$$P_m = P(D_0 | a_1) = \int_{-\infty}^{K_1} w(z | a_1) dz \quad (2.119)$$

- probabilitatea unei detecții (decizie corectă):

$$P_d = P(D_1 | a_1) = 1 - P_m \quad (2.120)$$

- probabilitatea de a lua decizia  $D_0$  când sursa a furnizat mesajul  $a_0$  (decizie corectă):



$$P(D_0 | a_0) = \int_{-\infty}^{K_1} w(z | a_0) dz \quad (2.121)$$

- probabilitatea alarmei false (decizie incorectă):

$$P_f = P(D_1 | a_0) = 1 - P(D_0 | a_0) \quad (2.122)$$

Presupunând că perturbațiile de pe canalul de transmisiuni sunt asimilate zgomotului alb, care, la rândul lui, se presupune repartizat după o lege normală, cu valoare medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ , densitățile de repartiție  $w(z | a_i)$ ,  $i=0,1$ , vor avea, de asemenea, legi de repartiție normale, dar va trebui să se calculeze valorile medii și dispersiile corespunzătoare.

Valoarea medie a variabilei aleatoare ( $z | a_i$ ),  $i=0,1$ , rezultă ușor, dacă se ține cont de relațiile (2.95) și (2.117):

$$\begin{aligned} m_1 \{ (z | a_i) \} &= (\bar{z} | a_i) = m_1 \left\{ \sum_{j=1}^N (s_{ij} + n_j) (s_{1j} - s_{0j}) \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^N (s_{ij} + \bar{n}_j) (s_{1j} - s_{0j}) = \sum_{j=1}^N s_{ij} (s_{1j} - s_{0j}) \quad , \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (2.123)$$

Dispersia acestei variabile aleatoare se deduce atunci cu relația:

$$\begin{aligned} D \{ (z | a_i) \} &= m_1 \left\{ [(z | a_i) - (\bar{z} | a_i)]^2 \right\} = \\ &= m_1 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N (s_{ij} + n_j) (s_{1j} - s_{0j}) - \sum_{j=1}^N s_{ij} (s_{1j} - s_{0j}) \right]^2 \right\} \\ &= m_1 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N n_j (s_{1j} - s_{0j}) \right]^2 \right\}, i = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Pe de altă parte, suma  $\left[ \sum_{j=1}^N n_j (s_{1j} - s_{0j}) \right]^2$  va conține termeni de forma  $n_j^2 (s_{1j} - s_{0j})^2$  și de forma  $2n_j n_k (s_{1j} - s_{0j})(s_{1k} - s_{0k})$ ,  $j \neq k$ .

Media statistică a acestor termeni se calculează cu relațiile:

$$m_1 \left\{ n_j^2 (s_{1j} - s_{0j})^2 \right\} = \overline{n_j^2} (s_{1j} - s_{0j})^2 = \sigma^2 (s_{1j} - s_{0j})^2 \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} m_1 \left\{ 2 n_j n_k (s_{1j} - s_{0j}) (s_{1k} - s_{0k}) \right\} &= 2 (s_{1j} - s_{0j}) (s_{1k} - s_{0k}) \overline{n_j n_k} = \\ &= 2 (s_{1j} - s_{0j}) (s_{1k} - s_{0k}) \overline{n_j} \overline{n_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Ținând cont de (2.125) și (2.126), relația (2.124) devine:

$$D\{(z | a_i)\} = \sigma^2 \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2 \quad (2.127)$$

Cu relațiile (2.123) și (2.127) se poate scrie:

$$w_1(z | a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} \sigma} e^{-\frac{\left[ z - \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j}) s_{1j} \right]^2}{2\sigma^2 \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} \quad (2.128)$$

$$w_1(z | a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} \sigma} e^{-\frac{\left[ z - \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j}) s_{0j} \right]^2}{2\sigma^2 \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} \quad (2.129)$$

Pentru a calcula probabilitatea unei pierderi cu relația (2.119), se ține cont de relația (2.128), efectuându-se, totodată, schimbarea de variabilă:

$$\frac{z - \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j}) s_{1j}}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} = u; \quad dz = \sigma \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} du \quad (2.130)$$

Cu această schimbare de variabilă, limita superioară a integralei din relația (2.119) devine:

$$\begin{aligned}
& \frac{K_1 - \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j}) s_{1j}}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} = \frac{\sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (s_{1j}^2 - s_{0j}^2) - \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j}) s_{1j}}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} = \\
& = \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} - \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} \stackrel{not.}{=} x \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Cu (1.57), (2.128), (2.130) și (2.131), relația (2.119) devine:

$$P_m = F(x) = F \left[ \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} - \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} \right] \quad (2.132)$$

unde  $F(x)$  este funcția Laplace.

Reprezentarea grafică din Fig. 2.10, efectuată pe baza relației (2.128), dă o imagine intuitivă a celor două probabilități.

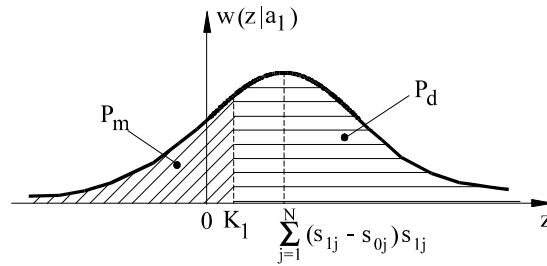


Fig. 2.10. Reprezentarea geometrică a probabilității de pierdere  $P_m$  și de detecție  $P_d$

Suprafața hășurată oblic este proporțională cu probabilitatea unei pierderi ( $P_m$ ), iar suprafața hășurată orizontal este proporțională cu probabilitatea unei detecții ( $P_d$ ).

În mod analog, probabilitatea  $P(D_0 | a_0)$  se deduce din relația (2.121), ținându-se cont de (2.129) și efectuând schimbarea de variabilă:

$$\left. \begin{aligned} \frac{z - \sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j}) s_{0j}}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} = v \\ dz = \sigma \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} dv \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

Cu (1.57), (2.129), (2.133), relația (2.121) devine:

$$P(D_0 | a_0) = F \left[ \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2}} + \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{1j} - s_{0j})^2} \right] \quad (2.134)$$

Reprezentarea grafică din Fig. 2.11, efectuată pe baza relației (2.129), dă o imagine intuitivă a celor două probabilități.

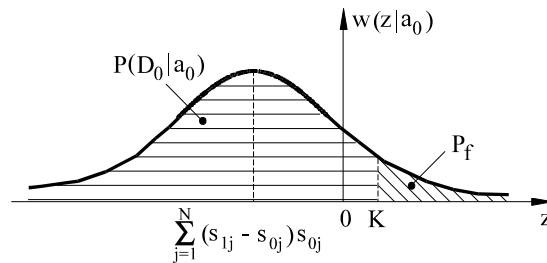


Fig. 2.11. Reprezentarea geometrică a probabilităților alarmei false  $P_f$  și a probabilității  $P(D_0 | a_0)$

Suprafața hașurată oblic este proporțională cu probabilitatea alarmei false  $P_f$ , iar suprafața hașurată orizontal este proporțională cu

probabilitatea  $P(D_0 | a_0)$ .

### 2.11. Deducerea statisticii suficiente în cazul observării continue

Ca și în paragraful 2.9, se presupune o sursă discretă de informație caracterizată de distribuția (2.91).

Când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , se consideră că emițătorul generează semnalul determinist  $s_0(t)$ , cunoscut la recepție, iar când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , se consideră că emițătorul generează semnalul determinist  $s_1(t)$ , cunoscut, de asemenea, la recepție.

Semnalele deterministe  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  fiind înecate de zgomotul  $n(t)$ , nu se poate lua decizia asupra semnalului prezent în semnalul recepționat  $r(t)$ , prin nici o metodă clasică deterministă.

Spre deosebire de cazul analizat în paragraful 2.9, în acest caz se presupune că observarea se efectuează în mod continuu pe tot intervalul  $[0, T]$  cât este furnizat fie mesajul  $a_0$ , fie mesajul  $a_1$ .

În scopul implementării unui receptor, capabil să poată decide care din cele două semnale deterministe  $s_0(t)$  sau  $s_1(t)$  este prezent în semnalul recepționat, se consideră un sistem ortonormat, complet, de funcții  $v_i(t)$ , care satisfac relația:

$$\int_0^T v_i(t) v_j(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad (2.135)$$

Semnalul recepționat,  $r(t)$ , poate fi scris atunci sub forma unei serii:

$$r(t) = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N r_i v_i(t) \quad (2.136)$$

unde l.i.m. înseamnă convergență în medie pătratică, adică:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{[r(t) - r_N(t)]^2} = 0 \quad (2.137)$$

unde:

$$r_N(t) = \sum_{i=1}^N r_i v_i(t) \quad (2.138)$$

Datorită relațiilor (2.135) ÷ (2.138), se poate scrie:

$$r_i = \int_0^T r(t) v_i(t) dt \quad (2.139)$$

care reprezintă coordonatele semnalului recepționat,  $r(t)$ , în spațiul semnalului recepționat.

Pentru a putea lua deciziile în cazul unui spațiu bidimensional, prima funcție ortonormată se adoptă de forma:

$$v_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \quad (2.140)$$

unde:

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt \quad (2.141)$$

reprezintă *energia* semnalului determinist  $s_1(t)$  și a doua funcție ortonormată, de forma:

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ \frac{s_0(t)}{\sqrt{E_0}} - \rho \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \right] \quad (2.142)$$

unde:

$$E_0 = \int_0^T s_0^2(t) dt \quad (2.143)$$

reprezintă energia semnalului determinist  $s_0(t)$ , iar:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_0 E_1}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \quad (2.144)$$

se numește *coeficient de corelație*.

Celelalte funcții ortonormate  $v_i(t)$ ,  $i > 2$ , nu trebuie cunoscute ca

formă, impunându-se numai satisfacerea relației (2.135). Se poate verifica faptul că cele două funcții  $v_1(t)$  și  $v_2(t)$  satisfac condiția de ortonormalitate (2.135).

Într-adevăr:

$$\int_0^T v_1^2(t) dt = \frac{1}{E_1} \int_0^T s_1^2(t) dt = 1 \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T v_2^2(t) dt &= \frac{1}{1-\rho^2} \frac{1}{E_0} \int_0^T s_0^2(t) dt - \frac{2\rho}{(1-\rho^2)\sqrt{E_0 E_1}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt + \\ &+ \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)E_1} \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{1}{1-\rho^2} - \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} = 1 \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T v_1(t) v_2(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2) E_0 E_1}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt - \\ &- \frac{\rho}{E_1 \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.147)$$

Coefficienții dezvoltării (2.139) sunt:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \int_0^T r(t) s_1(t) dt \quad (2.148)$$

și:

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{E_0}} \int_0^T r(t) s_0(t) dt - \frac{\rho}{\sqrt{E_1}} \int_0^T r(t) s_1(t) dt \right] \quad (2.149)$$

În ipoteza  $H_0$ , când:

$$r(t) = s_0(t) + n(t) \quad (2.150)$$

coeficienții  $r_1$  și  $r_2$  devin:

$$(r_1 | a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_0(t) dt = \rho_1 + \rho \sqrt{E_0} \quad (2.151)$$

unde:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \int_0^T n(t) s_1(t) dt \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} (r_2 | a_0) &= \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2) E_0}} \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_0(t) dt - \frac{\rho}{\sqrt{(1-\rho^2) E_1}} \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_1(t) dt = \\ &= \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho^2 \sqrt{E_0}}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho \rho_1}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\rho_0 - \rho \rho_1}{\sqrt{1-\rho^2}} + \sqrt{(1-\rho^2) E_0} \end{aligned} \quad (2.153)$$

unde:

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \int_0^T n(t) s_0(t) dt \quad (2.154)$$

În ipoteza  $H_1$ , când:

$$r(t) = s_1(t) + n(t) \quad (2.155)$$

coeficienții  $r_1$  și  $r_2$  devin:

$$\begin{aligned} (r_1 | a_1) &= \int_0^T [s_1(t) + n(t)] v_1(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_1}} \int_0^T s_1^2(t) dt + \frac{1}{\sqrt{E_1}} \int_0^T n(t) s_1(t) dt = \sqrt{E_1} + \rho_1 \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} (r_2 | a_1) &= \int_0^T [s_1(t) + n(t)] v_2(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2) E_0}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt + \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2) E_0}} \int_0^T n(t) s_0(t) dt - \\ &- \frac{\rho}{\sqrt{(1-\rho^2) E_1}} \int_0^T s_1^2(t) dt - \frac{\rho}{\sqrt{(1-\rho^2) E_1}} \int_0^T n(t) s_1(t) dt = \\ &= \frac{\rho \sqrt{E_1}}{\sqrt{(1-\rho^2)}} + \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho \sqrt{E_1}}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho \rho_1}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\rho_0 - \rho \rho_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{aligned} \quad (2.157)$$

Celelalte coordonate, pentru  $i > 2$ , în ipoteza  $H_0$ , sunt:



$$(r_i | a_0) = \int_0^T [s_0(t) + n(t)] v_i(t) dt \quad (2.158)$$

Pe de altă parte, din (2.140) și (2.142) rezultă:

$$s_0(t) = \sqrt{E_0} \left[ \sqrt{1 - \rho^2} v_2(t) + \rho v_1(t) \right] \quad (2.159)$$

Înlocuind (2.159) în (2.158), se poate scrie:

$$(r_i | a_0) = \sqrt{(1 - \rho^2) E_0} \int_0^T v_2(t) v_i(t) dt + \rho \sqrt{E_0} \int_0^T v_1(t) v_i(t) dt + \int_0^T n(t) v_i(t) dt = \int_0^T n(t) v_i(t) dt, \quad i > 2 \quad (2.160)$$

În ipoteza  $H_1$ :

$$(r_i | a_1) = \int_0^T [s_1(t) + n(t)] v_i(t) dt = \sqrt{E_1} \int_0^T v_1(t) v_i(t) dt + \int_0^T n(t) v_i(t) dt = \int_0^T n(t) v_i(t) dt, \quad i > 2 \quad (2.161)$$

Din relațiile (2.160) și (2.161) rezultă că celelalte componente  $r_i$ , pentru  $i > 2$ , nu depind de ipotezele  $H_0$  sau  $H_1$ , respectiv de mesajul  $a_0$  sau  $a_1$  care a fost furnizat de sursa de informație, deci ele nu intervin în luarea deciziei.

Cu alte cuvinte, se poate scrie:

$$w(r_i | a_0) = w(r_i | a_1) = w(r_i), \quad i > 2 \quad (2.162)$$

În aceste condiții, coordonatele  $r_1$  și  $r_2$  sunt singurele purtătoare de informație, iar spațiul în care se iau deciziile devine un plan. Pentru a stabili frontiera (dreapta) care împarte planul în domeniile  $R_0$  și  $R_1$ , se consideră lipsa zgomotului, adică se impune  $n(t) = 0$  în relațiile (2.151), (2.153), (2.157), rezultând:  $\rho_0 = \rho_1 = 0$  și deci:

$$\left. \begin{aligned} (r_1 | a_0)_{n(t)=0} &= \rho\sqrt{E_0} \\ (r_1 | a_0)_{n(t)=0} &= \sqrt{(1-\rho^2)E_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.163)$$

$$\left. \begin{aligned} (r_1 | a_1)_{n(t)=0} &= \sqrt{E_1} \\ (r_1 | a_1)_{n(t)=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.164)$$

În planul  $(r_1, r_2)$ , cele două puncte A și B de coordonatele date de relațiile (2.163), respectiv (2.164), sunt reprezentate în Fig. 2.12.

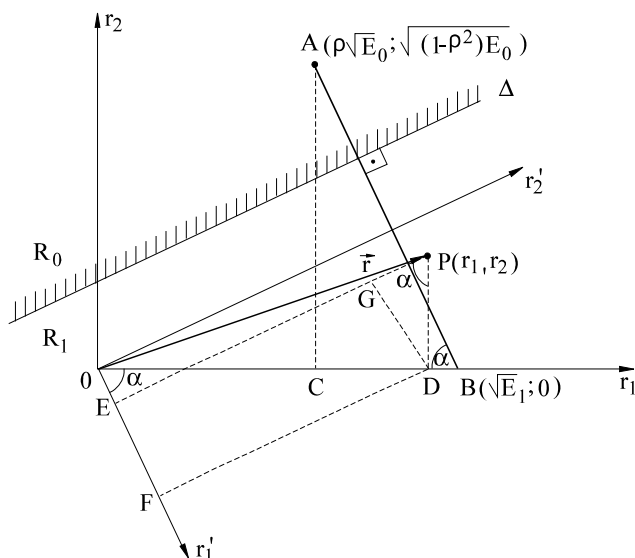


Fig. 2.12. Spațiul bidimensional în care se iau deciziile

Fie  $\alpha$  unghiul format de dreapta AB și axa  $Or_1$ . În lipsa perturbațiilor, conform relațiilor (2.163) și (2.164), punctul A se află în domeniul  $R_0$ , iar punctul B în domeniul  $R_1$ . Folosind oricare din criteriile analizate, rezultă că cele două domenii  $R_0$  și  $R_1$  se obțin prin separarea planului de dreapta  $\Delta$  dusă perpendicular pe segmentul AB, astfel încât punctul A să aparțină domeniului  $R_0$ , iar punctul B să aparțină domeniului  $R_1$ .

Fie P punctul reprezentativ al semnalului recepționat ( $\bar{r}$ ) în planul ( $r_1Or_2$ ). Pentru a obține o statistică suficientă, adică obținerea unei singure coordonate ( $l$ ) din valoarea căreia să se decidă care ipoteză este adevărată, se modifică sistemul de referință  $r_1Or_2$  în  $r_1'Or_2'$ , prin rotirea primului sistem de referință cu unghiul  $\alpha$ .

Așa cum se va arăta, proiecția punctului P pe axa  $Or_1'$  va determina:

$$OE \stackrel{not.}{=} l \quad (2.165)$$

care reprezintă statistica suficientă.

Într-adevăr, din Fig. 2.12 rezultă:

$$OE = OF - EF = OD \cos \alpha - PD \sin \alpha \quad (2.166)$$

Din relațiile (2.165) și (2.166), se poate scrie:

$$l = r_1 \cos \alpha - r_2 \sin \alpha \quad (2.167)$$

Dar:

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{OB - OC}{AB} = \frac{\sqrt{E_1} - \rho \sqrt{E_0}}{\sqrt{(\rho \sqrt{E_0} - \sqrt{E_1})^2 + (1 - \rho^2) E_0}} \quad (2.168)$$

Ținând cont de relațiile (2.141), (2.143) și (2.144), rezultă:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\rho \sqrt{E_0} - \sqrt{E_1})^2 + (1 - \rho^2) E_0 = \\ &\rho^2 E_0 - 2 \rho \sqrt{E_0 E_1} + E_1 + E_0 - \rho^2 E_0 = E_1 + E_0 - 2 \rho \sqrt{E_0 E_1} = \quad (2.169) \\ &\int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_0^2(t) dt - 2 \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt \end{aligned}$$

Notând:

$$s_1(t) - s_0(t) \stackrel{not.}{=} s(t), \quad \int_0^T s^2(t) dt \stackrel{not.}{=} E_s \quad (2.170)$$

relația (2.169) devine:

$$AB = \sqrt{E_s} \quad (2.171)$$

Cu (2.171), relația (2.168) se poate scrie sub forma:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{E_1} - \rho \sqrt{E_0}}{\sqrt{E_s}} \quad (2.172)$$

În mod similar, rezultă:

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{(1 - \rho^2) E_0}}{\sqrt{E_s}} \quad (2.173)$$

Înlocuind relațiile (2.148), (2.149), (2.172) și (2.173) în (2.167), rezultă:

$$l = \frac{\sqrt{E_1} - \rho \sqrt{E_0}}{\sqrt{E_s E_1}} \int_0^T r(t) s_1(t) dt - \frac{\sqrt{(1 - \rho^2) E_0}}{\sqrt{E_s}} \left[ \frac{1}{\sqrt{(1 - \rho^2) E_0}} \int_0^T r(t) s_0(t) dt - \frac{\rho}{\sqrt{(1 - \rho^2) E_1}} \int_0^T r(t) s_1(t) dt \right] = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T r(t) [s_1(t) - s_0(t)] dt \quad (2.174)$$

sau, dacă se ține cont de (2.170), rezultă relația finală pentru statistica suficientă:

$$l = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T r(t) s(t) dt \quad (2.175)$$

## 2.12. Determinarea raportului de plauzibilitate în cazul observării continue

Odată determinată statistica suficientă, conform relației (2.87), raportul de plauzibilitate se calculează cu relația:

$$\Lambda(l) = \frac{w(l | a_1)}{w(l | a_0)} \quad (2.176)$$

În ipoteza  $H_1$ , variabila aleatoare  $(l | a_1)$  se obține înlocuind (2.155) în relația (2.175), rezultând:

$$(l | a_1) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s(t) dt \quad (2.177)$$

În ipoteza  $H_0$ , variabila aleatoare  $(l | a_0)$  se obține înlocuind (2.150) în relația (2.175), rezultând:

$$(l | a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s(t) dt \quad (2.178)$$

Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni,  $n(t)$ , se consideră repartizat după o lege normală, cu valoare medie nulă, atunci din relațiile (2.177) și (2.178) rezultă că și legile de repartiție ale variabilelor  $(l | a_1)$  și  $(l | a_0)$  sunt tot normale, dar va trebui să se calculeze valorile medii statistice și dispersiile acestora.

Ținând cont de relația (2.177), rezultă:

$$\begin{aligned} m_1 \{ (l | a_1) \} &\stackrel{not.}{=} (\bar{l} | a_1) = m_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T [s_1(t) + \overline{n(t)}] s(t) dt = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_1(t) s(t) dt \end{aligned} \quad (2.179)$$

În mod analog, din (2.178) rezultă:

$$m_1 \{ (l | a_0) \} \stackrel{not.}{=} (\bar{l} | a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_0(t) s(t) dt \quad (2.180)$$

Dacă în relațiile (2.179) și (2.180) se ține cont de (2.141), (2.143), (2.144) și (2.170), acestea pot fi scrise sub următoarele forme echivalente:

$$\begin{aligned} (\bar{l} | a_1) &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_1(t) [s_1(t) - s_0(t)] dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \left[ \int_0^T s_1^2(t) dt - \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \right] = \frac{E_1 - \rho \sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \end{aligned} \quad (2.181)$$

Analog:

$$\begin{aligned}
(\bar{l} | a_0) &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_0(t) [s_1(t) - s_0(t)] dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \left[ \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt - \int_0^T s_0^2(t) dt \right] = \frac{\rho \sqrt{E_0 E_1} - E_0}{\sqrt{E_s}}
\end{aligned} \tag{2.182}$$

Notând cu  $D\{(l | a_1)\}$ , dispersia variabilei aleatoare  $(l | a_1)$ , rezultă:

$$\begin{aligned}
D\{(l | a_1)\} &= m_1 \left\{ \left[ (l | a_1) - (\bar{l} | a_1) \right]^2 \right\} = \\
&= m_1 \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s(t) dt - \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T s_1(t) s(t) dt \right]^2 \right\} = \tag{2.183} \\
&= \frac{1}{E_s} m_1 \left\{ \left[ \int_0^T n(t) s(t) dt \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

Din relația (2.183) se constată că dispersia  $D\{(l | a_1)\}$  nu depinde nici de semnalul  $s_1(t)$ , nici de semnalul  $s_0(t)$ , ci numai de diferența acestora, adică de  $s(t) = s_1(t) - s_0(t)$ .

Datorită acestei observații, rezultă că și dispersia variabilei aleatoare  $(l | a_0)$  se va determina tot cu relația (2.183), adică:

$$D\{(l | a_1)\} = D\{(l | a_0)\} = \frac{1}{E_s} m_1 \left\{ \left[ \int_0^T n(t) s(t) dt \right]^2 \right\} \tag{2.184}$$

Pentru a calcula efectiv dispersia dată de relația (2.184), se vor considera cele două cazuri care pot să apară în transmisiunile reale:

a) Zgomotul de pe canalul de transmisiuni poate fi considerat zgomot alb, având o densitate spectrală de putere  $S_0$ , constantă într-o bandă de cel puțin zece ori mai mare decât banda canalului respectiv;

b) Zgomotul de pe canalul de transmisiuni este cvasialb, adică are o densitate spectrală de putere  $S_0$ , constantă într-o bandă  $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$ , care nu este de cel puțin zece ori mai mare decât banda canalului.

În cazul a), înlocuind pătratul unei integrale cu produsul a două integrale identice, cu variabile de integrare distincte și ținând cont că funcția de autocorelație a zgomotului alb este proporțională cu distribuția Dirac, rezultă:

$$\begin{aligned}
 D\{ (I | a_1) \} &= D\{ (I | a_0) \} = \frac{1}{E_s} m_1 \left[ \int_0^T n(t) s(t) dt \int_0^T n(u) s(u) du \right] = \\
 &= \frac{1}{E_s} \int_0^T \int_0^T s(t) s(u) \overline{n(t) n(u)} dt du = \frac{S_0}{E_s} \int_0^T \int_0^T s(t) s(u) \delta(u-t) dt du = (2.185) \\
 &= \frac{S_0}{E_s} \int_0^T s^2(t) dt = S_0
 \end{aligned}$$

În cazul b), se consideră mai întâi un sistem liniar invariant în timp, caracterizat de funcția pondere  $h(t)$ , deocamdată necunoscută, al cărui răspuns, la momentul  $T$ , este:

$$y(T) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T n(t) s(t) dt \quad (2.186)$$

dacă în intervalul  $[0, T]$  la intrare se aplică zgomotul  $n(t)$ , așa cum este arătat în Fig. 2.13.

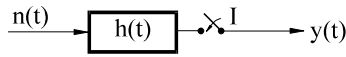


Fig. 2.13. Răspunsul filtrului adaptat la momentul  $t=T$

Înterupătorul  $I$  se consideră că se închide la momentul  $t=T$ .

Conform integralei de convoluție, se poate scrie:

$$y(t) = \int_0^t n(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.187)$$

La momentul  $t=T$  se impune condiția:

$$y(T) = \int_0^T n(\tau) h(T - \tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_0^T n(\tau) s(\tau) d\tau \quad (2.188)$$

Deoarece egalitatea trebuie să se mențină oricare ar fi intervalul T, relația (2.188) este adevărată, dacă este îndeplinită condiția:

$$h(T - \tau) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} s(\tau) \quad (2.189)$$

sau, efectuând schimbarea de variabilă:

$$T - \tau \stackrel{not.}{=} t \quad (2.190)$$

rezultă:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} s(T - t) \quad (2.191)$$

În literatura de specialitate, un sistem liniar invariant caracterizat de funcția pondere dată de relația (2.191) este cunoscut sub denumirea de *filtru adaptat* la forma particulară de semnal s(t). Funcția de transfer a acestui sistem liniar invariant este:

$$H(j\omega) = \mathfrak{T}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_{-\infty}^{\infty} s(T - t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.192)$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$T - t = \tau \quad ; \quad dt = -d\tau \quad (2.193)$$

rezultă:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega(T-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{e^{-j\omega T}}{\sqrt{E_s}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{E_s}} e^{-j\omega T} S(-j\omega) \end{aligned} \quad (2.194)$$

unde S(jω) este transformata Fourier a semnalului s(t).

Notând cu S<sub>nn</sub>(jω), densitatea spectrală de putere a zgomotului, adică:

$$S_{nn}(j\omega) = \begin{cases} S_0, & \text{pentru } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{pentru } |\omega| > \omega_0 \end{cases} \quad (2.195)$$



și cu  $S_{yy}(j\omega)$ , densitatea spectrală de putere la ieșirea filtrului adaptat, conform capitolului 1, rezultă structura din Fig. 2.14.

Deoarece zgomotul  $n(t)$  s-a presupus cu componentă continuă nulă, conform capitolului 1, se poate scrie:

$$D\{ (l | a_1) \} = D\{ (l | a_0) \} = m_1 \{ y^2(T) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(j\omega) d\omega \quad (2.196)$$

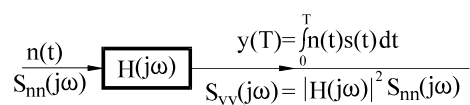


Fig. 2.14. Densitatea spectrală de putere  $S_{yy}(j\omega)$  la ieșirea unui sistem liniar invariant în timp

Ținând cont de (2.195), relația (2.196) devine:

$$D\{ (l | a_1) \} = D\{ (l | a_0) \} = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.197)$$

Pe de altă parte, conform relației (2.194), rezultă:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= H(j\omega) H(-j\omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_s}} e^{-j\omega T} S(-j\omega) \frac{1}{\sqrt{E_s}} e^{j\omega T} S(j\omega) = \frac{1}{E_s} |S(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (2.198)$$

Cu (2.198), rezultă că, în cazul zgomotului cvasialb, dispersia variabilelor aleatoare  $(l | a_1)$  și  $(l | a_0)$  se poate calcula cu relația:

$$D\{ (l | a) \} = D\{ (l | a_0) \} = \frac{S_0}{2\pi E_s} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.199)$$

Având în vedere valorile medii statistice date de relațiile (2.181) și (2.182) și dispersiile calculate cu relațiile (2.185) și (2.199), legile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $(l | a_1)$  și  $(l | a_0)$  sunt:

$$w(l | a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left( l - \frac{E_1 - \rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \right)^2} \quad (2.200)$$

$$w(l|a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left( l - \frac{\rho\sqrt{E_0 E_1 - E_0}}{\sqrt{E_s}} \right)^2} \quad (2.201)$$

unde

$$\sigma^2 = \begin{cases} S_0, & \text{în cazul zgomotului alb;} \\ \frac{S_0}{2\pi E_s} \int_{+\omega_0}^{\omega_0} |S(j\omega)|^2 d\omega, & \text{în cazul zgomotului cvasialb} \end{cases} \quad (2.202)$$

Raportul de plauzibilitate rezultă atunci înlocuind (2.200) și (2.201) în relația (2.176).

### 2.13. Implementarea receptorului în cazul observării continue

Din analiza diferitelor reguli de decizie între două alternative a rezultat că deciziile se iau în conformitate cu relația:

$$\Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K \quad (2.203)$$

unde pragul testului K ia valori funcție de criteriul de decizie adoptat.

Odată determinată statistica suficientă  $l$ , raportul de plauzibilitate  $\Lambda(\vec{r}) = \Lambda(l)$  poate fi calculat cu relația (2.176).

Înlocuind (2.200) și (2.201) în relația (2.176), rezultă:

$$\Lambda(l) = e^{\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \left( l - \frac{\rho\sqrt{E_0 E_1 - E_0}}{\sqrt{E_s}} \right)^2 - \left( l - \frac{E_1 - \rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \right)^2 \right]} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K \quad (2.204)$$

unde  $\sigma^2$  este dat de relația (2.202).

În scopul simplificării implementării receptorului, se logaritmează în baza  $e$  relația (2.204), rezultând:

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left( 2l - \frac{E_1 - E_0}{\sqrt{E_s}} \right) \left( \frac{E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln K \quad (2.205)$$

Ținând cont de (2.141), (2.143), (2.144) și (2.170), se poate scrie:

$$\begin{aligned} E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1} &= \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_0^2(t) dt - 2 \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt = \\ &= \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = \int_0^T s^2(t) dt = E_s \end{aligned} \quad (2.206)$$

Înlocuind (2.206) în (2.205), rezultă:

$$l \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{1}{\sqrt{E_s}} \left[ \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) \right] \quad (2.207)$$

Pe de altă parte, statistica suficientă,  $l$ , se determină cu (2.175).

Din (2.175) și (2.207) se poate scrie expresia generală pentru implementarea receptorului, de forma:

$$\int_0^T r(t) s(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) \quad (2.208)$$

Deoarece:

$$s(t) = s_1(t) - s_0(t) \quad (2.209)$$

structura receptorului care poate lua decizia între două alternative, în cazul observării continue, este dată în Fig. 2.15.

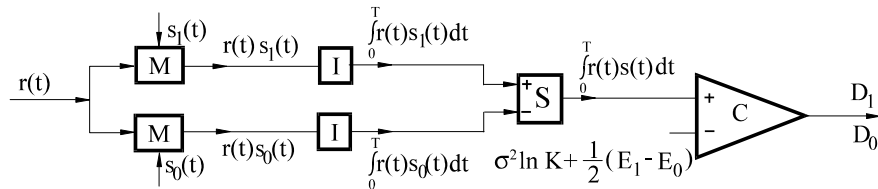


Fig. 2.15. Structura receptorului în cazul observării continue

Deoarece semnalele deterministe  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  sunt cunoscute ca formă la recepție, acestea pot fi generate local.

Din structura receptorului, prezentată în Fig. 2.15, rezultă că aceasta este formată din două multiplicatoare, (M), care realizează multiplicarea semnalului recepționat,  $r(t)$ , cu semnalele deterministe generate local,  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$ , două integratoare, (I), un sumator algebric, (S), și un comparator, (C).

În cazul în care comparatorul este circuitul integrat CLB-2711, dacă pe intrarea neinversoare se aplică o tensiune mai mare decât tensiunea corespunzătoare pragului  $\sigma^2 \ln K + (1/2)(E_1 - E_0)$ , atunci la ieșirea comparatorului va rezulta "1" logic, receptorul luând decizia  $D_1$ . Dacă tensiunea pe intrarea inversoare este mai mare decât tensiunea pe intrarea neinversoare, la ieșirea comparatorului va rezulta "0" logic, ceea ce va corespunde luării deciziei  $D_0$  de către receptor.

Un caz particular, frecvent întâlnit în aplicații, este acela când semnalele deterministe  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  sunt generate cu aceeași putere, respectiv pe intervalul de observare  $[0, T]$  au aceleași energii și se aplică criteriul plauzibilității maxime. În acest caz, se pot scrie relațiile:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = E_0 \\ K = 1 \Rightarrow \ln K = 0 \end{array} \right\} \quad (2.210)$$

Cu (2.210) și (2.209), relația (2.208) devine:

$$\int_0^T r(t) s_1(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \int_0^T r(t) s_0(t) dt \quad (2.211)$$

Structura receptorului implementat după relația (2.211) este dată în Fig. 2.16.

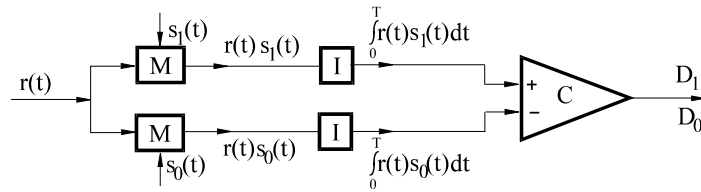


Fig. 2.16. Structura receptorului în cazul criteriului plauzibilității maxime și  $E_1=E_0$

Structura receptorului în cazul detectării unei ținte (avion, submarin, banc de pești, zăcământ etc.), aplicând criteriul plauzibilității maxime ( $K=1$ ), se obține din cazul general, observând că, atunci când există țintă, există semnal reflectat,  $s_1(t) \neq 0$ , în timp ce, în lipsa țintei nu există semnal reflectat, adică  $s_0(t)=0$ .

În acest caz:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_0^T s_1^2(t) dt \\
 E_0 &= \int_0^T s_0^2(t) dt = 0 \\
 K &= 1 \Rightarrow \ln K = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.212}$$

Cu (2.212) se poate scrie:

$$\int_0^T r(t) s_1(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{E_1}{2}
 \tag{2.213}$$

Conform relației (2.213), structura receptorului este dată în Fig. 2.17.

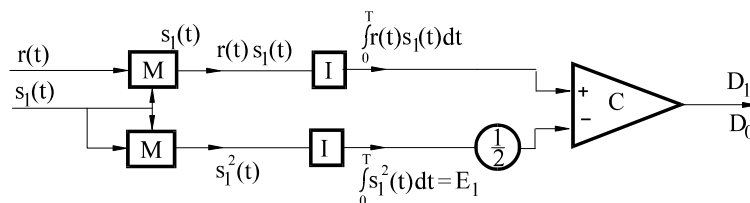


Fig. 2.17. Structura receptorului în detectarea unei ținte în cazul aplicării criteriului plauzibilității maxime

Comparând relațiile (2.114) cu (2.208) și ținând cont de (2.209), se observă că luarea deciziei în cazul observării continue se poate obține ușor din relația de calcul în cazul observării la momente de timp discrete, dacă suma din (2.114) se transformă într-o integrală și eșantioanele prelevate în cazul observării discrete,  $r_j$ ,  $s_{1j}$  și  $s_{0j}$ , devin semnalele  $r(t)$ ,  $s_1(t)$  respectiv  $s_0(t)$ .

## 2.14. Determinarea probabilităților deciziilor corecte și incorecte în cazul observării continue

În scopul determinării acestor probabilități se face notația:

$$\frac{1}{\sqrt{E_s}} \left[ \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) \right] \stackrel{not.}{=} K_1 \quad (2.214)$$

Cu notația (2.214), probabilitatea de pierdere se poate calcula cu relația:

$$P_m = P(D_0 | a_1) = \int_{-\infty}^{K_1} w(l | a_1) dl, \quad (2.215)$$

unde  $w(l | a_1)$  este dat de relația (2.200).

Probabilitatea detecției este:

$$P_d = 1 - P_m \quad (2.216)$$

Probabilitatea de a se lua decizia  $D_0$  când sursa a furnizat mesajul  $a_0$  se determină după cum urmează:

$$P(D_0 | a_0) = \int_{-\infty}^{K_1} w(l | a_0) dl, \quad (2.217)$$

unde  $w(l | a_0)$  este dat de (2.201).

În fine, probabilitatea alarmei false se deduce din relația:

$$P_f = P(D_1 | a_0) = 1 - P(D_0 | a_0) \quad (2.218)$$

Înlocuind (2.200) în (2.215), rezultă:

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{K_1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left( l - \frac{E_1 - \rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \right)^2} dl \quad (2.219)$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\frac{1}{\sigma} \left( l - \frac{E_1 - \rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \right) = u; dl = \sigma du, \quad (2.220)$$

limita superioară a integralei din relația (2.219) devine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \left( K_1 - \frac{E_1 - \rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sqrt{E_s}} \right) &= \frac{\sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) - E_1 + \rho\sqrt{E_0 E_1}}{\sigma\sqrt{E_s}} = \\ &= \frac{\sigma^2 \ln K - \frac{1}{2} (E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1})}{\sigma\sqrt{E_s}} = \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} - \frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s}^{not.} = x, \end{aligned} \quad (2.221)$$

deoarece, conform relației (2.206):

$$E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1} = E_s \quad (2.222)$$

Ținând cont de (2.220), (2.221) și (1.57), din relația (2.219) se poate calcula probabilitatea de pierdere utilizând funcția Laplace,  $F(x)$ , după cum urmează:

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = F(x) - F(-\infty) = F \left[ \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} - \frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s} \right] \quad (2.223)$$

În mod analog, probabilitatea  $P(D_0 | a_0)$  se determină înlocuind (2.201) în relația (2.217):

$$P(D_0 | a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{K_1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left( l - \frac{\rho\sqrt{E_0 E_1} - E_0}{\sqrt{E_s}} \right)^2} dl \quad (2.224)$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\frac{1}{\sigma} \left( l - \frac{\rho\sqrt{E_0 E_1} - E_0}{\sqrt{E_s}} \right) = v; dl = \sigma dv, \quad (2.225)$$

limita superioară a integralei din relația (2.224) devine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \left( K_1 - \frac{\rho \sqrt{E_0 E_1} - E_0}{\sqrt{E_s}} \right) &= \frac{\sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) - \rho \sqrt{E_0 E_1} + E_0}{\sigma \sqrt{E_s}} = \\ &= \frac{\sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} (E_1 + E_0 - 2 \rho \sqrt{E_0 E_1})}{\sigma \sqrt{E_s}} = \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} + \frac{1}{2 \sigma} \sqrt{E_s} = y \end{aligned} \quad (2.226)$$

Cu (2.225), (2.226) și (1.73), din relația (2.224) se poate calcula  $P(D_0 | a_0)$  utilizând funcția Laplace, după cum urmează:

$$\begin{aligned} P(D_0 | a_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2}} dv = F(y) - F(-\infty) = \\ &= F \left[ \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} + \frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s} \right] \end{aligned} \quad (2.227)$$

Odată determinate probabilitățile  $P_m$  și  $P(D_0 | a_0)$ , probabilitățile  $P_d$  și  $P_f$  se deduc cu relațiile (2.216), respectiv (2.218).

Probabilitatea medie în luarea unei decizii incorecte de către receptor,  $P(\varepsilon)$ , va depinde, evident, de probabilitățile deciziilor eronate,  $P_f$  și  $P_m$ , ponderate cu probabilitățile cu care sursa de informație furnizează mesajele  $a_0$  și  $a_1$ , adică  $p(a_0)$ , respectiv  $p(a_1)$ .

Cu alte cuvinte, se poate spune că probabilitatea medie de luare a deciziilor eronate de receptor se poate calcula cu relația:

$$P(\varepsilon) = p(a_0) P_f + p(a_1) P_m \quad (2.228)$$

Comparând relațiile (2.132) și (2.134) cu (2.223), respectiv (2.227), rezultă că, în cazul observării continue, probabilitățile deciziilor corecte și incorecte se pot ușor deduce din probabilitățile obținute în cazul observării la momente discrete de timp, dacă sumele se transformă în integrale, iar eșantioanele  $s_{ij}$  și  $s_{0j}$  sunt înlocuite prin semnalele  $s_1(t)$ , respectiv  $s_0(t)$ .



## 2.15. Detecția secvențială. Testul lui Wald

Detecția prezenței semnalelor înecate în zgomot durează de obicei atât timp cât sunt furnizate mesajele  $a_0$ , respectiv  $a_1$  de sursa de informație.

În multe cazuri se poate scurta durata necesară luării deciziei prin reducerea numărului de eșantioane prelevate din semnalul recepționat. Pentru a beneficia de acest avantaj, este necesar un al doilea canal (de performanțe reduse), prin care să se transmită emițătorului că receptorul a putut lua decizia și, deci, se poate trece la generarea altui semnal.

Esența detecției secvențiale constă în calculul raportului de plauzibilitate după fiecare eșantion recepționat și încercarea luării deciziei pe parcursul furnizării mesajelor  $a_0$  sau  $a_1$ . Testul care se utilizează este denumit *testul lui Wald*.

Pentru fixarea ideilor, se presupune că timpul de furnizare al mesajelor  $a_0$  sau  $a_1$  este  $T$ . Dacă  $T_0$  este perioada de eșantionare, s-ar preleva din semnalul recepționat eșantioanele  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , așa cum este arătat în Fig. 2.18.

În cazul detecției secvențiale, se pune problema dacă nu se poate lua decizia într-un interval mai mic decât  $T$ .

Pentru aceasta se încearcă să se ia decizia după un număr mai mic de eșantioane, de exemplu după  $m < N$  eșantioane. Cele  $m$  eșantioane,  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , pot fi considerate componentele vectorului  $\vec{r}_m$ , adică:

$$\vec{r}_m = (r_1, r_2, \dots, r_m) \quad (2.229)$$

Dacă după cele  $m$  eșantioane nu se poate lua decizia, se continuă cu recepționarea următorului eșantion și procedeul continuă până la luarea deciziei.

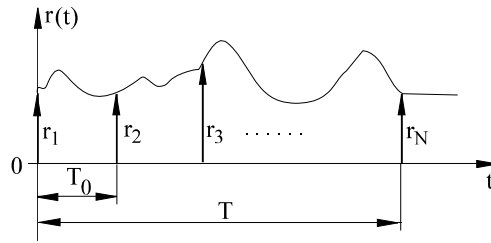


Fig. 2.18. Eșantionarea semnalului recepționat  $r(t)$

Geometric, acest proces revine la a împărți spațiul semnalului recepționat în trei domenii, care pentru cazul tridimensional se reprezintă în Fig. 2.19.

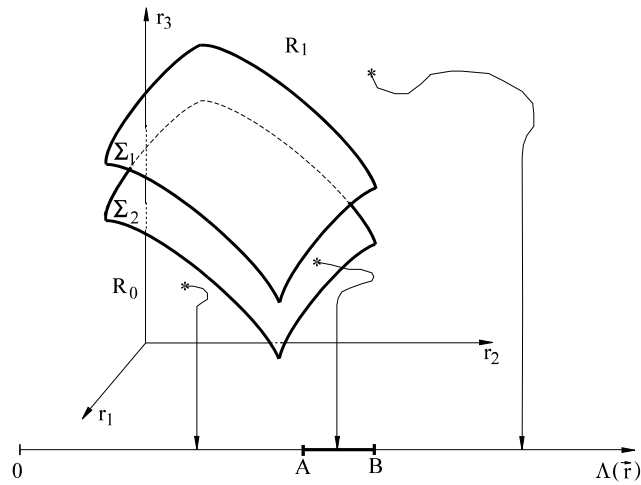


Fig. 2.19. Partiționarea spațiului tridimensional în trei domenii prin suprafețele  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$

Dacă punctul reprezentativ al semnalului recepționat  $\vec{r}_m$  aparține domeniului  $R_0$ , se ia decizia  $D_0$ , ceea ce corespunde realizării condiției:

$$\Lambda(\vec{r}_m) \leq A \quad (2.230)$$

Dacă punctul reprezentativ al semnalului recepționat  $\vec{r}_m$  aparține domeniului  $R_1$ , se ia decizia  $D_1$ , ceea ce corespunde realizării condiției:

$$\Lambda(\vec{r}_m) \geq B \quad (2.231)$$

În cazul că punctul reprezentativ al semnalului recepționat  $\vec{r}_m$  se află între cele două suprafețe  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$ , nu se poate lua nici o decizie, ceea ce corespunde condiției:

$$A < \Lambda(\vec{r}_m) < B \quad (2.232)$$

În ultimul caz se continuă testarea cu următorul vector  $\vec{r}_{m+1}$ , analiza decurgând în mod analog, până se poate lua decizia.

Pragurile  $A$  și  $B$  determină precizia și timpul în luarea deciziei. Acestea se pot exprima în funcție de probabilitatea de pierdere  $P_m$  și probabilitatea alarmei false,  $P_f$ .

Într-adevăr, ținând cont de (2.31), (2.230) și (2.231), se poate scrie:

$$w(\vec{r}_m | a_1) \geq B w(\vec{r}_m | a_0) \quad (2.233)$$

când se ia decizia  $D_1$  și:

$$w(\vec{r}_m | a_1) \leq A w(\vec{r}_m | a_0) \quad (2.234)$$

când se ia decizia  $D_0$ .

Integrând relația (2.233) pe domeniul  $R_1$ , rezultă:

$$\int_{R_1} w(\vec{r}_m | a_1) dV \geq B \int_{R_1} w(\vec{r}_m | a_0) dV \quad (2.235)$$

sau, ținând cont de relațiile (2.52) și (2.54), se poate scrie echivalent:

$$P_d \geq B P_f \quad (2.236)$$

Deoarece  $P_d = 1 - P_m$ , rezultă marginea superioară a pragului  $B$ , adică:

$$B \leq \frac{1 - P_m}{P_f} \quad (2.237)$$

Integrând relația (2.234) pe domeniul  $R_0$ , rezultă:

$$\int_{R_0} w(\vec{r}_m | a_1) dV \leq A \int_{R_0} w(\vec{r}_m | a_0) dV \quad (2.238)$$

sau, ținând cont de relațiile (2.53), (2.54) și (2.122), rezultă marginea inferioară a pragului A, adică:

$$A \geq \frac{P_m}{1 - P_f} \quad (2.239)$$

## 2.16. Detecția secvențială a unui semnal rectangular, determinist

Se presupune că, atunci când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , emițătorul generează un impuls rectangular de amplitudine cunoscută  $a$ , iar când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , emițătorul generează un impuls rectangular de amplitudine nulă. Zgomotul ce se suprapune peste semnalul util transmis se presupune alb, repartizat normal, cu valoarea medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ , adică de forma:

$$w_1(n_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n_j^2}{2\sigma^2}} \quad (2.240)$$

Un eșantion oarecare  $r_j$ , în ipoteza  $H_0$ , va fi de forma:

$$r_j = n_j \quad (2.241)$$

iar în ipoteza  $H_1$ , de forma:

$$r_j = n_j + a \quad (2.242)$$

Zgomotul fiind statistic independent de semnalul util transmis, rezultă că în cazul ipotezei  $H_1$ :

$$(\bar{r}_j | a_1) = \bar{n}_j + a = a \quad (2.243)$$

și dispersia:

$$\begin{aligned}
D\{(r_j | a_1)\} &= m_1 \left\{ \left[ (r_j | a_1) - (\bar{r}_j | a_1) \right]^2 \right\} = \\
&= m_1 \left\{ (n_j + a - a)^2 \right\} = \bar{n}_j^2 = \sigma^2
\end{aligned} \tag{2.244}$$

Deoarece  $(\bar{r}_j | a_1) = 0$  și  $D\{(r_j | a_1)\} = \sigma^2$ , rezultă în cazul ipotezei  $H_0$ :

$$w_1(r_j | a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r_j^2}{2\sigma^2}}, \quad r_j = n_j \tag{2.245}$$

iar în cazul ipotezei  $H_1$ :

$$w_1(r_j | a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_j - a)^2} \tag{2.246}$$

După  $m$  eșantioane, extrase până în momentul în care se poate lua o decizie, raportul de plauzibilitate se calculează cu relația:

$$\Lambda(\vec{r}_m) = \frac{\prod_{j=1}^m w_1(r_j | a_1)}{\prod_{j=1}^m w_1(r_j | a_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^m (r_j - a)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^m r_j^2}} = e^{-\frac{m a^2 + a \sum_{j=1}^m r_j}{2\sigma^2}} \tag{2.247}$$

Decizia  $D_1$  se ia conform relației (2.233), dacă  $\Lambda(\vec{r}_m) \geq B$  sau, echivalent:

$$\ln \Lambda(\vec{r}_m) = -\frac{m a^2}{2\sigma^2} + \frac{a}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m r_j \geq \ln B, \tag{2.248}$$

ceea ce permite să se scrie:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m r_j \stackrel{not.}{=} (z | a_1) \geq \frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln B + \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma} \stackrel{not.}{=} \mu_M \tag{2.249}$$

Decizia  $D_0$  se ia conform relației (2.234), dacă  $\Lambda(\vec{r}_m) \leq A$  sau, echivalent:

$$\ln \Lambda(\vec{r}_m) = -\frac{m a^2}{2\sigma^2} + \frac{a}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m r_j \leq \ln A \tag{2.250}$$

ceea ce permite să se scrie:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m r_j \stackrel{not.}{=} (z | a_0) \leq \frac{\sigma}{a \sqrt{m}} \ln A + \frac{a \sqrt{m}}{2 \sigma} \stackrel{not.}{=} \mu_m \quad (2.251)$$

Cu notațiile (2.249) sau (2.251), rezultă că în ipoteza  $H_1$  variabila  $z$  este repartizată normal, cu valoarea medie:

$$(\bar{z} | a_1) = m_1 \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (a + n_j) \right\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (a + \bar{n}_j) = \frac{a \sqrt{m}}{\sigma} \quad (2.252)$$

iar în ipoteza  $H_0$ :

$$(\bar{z} | a_0) = m_1 \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m n_j \right\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \bar{n}_j = 0 \quad (2.253)$$

În ambele ipoteze,  $H_1$  și  $H_0$ , variabila  $z$  are dispersia egală cu unitatea.

Într-adevăr, în ipoteza  $H_1$ :

$$D \{ (z | a_1) \} = m_1 \left\{ \left[ (z | a_1) - (\bar{z} | a_1) \right]^2 \right\} = m_1 \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (a + n_j) - \frac{a \sqrt{m}}{\sigma} \right]^2 \right\} = m_1 \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m n_j \right]^2 \right\} \quad (2.254)$$

În pătratul sumei din relația (2.254) apar termeni de forma  $n_j^2$ , a căror valoare medie este  $\overline{n_j^2} = \sigma^2$  și, deci:

$$m_1 \left\{ \sum_{j=1}^m n_j^2 \right\} = \sum_{j=1}^m \overline{n_j^2} = m \sigma^2 \quad (2.255)$$

și termeni de forma  $2n_i n_j$ ,  $i \neq j$ , a căror valoare medie este:

$$2 m_1 \left\{ n_i n_j \right\} = 2 \overline{n_i n_j} = 2 \bar{n}_i \bar{n}_j = 0 \quad (2.256)$$

Cu (2.255) și (2.256), relația (2.254) devine:

$$D \{ (z | a_1) \} = \frac{1}{\sigma^2 m} m \sigma^2 = 1 \quad (2.257)$$

În mod analog, rezultă:

$$D \{ (z | a_0) \} = m_1 \left\{ \left[ (z | a_0) - (\bar{z} | a_0) \right]^2 \right\} =$$

$$m_1 \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma \sqrt{m}} \sum_{j=1}^m n_j \right]^2 \right\} = 1 \quad (2.258)$$

Deci:

$$w(z | a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( z - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma} \right)^2} \quad (2.259)$$

$$w(z | a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (2.260)$$

Probabilitatea deciziei corecte  $P(D_0 | a_0)$  se obține integrând densitatea de probabilitate  $w(z | a_0)$  pe domeniul  $-\infty < z \leq \mu_m$ , adică:

$$P(D_0 | a_0) = \int_{-\infty}^{\mu_m} w(z | a_0) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu_m} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(\mu_m)$$

$$= F \left( \frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln A + \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma} \right) \quad (2.261)$$

unde  $F(\cdot)$  este funcția Laplace (1.57). La aceeași relație se poate ajunge dacă în relația (2.134) se consideră  $s_{1j}=a$ ,  $s_{0j}=0$ ,  $N=m$  și  $K=A$ .

Probabilitatea alarmei false  $P_f=P(D_1 | a_0)$  se poate deduce integrând aceeași densitate de probabilitate  $w(z | a_0)$  pe domeniul  $\mu_M \leq z < \infty$ , adică:

$$P_f = P(D_1 | a_0) = \int_{\mu_M}^{\infty} w(z | a_0) dz = \int_{-\infty}^{\infty} w(z | a_0) dz - \int_{-\infty}^{\mu_M} w(z | a_0) dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu_M} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - F(\mu_M) = 1 - F \left( \frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln B + \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma} \right) \quad (2.262)$$

Probabilitatea detecției  $P_d=P(D_1 | a_1)$  se poate deduce integrând densitatea de probabilitate  $w(z | a_1)$  pe domeniul  $\mu_M \leq z < \infty$ , adică:

$$\begin{aligned}
P_d &= P(D_1 | a_1) = \int_{\mu_M}^{\infty} w(z | a_1) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(z | a_1) dz - \int_{-\infty}^{\mu_M} w(z | a_1) dz = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu_M} e^{-\frac{1}{2}\left(z - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}\right)^2} dz
\end{aligned} \tag{2.263}$$

Efetuând schimbarea de variabilă:

$$z - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma} = u ; dz = du \tag{2.264}$$

limita superioară a integralei din relația (2.263) devine  $\mu_M - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}$ , iar probabilitatea detecției se poate calcula folosind funcția Laplace, adică:

$$P_d = 1 - F\left(\mu_M - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln B - \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma}\right) \tag{2.265}$$

În fine, probabilitatea de pierdere  $P_m = P(D_0 | a_1)$  se poate obține integrând densitatea de probabilitate  $w(z | a_1)$  pe domeniul  $-\infty < z \leq \mu_m$ , adică:

$$P_m = P(D_0 | a_1) = \int_{-\infty}^{\mu_m} w(z | a_1) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu_m} e^{-\frac{1}{2}\left(z - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}\right)^2} dz \tag{2.266}$$

Cu aceeași schimbare de variabilă (2.264), limita superioară a integralei din relația (2.266) devine  $\mu_m - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}$ , iar probabilitatea de pierdere se poate calcula folosind funcția Laplace, adică:

$$P_m = P(D_0 | a_1) = F\left(\mu_m - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}\right) = F\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln A - \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma}\right) \tag{2.267}$$

La aceeași relație se poate ajunge dacă în relația (2.132) se consideră  $s_{1j}=a$ ,  $s_{0j}=0$ ,  $N=m$  și  $K=A$ .

În Fig. 2.20 s-au trasat densitățile de probabilitate  $w(z | a_0)$  și



$w(z|a_1)$ , s-au fixat pragurile  $\mu_m$  și  $\mu_M$  și s-au hașurat, în diverse moduri, suprafețele proporționale cu probabilitățile calculate mai sus.

În acest caz rezultă evident că:

$$p(D_0|a_0) + p(D_1|a_0) < 1 \quad (2.268)$$

ceea ce înseamnă că, dacă se notează cu  $p(D|a_0)$  probabilitatea de a nu se putea lua decizie la furnizarea mesajului  $a_0$ , se poate scrie relația:

$$P(D_0|a_0) + P(D_1|a_0) + P(D|a_0) = 1 \quad (2.269)$$

Ținând cont de (2.261) și (2.262), din relația (2.269) rezultă:

$$P(D|a_0) = F\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln B + \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma}\right) - F\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln A + \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma}\right) \quad (2.270)$$

În mod analog, se poate scrie:

$$P(D_0|a_1) + p(D_1|a_1) + p(D|a_1) = 1 \quad (2.271)$$

unde prin  $p(D|a_1)$  s-a notat probabilitatea de a nu se putea lua decizie la furnizarea mesajului  $a_1$ .

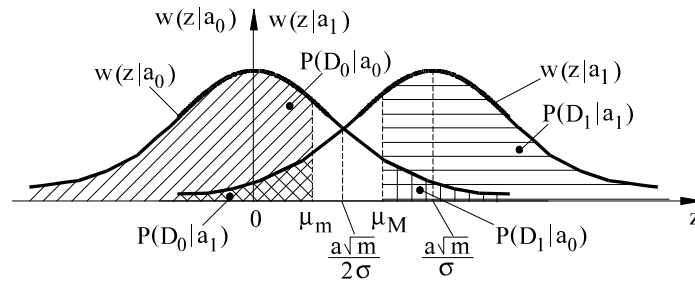


Fig. 2.20. Reprezentarea geometrică a probabilităților deciziilor corecte și incorecte în cazul detecției secvențiale a unui semnal cunoscut

Ținând cont de (2.265) și (2.267), din relația (2.271) rezultă:

$$p(D|a_1) = F\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln B - \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma}\right) - F\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln A - \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma}\right) \quad (2.272)$$

Curbele corespunzătoare densităților de probabilitate  $w(z|a_0)$  și  $w(z|a_1)$  se intersectează în punctul  $z=z_1$ , ce poate fi determinat din

condiția:

$$e^{-\frac{z_1^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\left(z_1 - \frac{a\sqrt{m}}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow z_1 = \frac{a\sqrt{m}}{2\sigma} \quad (2.273)$$

Pe de altă parte, se poate calcula ușor că:

$$\mu_M - \mu_m = \frac{\sigma}{a\sqrt{m}} \ln \frac{B}{A} \quad (2.274)$$

ceea ce înseamnă că, odată cu creșterea numărului eșantioanelor prelevate,  $m$ , din semnalul recepționat, intervalul imposibilității luării deciziei scade, scăzând astfel și probabilitățile  $p(D | a_0)$  și  $p(D | a_1)$ .

Cu alte cuvinte, pe măsură ce numărul eșantioanelor prelevate din semnalul recepționat crește, crește și probabilitatea luării unei decizii corecte, deci procesul în luarea deciziei corecte în cazul detecției secvențiale este convergent.

### 2.17. Detecția prezenței semnalului între mai multe alternative

În acest caz, sursa de informație este caracterizată de distribuția:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{M-1} \\ p(a_0) & p(a_1) & \dots & p(a_{M-1}) \end{pmatrix} \quad (2.275)$$

Emitătorul va genera semnalele  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ , ...,  $s_{M-1}(t)$  atunci când sursa de informație va furniza mesajele  $a_0$ ,  $a_1$ , respectiv  $a_{M-1}$ .

La ieșirea canalului de transmisiuni se recepționează semnalul:

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2.276)$$

unde  $n(t)$  este zgomotul de pe canal, presupus și în acest caz aditiv.

În urma eșantionării semnalului recepționat (observării acestuia la momente discrete de timp), relația (2.276) se poate scrie sub formă vectorială, adică:

$$\vec{r} = \vec{s}_i + \vec{n} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2.277)$$

Semnalele  $s_i(t)$  sunt cunoscute ca formă la recepție, dar deoarece acestea, în cazul cel mai defavorabil, sunt înecate în zgomot, nu se poate decide prin nici o metodă clasică deterministă care semnal din cele  $M$  posibile este prezent în semnalul recepționat.

Notând și în acest caz cu  $C_{ij}$  costurile deciziilor și cu  $p(D_i \cap a_j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ , probabilitățile intersecției evenimentului de a se lua decizia  $D_i$  și a furnizării mesajului  $a_j$ , adică probabilitățile costurilor  $C_{ij}$ , rezultă expresia costului mediu, numit și în acest caz risc:

$$R = \bar{C}_{ij} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} p(D_i \cap a_j) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} p(a_j) p(D_i | a_j) \quad (2.278)$$

Relația (2.278) este o generalizare a relației (2.14), prin care s-a dedus expresia riscului în cazul particular al luării deciziei între două alternative.

În cazul luării deciziei între  $M$  alternative, spațiul semnalului recepționat se partiționează în  $M$  domenii,  $R_0, R_1, \dots, R_{M-1}$ , luându-se decizia  $D_i$ , când punctul reprezentativ al semnalului recepționat aparține domeniului  $R_i$ .

Ca și în paragraful 2.3, se poate stabili relația:

$$p(D_i | a_j) = \int_{R_i} w(\vec{r} | a_j) dV \quad (2.279)$$

unde  $w(\vec{r} | a_j)$  reprezintă densitatea de probabilitate a semnalului recepționat condiționată de mesajul  $a_j$ . Analog procedului de minimizare a riscului folosit în cazul detecției prezenței semnalului între două alternative, și în acest caz general se pun în evidență rapoartele de plauzibilitate de forma:

$$\Lambda_{ij}(\vec{r}) = \frac{w(\vec{r} | a_i)}{w(\vec{r} | a_j)}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M - 1; i \neq j \quad (2.280)$$

Spre deosebire de cazul luării deciziei între două alternative,

când exista un singur raport de plauzibilitate care putea lua valori pe axa reală pozitivă, în cazul luării deciziei între M alternative vor exista:

$$C_M^2 = \frac{M!}{2! (M-2)!} \quad (2.281)$$

rapoarte de plauzibilitate, ale căror valori vor ocupa un domeniu.

În cazul generalizării criteriului plauzibilității maxime (paragraful 2.5) pentru M alternative, se va considera că sursa a furnizat mesajul  $a_i$ , dacă:

$$\Lambda_{ij}(\vec{r}) = \frac{w(\vec{r}|a_i)}{w(\vec{r}|a_j)} > 1 \quad (2.282)$$

pentru orice  $i \neq j$ .

Presupunând că zgomotul de pe canal se poate considera alb, fiind repartizat după o lege normală, cu valoarea medie nulă și dispersia  $\sigma^2$ , relația (2.282) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\vec{r}-\vec{s}_i)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\vec{r}-\vec{s}_j)^2}} > 1, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.283)$$

Logaritmând în bază e, relația (2.283) devine:

$$(\vec{r} - \vec{s}_i)^2 - (\vec{r} - \vec{s}_j)^2 > 0, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.284)$$

Un caz particular, frecvent întâlnit în aplicații, este acela pentru care semnalele generate de emițător au energii egale, adică:

$$(\vec{s}_i)^2 = (\vec{s}_j)^2 = \int_0^T s_i^2(t) dt = \int_0^T s_j^2(t) dt = E \quad (2.285)$$

unde prin T s-a notat intervalul de observare a semnalului recepționat, iar prin E energia fiecărui semnal generat de emițător.

Ținând cont de (2.285), relația (2.284) devine:

$$\vec{r}\vec{s}_i > \vec{r}\vec{s}_j > 0, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.286)$$

sau, echivalent:

$$\int_0^T r(t)s_i(t)dt > \int_0^T r(t)s_j(t)dt, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.287)$$

Cu alte cuvinte, atunci când este satisfăcută relația (2.287), se va decide că în semnalul recepționat este prezent semnalul  $s_i(t)$ . Schema receptorului, implementat conform relației (2.287), este dată în Fig. 2.21.

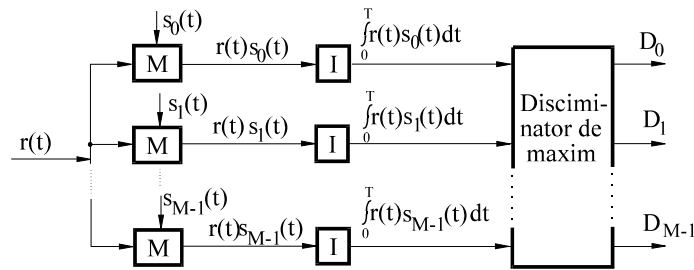


Fig. 2.21. Schema receptorului în cazul detecției prezenței semnalului între M alternative

O interpretare geometrică intuitivă a relației (2.284) este dată în Fig. 2.22.

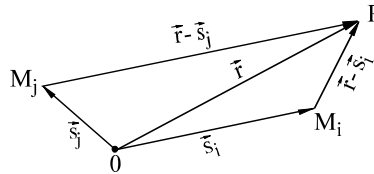


Fig. 2.22. Reprezentarea vectorială a criteriului plauzibilității maxime între M alternative

Conform Fig. 2.22 și relației (2.284), se poate scrie echivalent:

$$(M_j P)^2 > (M_i P)^2, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.288)$$

Din relația (2.288) rezultă echivalența dintre criteriul plauzibilității maxime și criteriul distanței minime.

Cu alte cuvinte, deoarece semnalele  $s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)$  sunt

cunoscute, punctele reprezentative ale vectorilor corespunzători  $\vec{s}_0$ ,  $\vec{s}_1$ , respectiv  $\vec{s}_{M-1}$  sunt cunoscute. De asemenea, este cunoscut punctul reprezentativ al semnalului recepționat  $\vec{r}$ . Conform acestui criteriu, se va decide că în semnalul recepționat este prezent acel semnal care are punctul reprezentativ cel mai apropiat de punctul reprezentativ al semnalului recepționat.

O altă interpretare geometrică se poate da relației (2.286), dacă se notează cu  $\theta_i$  unghiul dintre vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{s}_i$  și cu  $\theta_j$  unghiul dintre vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{s}_j$ . În acest caz, relația (2.286) se poate scrie, echivalent, sub forma:

$$\|\vec{r}\| \|\vec{s}_i\| \cos \theta_i > \|\vec{r}\| \|\vec{s}_j\| \cos \theta_j, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.289)$$

unde prin  $\|\bullet\|$  s-a notat norma vectorului respectiv.

Deoarece:

$$\|\vec{s}_i\| = \|\vec{s}_j\| \quad (2.290)$$

semnalele fiind presupuse a fi generate pe intervalul de observare  $[0, T]$  cu aceleași energii, rezultă din (2.289) și (2.290) relația:

$$\theta_i < \theta_j, \quad (\forall) i \neq j \quad (2.291)$$

În felul acesta, criteriul plauzibilității maxime între mai multe alternative s-a redus la un criteriu de unghi minim.

## 2.18. Probleme rezolvate

1. Fie o sursă de informație caracterizată de distribuția:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ p(a_0) & p(a_1) \end{pmatrix}$$

Când sursa S furnizează mesajul  $a_1$ , emițătorul generează un impuls rectangular de amplitudine  $A$ , iar când furnizează mesajul  $a_0$ , un impuls rectangular de amplitudine  $B < A$ . Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni este staționar, alb, repartizat după o lege normală cu valoare medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ , se cere, în cazul observării la momente de timp discrete:

- relația de decizie în cazul riscului minim;
- legile de repartiție a statisticii suficiente;
- probabilitățile deciziilor corecte și incorecte;
- să se particularizeze punctele a) și c) în cazul criteriului plauzibilității maxime.

*Soluție*

a) Particularizând relația (2.114), rezultă:

$$\sum_{j=1}^N r_j (A - B) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 \ln K + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (A^2 - B^2) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^N r_j \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{A - B} \ln K + \frac{N(A + B)}{2}$$

b) Statistica sufficientă este în acest caz:

$$\sum_{j=1}^N r_j = l$$

$$(l | a_1) = \sum_{j=1}^N (n_j + A) \quad ; \quad (l | a_0) = \sum_{j=1}^N (n_j + B) ;$$

$$(\bar{l} | a_1) = m_1 \left\{ \sum_{j=1}^N (n_j + A) \right\} = \sum_{j=1}^N (\bar{n}_j + A) = NA ;$$

$$(\bar{l} | a_0) = m_1 \left\{ \sum_{j=1}^N (n_j + B) \right\} = NB$$

$$D\{ (l | a_1) \} = m_1 \left\{ \left[ (l | a_1) - (\bar{l} | a_1) \right]^2 \right\} = m_1 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N (n_j + A) - NA \right]^2 \right\}$$

$$= m_1 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N n_j \right]^2 \right\} = \sum_{j=1}^N \overline{n_j^2} = N \sigma^2$$

deoarece în  $\left( \sum_{j=1}^N n_j \right)^2$  vor interveni termeni de forma  $n_j^2$  și termeni

de forma  $2n_j n_i$ ,  $i \neq j$ . iar  $2 \overline{n_j n_i} = 2 \overline{n_j} \overline{n_i} = 0$ .

Analog:

$$D\{ (l | a_0) \} = N \sigma^2$$

Rezultă atunci:

$$w(l | a_1) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi N \sigma}} e^{-\frac{(l-NA)^2}{2N\sigma^2}}$$

$$w(l | a_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi N \sigma}} e^{-\frac{(l-NB)^2}{2N\sigma^2}}$$

c) Conform relației (2.132), rezultă:

$$P_m = P(D_0 | a_1) = F \left( \frac{\frac{\sigma \ln K}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (A-B)^2}} - \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\sum_{j=1}^N (A-B)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (A-B)^2}} \right) =$$

$$F \left[ \frac{\sigma \ln K}{(A-B)\sqrt{N}} - \frac{(A-B)\sqrt{N}}{2\sigma} \right]$$

Conform relației (2.134), rezultă:

$$P(D_0 | a_0) = F \left[ \frac{\sigma \ln K}{(A-B)\sqrt{N}} + \frac{(A-B)\sqrt{N}}{2\sigma} \right]$$

$$P_d = P(D_1 | a_1) = 1 - P_m \quad ; \quad P_f = P(D_1 | a_0) = 1 - P(D_0 | a_0)$$



d)  $K=1 \Rightarrow \ln K=0$

$$P_m = F \left[ -\frac{(A-B)\sqrt{N}}{2\sigma} \right] = 1 - F \left[ \frac{(A-B)\sqrt{N}}{2\sigma} \right]$$

$$\sum_{j=1}^N r_j \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N(A+B)}{2}$$

$$P(D_0|a_0) = F \left[ \frac{(A-B)\sqrt{N}}{2\sigma} \right]$$

2. O sursă discretă de informație furnizează mesajele  $a_0$  și  $a_1$  echiprobabil. Când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , emițătorul generează un impuls rectangular de amplitudine egală cu 1V, iar când sursa furnizează mesajul  $a_1$ , emițătorul generează un impuls rectangular de amplitudine egală cu 1,1V. Considerând costurile deciziilor eronate egale și diferite de zero, iar costurile deciziilor corecte egale cu zero, să se decidă care mesaj a fost transmis, dacă în intervalul de observare s-au prelevat eșantioanele:  $r_1 = 2 \text{ V}$ ;  $r_2 = -0,4\text{V}$ ;  $r_3 = 3\text{V}$ ;  $r_4 = -0.5\text{V}$ .

### Soluție

Conform relației (2.32), rezultă  $K=1$ , deci  $\ln K=0$ . Din contextul problemei rezultă că  $N=4$  (s-au prelevat patru eșantioane), așa încât relația generală (2.114) devine:

$$\sum_{j=1}^4 r_j (1.1-1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (1.1^2 - 1^2) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^4 r_j \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 4.2$$

Dar  $\sum_{j=1}^4 r_j = 2 - 0.4 + 3 - 0.5 < 4.2$ . Înseamnă că sursa a furnizat

mesajul  $a_0$ .

3. O sursă de informație furnizează mesajele  $a_0$  și  $a_1$  echiprobabil. Când sursa furnizează mesajul  $a_0$ , emițătorul generează un impuls rectangular de amplitudine  $-a$  și durată  $T$ , iar când furnizează mesajul  $a_1$ , un impuls rectangular de amplitudine  $a$  și de aceeași durată  $T$ . Efectuându-se o singură observare la momentul  $t_1=T/2$  asupra semnalului recepționat, s-a obținut eșantionul  $r_1=a/2$ . Folosind criteriul plauzibilității maxime, în condițiile în care zgomotul de pe canal poate fi considerat alb, staționar, repartizat după o lege normală, cu valoarea medie nulă și dispersia  $\sigma^2$ , se cere:

a) decizia luată de receptor;

b) probabilitatea erorii receptorului, dacă  $a/\sigma=2,5$  și  $F(2,5)=0,994$ .

### Soluție

a) Particularizând relația (2.114) pentru  $N=1$  (un eșantion) și  $K=1$  (aplicarea criteriului plauzibilității maxime), rezultă:

$$r_1 (s_{11} - s_{01}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{1}{2} (s_{11}^2 - s_{01}^2) \Leftrightarrow r_1 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{1}{2} (s_{11} + s_{01})$$

unde  $s_{11} = a$ ;  $s_{01} = -a$ ;  $r_1 = a/2$ .

Deoarece  $\frac{1}{2} (s_{11} + s_{01}) = \frac{1}{2} (a - a) = 0$ , rezultă că este

adevărată ipoteza  $H_1$ , deci sursa a furnizat mesajul  $a_1$ .

b) Conform relației (2.34), probabilitatea medie de luare a unei decizii incorecte, respectiv probabilitatea erorii receptorului se calculează cu relația:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2} [p(D_1|a_0) + p(D_0|a_1)], \text{ deoarece } p(a_0) = p(a_1) = \frac{1}{2}$$

Pe de altă parte, în cazul criteriului plauzibilității maxime  $K=1$ , deci  $\ln K=0$  și conform relației (2.132)

$$P(D_0|a_1) = P_m = F\left[-\frac{1}{2\sigma}\sqrt{(s_{11}-s_{01})^2}\right] = F\left(-\frac{a}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 1 - F(2.5) = 1 - 0.994 = 0.006$$

Conform relațiilor (2.122) și (2.134), rezultă  $P(D_1|a_0) = P(D_0|a_1) = 0,002$ . Probabilitatea erorii receptorului este atunci  $P(\varepsilon)=0,006$ , adică de 0,6%.

4. Când sursa de informație furnizează mesaje  $a_0$  și  $a_1$  echiprobabil, emițătorul generează semnalele deterministe  $s_0(t)$ , respectiv  $s_1(t)$ . dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni se poate considera alb, fiind staționar și repartizat normal, cu valoare medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ , în cazul observării continue a semnalului recepționat  $r(t)$ , aplicării criteriului plauzibilității maxime și formelor de undă a semnalelor  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ ,  $r(t)$  din Fig. 2.23, se cere:

- a) decizia luată de receptor;
- b) dacă se definește energia medie statistică a semnalelor cu relația:

$$\bar{E} \triangleq p(a_0) \int_0^T s_0^2(t) dt + p(a_1) \int_0^T s_1^2(t) dt = 7\sigma^2$$

să se calculeze probabilitatea erorii receptorului. Se dă:

$$F\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.982.$$

*Soluție*

- a) Particularizând relația (2.208) pentru  $K=1$  (criteriul plauzibilității maxime) și ținând cont de (2.209), rezultă:

$$\int_0^T r(t) [s_1(t) - s_0(t)] dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2} (E_1 - E_0)$$

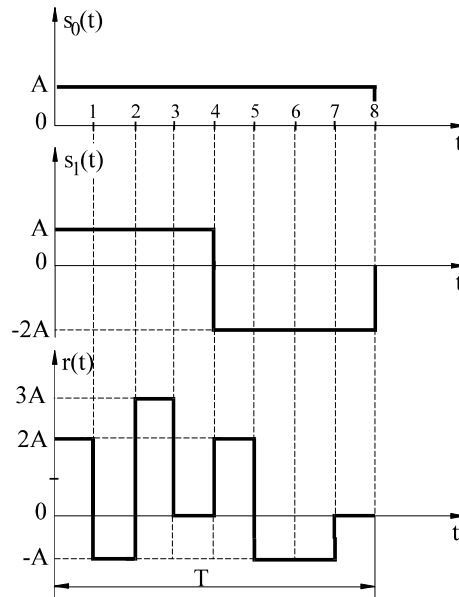


Fig. 2.23. Formele de undă ale semnalelor  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$  și  $r(t)$

Din reprezentările grafice ale semnalelor  $s_1(t)$ ,  $s_0(t)$  și  $r(t)$  rezultă:

$$\begin{aligned} \int_0^T r(t) [s_1(t) - s_0(t)] dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} r(t) (A - A) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T r(t) (-2A - A) dt = \\ &= -3A \left( 2A \frac{T}{8} - A \frac{2T}{8} \right) = 0 \end{aligned}$$

Pe de altă parte, conform relațiilor (2.141) și (2.143), rezultă:

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt = A^2 \frac{T}{2} + 4A^2 \frac{T}{2} = \frac{5A^2 T}{2}$$

$$E_0 = \int_0^T s_0^2(t) dt = A^2 T$$

Înseamnă atunci că:

$$\frac{1}{2} (E_1 - E_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{5 A^2 T}{2} - A^2 T \right) = \frac{3 A^2 T}{4}$$

Deoarece:

$$0 < \frac{3 A^2 T}{4}$$

este adevărată ipoteza  $H_0$ , deci se decide că sursa a furnizat mesajul  $a_0$ .

$$b) \bar{E} = \frac{1}{2} \left( A^2 T + \frac{5 A^2 T}{2} \right) = 7 \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \frac{A \sqrt{T}}{2}$$

Conform relației (2.228), probabilitatea de eroare a receptorului se determină cu relația:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2} (P_f + P_m), \quad p(a_0) = p(a_1) = \frac{1}{2}$$

Conform relațiilor (2.218) și (2.227), în cazul criteriului plauzibilității maxime, rezultă:

$$P_f = 1 - F \left( \frac{1}{2 \sigma} \sqrt{E_s} \right)$$

Dar:

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = \int_{\frac{T}{2}}^T (-2A - A)^2 dt = \frac{9 A^2 T}{2}$$

Rezultă atunci:

$$P_f = 1 - F \left( \frac{3 A \sqrt{T}}{\sqrt{2 T} A} \right) = 1 - F \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = 1 - 0.982 = 0.018$$

Particularizând relația (2.223) pentru  $K=1$ , se obține:

$$P_m = P_f = 0.018$$

Rezultă în final că:  $P(\varepsilon)=0,018$ , adică o eroare a receptorului de 1,8%.

5. Se consideră semnalele generate de emițător  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  în condițiile specificate în problema 4, cu următorul amendament: se modifică forma de undă a semnalului  $s_1(t)$ , astfel încât pe intervalul  $[0, T]$  energia acestuia să nu se modifice. Ce formă ar trebui să aibă atunci semnalul  $s_1(t)$  pentru ca probabilitatea erorii receptorului să fie minimă? Să se calculeze această probabilitate de eroare minimă a receptorului, dacă se dă:  $F(2.6)=0.995$ ,  $\sqrt{10} \approx 3.2$  și  $\sqrt{6.7} \approx 2.6$ .

### Soluție

Conform problemei 4, probabilitatea erorii receptorului se deduce cu relația:

$$P(\varepsilon) = 1 - F\left(\frac{1}{2\sigma}\sqrt{E_s}\right)$$

Din această relație rezultă că  $P(\varepsilon)$  nu depinde direct de  $s_1(t)$ , ci de diferența  $s_1(t)-s_0(t)$ , deoarece:

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

Cu cât  $E_s$  va crește, cu atât  $F\left(\frac{1}{2\sigma}\sqrt{E_s}\right)$  va crește și, deci,  $P(\varepsilon)$  va scade. Se pune problema ca, menținând aceeași energie pentru semnalul  $s_1(t)$  ca în problema 4, adică:

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{5A^2T}{2}$$

să se modifice  $s_1(t)$ , astfel încât:

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = \text{maxim.}$$

Dar:

$$E_s = \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_0^2(t) dt - 2 \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt =$$

$$= \frac{7 A^2 T}{2} - 2 \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt$$

Din această ultimă relație rezultă că  $E_s$  va atinge valoarea maximă atunci când  $\int_0^T s_0(t) s_1(t) dt < 0$  și în modul devine maximă.

Conform inegalității Schwartz-Buniakovski, se poate scrie:

$$\left[ \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \right]^2 \leq \int_0^T s_0^2(t) dt \int_0^T s_1^2(t) dt \Leftrightarrow \left| \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \right| \leq \sqrt{E_0 E_1}$$

Egalitatea are loc când  $s_1(t) = \lambda s_0(t)$ , unde  $\lambda$  este un factor scalar, negativ, deoarece s-a impus condiția:

$$\int_0^T s_0(t) s_1(t) dt = \lambda \int_0^T s_0^2(t) dt = \lambda E_0 = \lambda A^2 T < 0 \Rightarrow \lambda < 0$$

Rezultă atunci că valoarea maximă a lui  $E_s$  se atinge când:

$$(\lambda A^2 T)^2 = E_0 E_1 = \frac{5 A^4 T^2}{2}, \quad \lambda < 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = -\sqrt{\frac{5}{2}} \quad (\lambda < 0)$$

$$\text{Deci: } s_1(t) = -\sqrt{\frac{5}{2}} s_0(t)$$

În acest caz:

$$E_s = \frac{7 A^2 T}{2} + 2 \sqrt{\frac{5}{2}} \int_0^T s_0^2(t) dt = (3.5 + \sqrt{10}) A^2 T \approx 6.7 A^2 T$$

$$P(\varepsilon) = P_m = P_f = 1 - F\left(\frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s}\right) = 1 - F\left(\frac{\sqrt{6.7 A^2 T}}{A \sqrt{T}}\right) =$$

$$= 1 - F(2.6) = 1 - 0.995 = 0.005$$

Eroarea receptorului s-a redus, deci, de la 1,8% la 0,5%.

6. În condițiile problemei 4, se înlocuiesc semnalele  $s_0(t)$ , respectiv  $s_1(t)$ , prin semnalele:

$$z_0(t) = s_0(t) - a(t)$$

$$z_1(t) = s_1(t) - a(t)$$

unde  $a(t)$  este un semnal de energie finită în intervalul  $[0, T]$ . Energia medie statistică a noilor semnale,  $z_0(t)$  și  $z_1(t)$ , se definește prin relația:

$$\bar{E}_z = p(a_0) \int_0^T z_0^2(t) dt + p(a_1) \int_0^T z_1^2(t) dt$$

Să se determine semnalul  $a(t)$ , astfel încât  $\bar{E}_z$  să fie minimă, menținând nemodificată probabilitatea medie a deciziei eronate,  $P(\varepsilon)$ .

*Soluție*

Probabilitatea medie a deciziei eronate se determină cu relația:

$$P(\varepsilon) = 1 - F\left(\frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s}\right), \quad p(a_0) = p(a_1) = \frac{1}{2}$$

unde:

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

În cazul semnalelor modificate  $z_0(t)$  și  $z_1(t)$ , rezultă:

$$E_z = \int_0^T [z_1(t) - z_0(t)]^2 dt = \int_0^T [s_1(t) - a(t) - s_0(t) + a(t)]^2 dt = E_s$$

Rezultă, deci, că  $P(\varepsilon)$  se menține același fie pentru semnalele  $s_1(t)$  și  $s_0(t)$ , fie pentru semnalele modificate  $z_1(t)$  și  $z_0(t)$ . Pe de altă parte:



$$\begin{aligned} \bar{E}_z &= p(a_0) \int_0^T [s_0(t) - a(t)]^2 dt + p(a_1) \int_0^T [s_1(t) - a(t)]^2 dt = \\ &= p(a_0) \int_0^T s_0^2 dt + p(a_1) \int_0^T s_1^2 dt - \\ &\quad - \int_0^T a(t) \{ [2s_0(t) - a(t)] p(a_0) + [2s_1(t) - a(t)] p(a_1) \} dt \end{aligned}$$

Dar:

$$p(a_0) \int_0^T s_0^2 dt + p(a_1) \int_0^T s_1^2 dt = \bar{E}$$

este energia medie statistică a semnalelor inițiale, care este o constantă.

Notând:

$$[2s_0(t) - a(t)] p(a_0) + [2s_1(t) - a(t)] p(a_1) \stackrel{not.}{=} \alpha(t)$$

rezultă:

$$\bar{E}_z = \bar{E} - \int_0^T a(t) \alpha(t) dt$$

În contextul problemei 4,  $p(a_0) = p(a_1) = 1/2$  și atunci:

$$\alpha(t) = s_0(t) + s_1(t) - a(t)$$

Minimizarea lui  $\bar{E}_z$  revine la maximizarea integralei  $\int_0^T a(t) \alpha(t) dt$ .

Dar:

$$\left| \int_0^T a(t) \alpha(t) dt \right| \leq \left[ \int_0^T a^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^T \alpha^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

conform aceleiași inegalități Schwartz-Buniakovski.

Egalitatea, deci valoarea maximă a integralei  $\int_0^T a(t) \alpha(t) dt$

se obține atunci când:  $\alpha(t) = \lambda a(t)$ ,  $\lambda > 0$

Rezultă astfel:

$$a(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t)}{1 + \lambda}, \quad \lambda > 0$$

iar

$$\bar{E}_z = \bar{E} - \int_0^T \lambda a^2(t) dt = \bar{E} - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \int_0^T [s_1(t) + s_0(t)]^2 dt$$

Condiția necesară de extrem este:

$$\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow - \frac{(1 + \lambda)^2 - 2\lambda(1 + \lambda)}{(1 + \lambda)^4} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

de unde rezultă:

$$a(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t)}{2}$$

7. Pe un canal de transmisiuni zgomotul poate fi considerat alb, repartizat după o lege normală, cu valoare medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ . La recepție se fac observații continue în intervalul  $[0, T]$  și se ia decizia conform criteriului riscului minim.

Să se determine formele de undă  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  generate de emițător la furnizarea mesajelor  $a_0$  și  $a_1$  de sursa de informație, astfel încât pentru o probabilitate impusă a erorii receptorului,  $P(\varepsilon)$ , semnalele  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  să asigure o energie medie statistică minimă,

$$\text{adică: } \bar{E} = p(a_0) \int_0^T s_0^2 dt + p(a_1) \int_0^T s_1^2 dt = \text{minim}$$

*Soluție*

Probabilitatea unei decizii eronate se determină cu relația:

$$P(\varepsilon) = p(a_0) P_f + p(a_1) P_m$$

unde:

$$P_m = F \left( \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} - \frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s} \right)$$

$$P_f = 1 - F \left( \frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} + \frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s} \right)$$

și

$$E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt.$$

Se constată că  $P(\varepsilon)$  nu depinde separat de  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$ , așa încât se consideră pentru început două semnale oarecare, din care se scade semnalul  $a(t)$  astfel încât să rezulte energia medie statistică minimă. Cu alte cuvinte, considerând semnalele:

$$z_0(t) = s_0(t) - a(t)$$

$$z_1(t) = s_1(t) - a(t),$$

deoarece

$$z_1(t) - z_0(t) = s_1(t) - s_0(t)$$

se asigură aceeași probabilitate medie de luare a unei decizii eronate,  $P(\varepsilon)$ . Pe de altă parte:

$$\bar{E}_z = p(a_0) \int_0^T z_0^2(t) dt + p(a_1) \int_0^T z_1^2(t) dt =$$

$$\bar{E} - \int_0^T a(t) \{ [2s_0(t) - a(t)] p(a_0) + [2s_1(t) - a(t)] p(a_1) \} dt$$

Notând:

$$[2s_0(t) - a(t)] p(a_0) + [2s_1(t) - a(t)] p(a_1) \stackrel{not.}{=} \beta(t)$$

rezultă:

$$\bar{E}_z = \bar{E} - \int_0^T a(t) \beta(t) dt$$

Din ultima relație rezultă că  $\bar{E}_z$  devine minim, când integrala

pe domeniul  $[0, T]$  devine maximă. Din inegalitatea lui Schwartz-Buniakovski rezultă:

$$\left| \int_0^T a(t) \beta(t) dt \right| \leq \left[ \int_0^T a^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^T \beta^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

egalitatea având loc atunci când:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \lambda a(t), \quad \lambda > 0 \Leftrightarrow \\ [2s_0(t) - a(t)] p(a_0) + [2s_1(t) - a(t)] p(a_1) &= \lambda a(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow a(t) &= \frac{2}{1 + \lambda} [p(a_0) s_0(t) + p(a_1) s_1(t)] \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, când ultima relație este îndeplinită,  $\bar{E}_z$  devine minim. Dacă de la început semnalele  $s_0(t)$  și  $s_1(t)$  s-ar fi ales astfel încât să asigure  $\bar{E}_z$  minim, nu ar mai fi trebuit să se scadă semnalul  $a(t)$ , adică  $a(t)=0$ .

Impunând  $a(t)=0$  în ultima relație, rezultă:

$$s_1(t) = - \frac{p(a_0)}{p(a_1)} s_0(t)$$

Alegând arbitrar, de exemplu  $s_0(t)$ , și calculând pe  $s_1(t)$  cu ultima relație, rezultă  $\bar{E}_z$  minim.

**8.** O sursă discretă de informație este caracterizată de distribuția:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ p(a_0) & p(a_1) \end{pmatrix}$$

Când  $S$  furnizează mesajele  $a_0$  și  $a_1$ , emițătorul generează semnalele  $s_0(t)$ , respectiv  $s_1(t)$ . Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni poate fi considerat alb, repartizat normal, cu valoarea medie nulă și dispersia  $\sigma^2$ , să se determine  $E_{ss}$ , astfel încât să se obțină valoarea

maximă a probabilității alarmei false, în cazul observării continue.

*Soluție*

$$P_f = 1 - F\left(\frac{\sigma \ln K}{\sqrt{E_s}} + \frac{1}{2\sigma} \sqrt{E_s}\right)$$

Deoarece:

$$\sigma \ln K \stackrel{not.}{=} a = const. > 0 ; \quad \frac{1}{2\sigma} \stackrel{not.}{=} \frac{1}{b} = const. > 0$$

probabilitatea alarmei false va depinde de  $\sqrt{E_s} \stackrel{not.}{=} x$ ,  $x > 0$

Cu aceste notații, se poate scrie:

$$P_f = 1 - F\left(\frac{a b + x^2}{b x}\right)$$

Probabilitatea alarmei false va deveni maximă, atunci când

$F\left(\frac{a b + x^2}{b x}\right)$  va deveni minimă, adică atunci când  $y = \frac{a b + x^2}{b x}$  va

deveni minimă.

Condiția necesară de extrem a lui  $y$  se deduce cu relația:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - a b}{b x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a b}$$

deoarece  $x > 0$ .

Revenind la notațiile inițiale, rezultă  $E_s = 2\sigma^2 \ln K$ .

Extremul este într-adevăr un minim, deoarece:

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\sqrt{ab}} = \frac{2}{b \sqrt{ab}} > 0$$

**9.** Când sursa discretă de informație furnizează mesajele  $a_0$ ,  $a_1$  și  $a_2$ , emițătorul generează semnalele  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ , respectiv  $s_2(t)$ . Dacă semnalul recepționat este  $r(t)$ , așa cum se arată în Fig. 2.24, să se

decidă, pe baza criteriului unghiului minim, mesajul furnizat de sursă.

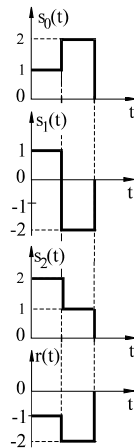


Fig. 2.24. Reprezentarea semnalelor  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  și  $r(t)$

*Soluție*

Pentru a decide care semnal a fost generat de emițător, se reprezintă grafic vectorii corespunzători semnalelor  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  și respectiv  $r(t)$ , pentru fiecare dispunând de două componente, adică:

$$\vec{s}_0 = (1; 2); \vec{s}_1 = (1; -2); \vec{s}_2 = (2; 1) \text{ și } \vec{r} = (-1; -2)$$

așa cum este arătat în Fig. 2.25.

Deoarece unghiul dintre vectorii  $\vec{s}_1$  și  $\vec{r}$  este cel mai mic, se decide că emițătorul a generat semnalul  $s_1(t)$ , adică sursa a furnizat mesajul  $a_1$ .

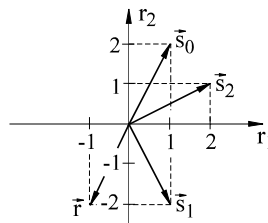


Fig. 2.25. Reprezentarea vectorială a semnalelor  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  și  $r(t)$