

# CAPITOLUL 1

## SEMNALE ALEATOARE

Un proces sau semnal aleator, numit și stochastic, este un proces care se desfășoară în timp și este guvernat, cel puțin în parte, de legi probabilistice. Importanța teoretică și practică a studiului semnalelor aleatoare rezidă în faptul că semnalele purtătoare de informație, indiferent de natura lor, și zgomotele care apar în procesul transmisiunii sunt modelate cel mai bine prin astfel de semnale.

### 1.1. Definierea semnalului aleator, a variabilei aleatoare, a funcției și a densității de repartiție

Pentru a defini un semnal aleator se consideră o experiență oarecare. Prin rezultatul unei experiențe se înțelege una din posibilitățile de realizare a acesteia. Mulțimea rezultatelor posibile se va numi în continuare *spațiul eșantioanelor* și va fi notat cu  $\Omega$ .

Din punct de vedere matematic, un semnal aleator este o funcție de două variabile  $f(k, t) = f^{(k)}(t)$ , unde  $k$  ia valori în spațiul eșantioanelor. Funcțiile  $f^{(k)}(t)$  reprezintă *realizări particulare* ale semnalului aleator. O reprezentare geometrică intuitivă a unui semnal aleator este dată în figura 1.1.

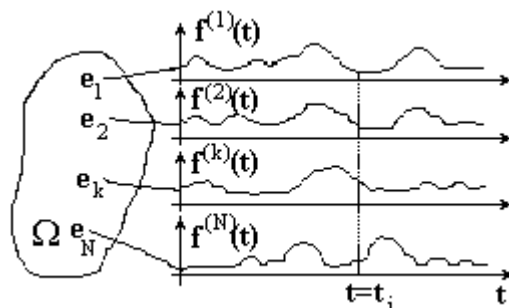


Fig. 1.1. Reprezentarea geometrică a unui semnal aleator

În figura 1.1, prin  $e_1, e_2, \dots, e_N$  s-au notat elementele din spațiul eșantioanelor, iar prin  $f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(N)}(t)$ , realizările particulare ale semnalului aleator notat cu  $f(t)$ . Cu alte cuvinte, *semnalul aleator* este format din mulțimea realizărilor particulare, adică:

$$f(t) = \{f^{(k)}(t)\} \quad (1.1)$$

Dacă variabila  $t$  ia valori pe axa reală, atunci semnalul  $f(t)$  se va numi *proces aleator* sau *stochastic, continuu în timp*.

Dacă variabila  $t$  ia numai valori întregi, adică  $t \in Z$ , atunci semnalul aleator  $f(t)$  se va numi *proces aleator* sau *stochastic, discret în timp*.

Pentru a face o distincție între cele două procese aleatoare, se va nota procesul aleator discret în timp cu  $x[n]$ , adică

$$x[n] = \{x^{(k)}[n]\}, n \in Z \quad (1.1')$$

Funcțiile  $x^{(k)}[n]$  se numesc realizări particulare ale procesului aleator discret în timp.

Pentru orice valoare particulară a lui  $t = t_i$  sau  $n = n_i$  mulțimea valorilor funcțiilor  $f(k, t_i) = f^{(k)}(t_i)$ , respectiv

$x[k, n_i] = x^{(k)}[n_i]$ , definește o *variabilă aleatoare*, notată în continuare cu  $f(t_i)$ , respectiv  $x[n_i]$ . Cu alte cuvinte, se poate scrie:

$$f(t_i) = \{f^{(k)}(t_i)\} \quad (1.2)$$

respectiv,

$$x[n_i] = \{x^{(k)}[n_i]\} \quad (1.2')$$

Din (1.2) sau (1.2') se observă că un proces aleator este o mulțime de variabile aleatoare indexate.

Fie numărul real  $x_i$  ce aparține domeniului de valori ale variabilei aleatoare  $f(t_i)$  sau  $x[n_i]$ . Dacă se notează cu  $n$  numărul realizărilor particulare pentru care  $f^{(k)}(t_i) \leq x_i$ , respectiv  $x^{(k)}[n_i] \leq x_i$ , și cu  $N$  numărul total al realizărilor particulare, atunci raportul  $n/N$ , când  $N$  este suficient de mare, va reprezenta probabilitatea ca variabila aleatoare  $f(t_i)$ , respectiv  $x[n_i]$ , să fie mai mică sau egală cu  $x_i$  și va fi notată cu  $P\{f(t_i) \leq x_i\}$ , respectiv  $P\{x[n_i] \leq x_i\}$ . Această probabilitate este în general o funcție ce depinde atât de numărul real  $x_i$ , cât și de momentul de timp  $t_i$  sau  $n_i$ . Notând această funcție cu  $F_1(x_i; t_i)$ , respectiv  $F_1(x_i; n_i)$ , se poate scrie relația:

$$F_1(x_i; t_i) = P\{f(t_i) \leq x_i\} \quad (1.3)$$

respectiv

$$F_1(x_i; n_i) = P\{x[n_i] \leq x_i\} \quad (1.3')$$

Funcția definită cu relația (1.3), respectiv (1.3'), se numește *funcție de repartiție de ordinul întâi*, fapt consemnat prin indicele unu al funcției  $F$ .

Derivata parțială în raport cu  $x_i$  a funcției de repartiție de ordinul întâi definește *densitatea de repartiție* sau *de probabilitate* de ordinul întâi și va fi notată cu  $w_1(x_i; t_i)$ , adică:

$$w_1(x_i; t_i) = \frac{\partial F_1(x_i; t_i)}{\partial x_i} \quad (1.4)$$

respectiv

$$w_1(x_i; n_i) = \frac{\partial F_1(x_i; n_i)}{\partial x_i} \quad (1.4')$$

Produsul  $w_1(x_i; t_i)dx_i$ , respectiv  $w_1(x_i; n_i)dx_i$ , reprezintă probabilitatea ca procesul aleator  $f(t)$ , respectiv  $x[n]$ , la momentul  $t = t_i$ , respectiv  $n = n_i$ , să treacă prin vecinătatea valorii  $x_i$ , așa cum este reprezentat intuitiv în figura 1.2.

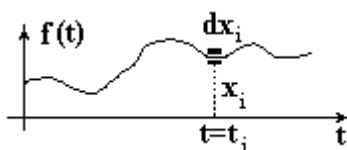


Fig. 1.2. Reprezentarea geometrică intuitivă a produsului  $w_1(x_i; t_i)dx_i$

Matematic, aceasta se scrie astfel:

$$w_1(x_i; t_i)dx_i = P\{x_i < f(t_i) \leq x_i + dx_i\} \quad (1.5)$$

respectiv

$$w_1(x_i; n_i)dx_i = P\{x_i < x[n_i] \leq x_i + dx_i\} \quad (1.5')$$

Densitatea de repartiție sau probabilitate de ordinul întâi determină probabilitatea unei anumite valori a procesului aleator la un moment de timp dat, nespecificând însă nimic în legătură cu desfășurarea în timp a acestuia. În scopul cunoașterii mai amănunțite a unui proces aleator, se definesc funcții de repartiție și densități de repartiție de ordin superior.

În general, funcția de repartiție de ordinul  $N$  se definește cu relația :

$$F_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = P\{f(t_1) \leq x_1; f(t_2) \leq x_2; \dots; f(t_N) \leq x_N\} \quad (1.6)$$

respectiv

$$F_N(x_1, \dots, x_N; n_1, \dots, n_N) = P\{x[n_1] \leq x_1, x[n_2] \leq x_2, \dots, x[n_N] \leq x_N\} \quad (1.6')$$

Densitatea de repartiție sau de probabilitate de ordinul  $N$  se definește cu relația:

$$w_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} \quad (1.7)$$

respectiv

$$w_N(x_1, x_2, \dots, x_N; n_1, n_2, \dots, n_N) = \frac{\partial^N F_N(x_1, x_2, \dots, x_N; n_1, n_2, \dots, n_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} \quad (1.7')$$

Reprezentarea geometrică intuitivă în acest caz este dată în figura 1.3.

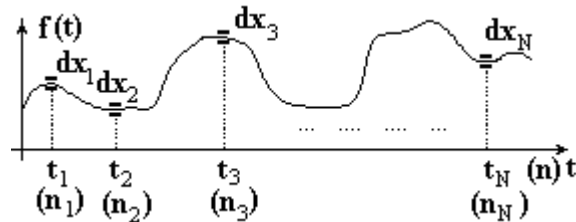


Fig. 1.3. Reprezentarea geometrică intuitivă a desfășurării în timp a procesului aleator

Expresia analitică sau reprezentarea grafică a densității de repartiție în raport cu variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_N$  determină *legea de repartiție* a procesului sau secvenței aleatoare.

Astfel, legea de repartiție monodimensională normală sau gaussiană este de forma:

$$w_1(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-m)^2} \quad (1.8)$$

unde prin  $\sigma^2$  s-a notat dispersia și prin  $m$  valoarea medie a variabilei aleatoare.

Între densitățile de repartiție și probabilități există o serie de analogii, care vor fi sintetizate în Tabelul 1.1, în cazul particular al densității de repartiție de ordinul doi.

**Tabelul 1.1**

Probabilități	Densități de repartiție (probabilitate)
$0 \leq p(x_i \cap x_j) \leq 1$	$w_2(x_i, x_j) \geq 0$
$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i \cap x_j) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_i, x_j) dx_i dx_j = 1$
$p(x_i \cap x_j) = p(x_i) \cdot p(x_j / x_i) =$ $= p(x_j) \cdot p(x_i / x_j)$	$w_2(x_i, x_j) = w_1(x_i) \cdot w_2(x_j   x_i) =$ $w_1(x_j) \cdot w_2(x_i   x_j)$
$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i \cap x_j)$	$w_1(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_i, x_j) dx_j$
$p(x_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i \cap x_j)$	$w_1(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_i, x_j) dx_i$
$p(x_i \cap x_j) = p(x_i) \cdot p(x_j)$ în cazul evenimentelor independente	$w_2(x_i, x_j) = w_1(x_i) \cdot w_1(x_j)$ în cazul variabilelor aleatoare independente

Procesul aleator cu un număr finit de valori ale amplitudinii, se va numi *discret în amplitudine*.

## 1.2. Valori medii statistice și temporale ale procesului aleator, continuu în timp

Procesele aleatoare care modelează din punct de vedere matematic perturbațiile sau zgomotele în cazul unei transmisiuni, nu pot fi cunoscute în detaliu. Pentru caracterizarea lor se calculează valori medii de diferite ordine.

Valorile medii de diferite ordine se pot calcula fie pe mulțimea realizărilor particulare la momente de timp alese arbitrar,  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , fie dintr-o singură realizare particulară  $f^{(k)}(t)$ . În primul caz, se spune că se obțin *valori medii statistice* (sau medii pe mulțimi), iar în al doilea caz, *valori medii temporale*.

Valorile medii statistice folosite frecvent în aplicații sunt:

1. *Valoarea medie* (momentul de ordinul întâi)

$$\overline{f(t_1)} = m_1 \{f(t_1)\} = E\{f(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1; t_1) dx_1 \quad (1.9)$$

2. *Valoarea pătratică medie* (momentul inițial de ordinul doi)

$$\overline{f^2(t_1)} = m_1 \{f^2(t_1)\} = E\{f^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1; t_1) dx_1 \quad (1.10)$$

3. *Funcția de autocorelație* (momentul inițial reunit de ordinul doi)

$$\begin{aligned} B_{ff} &= \overline{f(t_1)f(t_2)} = m_1 \{f(t_1)f(t_2)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

4. *Funcția de corelație* (momentul inițial mixt de ordinul doi)

$$\begin{aligned}
B_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f(t_1)g(t_2)} = m_1 \{f(t_1)g(t_2)\} = \\
E\{f(t_1)g(t_2)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2
\end{aligned}
\tag{1.12}$$

unde  $f(t_1)$  și  $g(t_2)$  sunt variabile aleatoare obținute din procesele aleatoare  $f(t)$  și  $g(t)$  la momentele  $t = t_1$ , respectiv  $t = t_2$ , iar  $x_1$  și  $y_2$  valori din domeniul posibil al acestor variabile aleatoare.

#### 5. Dispersia (moment centrat de ordinul doi)

$$\begin{aligned}
\sigma^2(t_1) &= \overline{[f(t_1) - \overline{f(t_1)}]^2} = \overline{f^2(t_1) - 2f(t_1)\overline{f(t_1)} + [\overline{f(t_1)}]^2} = \\
&= \overline{f^2(t_1)} - [\overline{f(t_1)}]^2
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

#### 6. Funcția de autovarianță

$$\begin{aligned}
K_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{[f(t_1) - \overline{f(t_1)}][f(t_2) - \overline{f(t_2)}]} = \\
&= B_{ff}(t_1, t_2) - \overline{f(t_1)} \cdot \overline{f(t_2)}
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

#### 7. Funcția de covarianță

$$\begin{aligned}
K_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{[f(t_1) - \overline{f(t_1)}][g(t_2) - \overline{g(t_2)}]} = \\
&= B_{fg}(t_1, t_2) - \overline{f(t_1)} \cdot \overline{g(t_2)}
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

Valorile medii temporale folosite frecvent în aplicații sunt:

#### 1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t) dt \right]
\tag{1.16}$$



Din (1.16), se constată că această valoare medie determină componenta continuă a realizării particulare respective. Se poate arăta ușor că valoarea medie temporală nu depinde de originea timpului.

Într-adevăr:

$$\overline{f^{(k)}(t_0 + t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t_0 + t) dt \right] \quad (1.17)$$

Efectuând schimbarea de variabilă

$$t_0 + t = u; dt = du \quad (1.18)$$

rezultă:

$$\overline{f^{(k)}(t_0 + t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f^{(k)}(u) du \right] = \overline{f^{(k)}(t)} \quad (1.19)$$

## 2. Valoarea pătratică medie temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f^{(k)}(t)]^2 dt \right] \quad (1.20)$$

În mod analog, se poate demonstra că această mărime medie temporală nu depinde de originea timpului.

## 3. Funcția de autocorelație temporală

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t) f^{(k)}(t_2 + t)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t_1 + t) f^{(k)}(t_2 + t) dt \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Se poate demonstra că:

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(t_1 - t_2) = R_{ff}(t_2 - t_1) \quad (1.22)$$

sau, dacă se notează:

$$t_2 - t_1 = \tau \quad (1.23)$$

rezultă:

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau) \quad (1.24)$$

adică, funcția de autocorelație temporală este o funcție pară.

Într-adevăr, efectuând schimbarea de variabilă:

$$t_1 + t = u; dt = du \quad (1.25)$$

în (1.21), rezultă:

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_1 - \frac{T}{2}}^{t_1 + \frac{T}{2}} f^{(k)}(u) f^{(k)}(t_2 + u - t_1) du \right] = R_{ff}(t_2 - t_1) \quad (1.26)$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$t_2 + t = v; dt = dv \quad (1.27)$$

în aceeași relație (1.21), rezultă:

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_2 - \frac{T}{2}}^{t_2 + \frac{T}{2}} f^{(k)}(v) f^{(k)}(t_1 + v - t_2) dv \right] = R_{ff}(t_1 - t_2) \quad (1.28)$$

Din (1.26) și (1.28) rezultă (1.22).

#### 4. Funcția de corelație temporală

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dacă în relația (1.29) se face schimbarea de variabilă (1.25), rezultă:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_1 - \frac{T}{2}}^{t_1 + \frac{T}{2}} f^{(k)}(u) g^{(k)}(t_2 + u - t_1) du \right] = R_{fg}(t_2 - t_1) \quad (1.30)$$

Dacă însă în relația (1.29) se face schimbarea de variabilă (1.27), rezultă:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^{(k)}(v) f^{(k)}(t_1 + v - t_2) dv \right] = R_{gf}(t_1 - t_2) \quad (1.31)$$

Comparând (1.30) cu (1.31), rezultă:

$$R_{fg}(t_2 - t_1) = R_{gf}(t_1 - t_2) \quad (1.32)$$

sau cu notația (1.23):

$$R_{fg}(\tau) = R_{gf}(-\tau) \quad (1.33)$$

### 5. Dispersia temporală

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - \left[ \overline{f^{(k)}(t)} \right]^2 \quad (1.34)$$

### 1.3. Procese aleatoare continue în timp, staționare

Procesele aleatoare ale căror proprietăți statistice sunt invariante la schimbarea arbitrară a originii timpului se numesc *staționare*. Rezultă, deci, că pentru procesele aleatoare staționare se poate scrie relația:

$$\begin{aligned} w_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) &= \\ &= w_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Dacă în relația (1.35) se înlocuiește  $\tau = -t_1$ , se poate scrie echivalent:

$$\begin{aligned}
w_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) &= \\
&= w_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_2 - t_1, \dots, t_N - t_1)
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Procesele aleatoare pentru care sunt adevărate relațiile (1.35) sau (1.36) se numesc *staționare în sens strict*.

Pentru  $n=1$ , relația (1.36) devine:

$$w_1(x_1; t_1) = w_1(x_1) \tag{1.37}$$

adică densitatea de repartiție de ordinul întâi nu depinde de timp.

Pentru  $n=2$ , relația (1.36) devine:

$$w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = w_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) \tag{1.38}$$

În aceste condiții, valoarea medie statistică, valoarea pătratică medie statistică și dispersia sunt constante.

Într-adevăr, ținând cont de (1.37), relația (1.9) devine:

$$\overline{f(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1) dx_1 = a = \text{const.} \tag{1.39}$$

iar din relația (1.10), se obține:

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1) dx_1 = b = \text{const.} \tag{1.40}$$

Cu (1.39) și (1.40), relația (1.13) devine:

$$\sigma^2(t_1) = b - a^2 = \text{const.} \tag{1.41}$$

Dacă în relația (1.11) se ține cont de (1.39), rezultă:

$$B_{ff}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = B_{ff}(t_2 - t_1) \tag{1.42}$$

În mod analog, se poate arăta că și funcțiile de corelație, autovarianță și covarianță depind numai de diferența de timp  $t_2 - t_1$ .

Procesele aleatoare care sunt staționare până la ordinul doi, adică pentru care sunt satisfăcute relațiile (1.37) și (1.37), se numesc *staționare în sens larg*.

Evident, procesele aleatoare staționare în sens strict sunt staționare și în sens larg, reciproca nefiind totdeauna adevărată.

Procesele aleatoare staționare în sens strict sau larg, așa cum au fost definite mai sus, sunt idealizări, deoarece, practic, nici un semnal nu poate fi urmărit de la  $t = -\infty$  la  $t = \infty$ . În realitate, semnalele sunt observate un timp finit  $T$ . Dacă pe acest interval proprietățile care caracterizează staționaritatea se mențin în limitele unei bune aproximări, ele se consideră staționare pe intervalul respectiv.

O categorie foarte largă de procese aleatoare staționare în sens larg se bucură de proprietatea de *ergodicitate*, a cărei esență constă în aceea că valorile medii statistice sunt egale cu valorile medii temporale corespunzătoare. Deoarece valoarea medie, valoarea pătratică medie și dispersia temporală sunt constante, iar funcțiile de autocorelație, corelație, autovarianță și covarianță temporale depind numai de diferențele dintre momentele  $t_1$  și  $t_2$ , pentru ca aceste valori medii temporale să fie egale cu valorile medii statistice corespunzătoare este necesar să fie îndeplinite relațiile (1.37) și (1.38), adică procesele aleatoare trebuie să fie staționare în sens larg.

Ipoteza ergodicității este foarte importantă în practică, deoarece teoria statistică matematică operează cu valori medii statistice, în timp ce, practic, se pot calcula numai valorile medii temporale, dispunându-se de o singură realizare particulară a procesului aleator ce modelează un zgomot sau o perturbație. Egalitatea dintre valorile medii statistice și valorile medii temporale corespondente trebuie înțeleasă în sensul convergenței în probabilitate. Astfel, egalitatea:

$$\overline{f(t_1)} = \overline{f^{(k)}(t)} \quad (1.43)$$

înseamnă:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \overline{f(t_1)} - \overline{f_T^{(k)}(t)} \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (1.44)$$

pentru orice  $\varepsilon > 0$ , arbitrar de mic.

În relația (1.44), prin  $\overline{f_T^{(k)}(t)}$  s-a notat valoarea medie temporală a realizării particulare trunchiate, adică:

$$f_T^{(k)}(t) = \begin{cases} f^{(k)}(t), & \text{pentru } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{pentru } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.45)$$

#### 1.4. Determinarea nivelului de prag în cazul recepției pe canale perturbate

Problema determinării tensiunii de prag se pune în cazul în care trebuie stabilit un nivel de prag, astfel încât atunci când semnalul recepționat este sub nivelul de prag, să se decidă că s-a recepționat numai zgomot, iar la recepționarea unui semnal care depășește nivelul de prag, să se decidă că în semnalul recepționat este și semnal util. În acest caz, fie se va lua o decizie, fie semnalul recepționat va trebui prelucrat adecvat în scopul extragerii semnalului purtător de informație cu un grad de fidelitate impus.

Pentru fixarea ideilor, se presupune că zgomotul de pe canalul de transmisiuni este reprezentat de o tensiune fluctuantă (aleatoare), modelată matematic de un proces aleator staționar și

ergodic. Fie  $u^{(k)}(t)$  o realizare particulară a tensiunii de zgomot fluctuante, așa cum este reprezentată în figura 1.4.

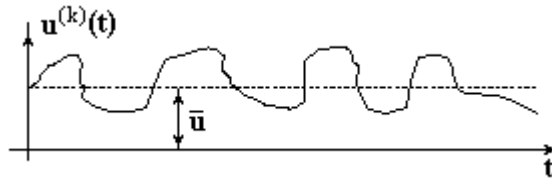


Fig. 1.4. Tensiunea fluctuantă de pe canalul de transmisiuni

Datorită ipotezei de ergodicitate, se consideră că valoarea medie statistică este egală cu valoarea medie temporală.

Pătratul valorii efective,  $U_{ef}^2$ , a componentei alternative a tensiunii fluctuante se determină cu relația:

$$U_{ef}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [u^{(k)}(t) - \bar{u}]^2 dt \right] \quad (1.46)$$

Deoarece:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (u^{(k)}(t))^2 dt \right] = \overline{u^2(t)} \quad (1.47)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^{(k)}(t) dt \right] = \overline{u(t)} \quad (1.48)$$

relația (1.46) devine:

$$U_{ef}^2 = \overline{u^2(t)} - [\overline{u(t)}]^2 \quad (1.49)$$

Comparând relațiile (1.13) cu (1.49) rezultă că pătratul valorii efective a componentei alternative a tensiunii fluctuante este egal cu dispersia, adică:

$$\sigma^2(t_1) = U_{ef}^2 \quad (1.50)$$

Dacă zgomotul de pe canalul de transmisiuni, reprezentat de tensiunea fluctuantă, este repartizat după o lege normală monodimensională, conform relației (1.8), se poate scrie:

$$w_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-\bar{u})^2}{U_{ef}^2}} \quad (1.51)$$

Pe de altă parte, conform relației (1.5), se poate scrie:

$$w_1(u) du = P\{u < u_i \leq u + du\} \quad (1.52)$$

unde  $u_i = u(t_i)$ .

Probabilitatea ca tensiunea fluctuantă să fie între pragurile  $u_1$  și  $u_2$  ( $u_1 < u_2$ ) se poate calcula atunci cu relația:

$$P\{u_1 < u \leq u_2\} = \int_{u_1}^{u_2} w_1(u) du = \int_{-\infty}^{u_2} w_1(u) du - \int_{-\infty}^{u_1} w_1(u) du, u_2 > u_1 \quad (1.53)$$

Înlocuind (1.51) în (1.53), rezultă:

$$P\{u_1 < u \leq u_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}} \int_{-\infty}^{u_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-\bar{u})^2}{U_{ef}^2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}} \int_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-\bar{u})^2}{U_{ef}^2}} du \quad (1.54)$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\frac{u - \bar{u}}{U_{ef}} = v, du = U_{ef} dv \quad (1.55)$$

rezultă:



$$P\left\{\frac{u_1 - \bar{u}}{U_{ef}} < v \leq \frac{u_2 - \bar{u}}{U_{ef}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u_2 - \bar{u}}{U_{ef}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u_1 - \bar{u}}{U_{ef}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \quad (1.56)$$

Cele două integrale din relația (1.56) nu pot fi exprimate prin funcții elementare, în schimb este tabelată *integrala sau funcția Laplace*, de forma:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \quad (1.57)$$

a cărei reprezentare grafică este dată în figura 1.5.

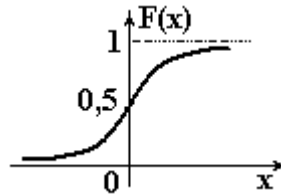


Fig.1.5. Reprezentarea grafică a funcției Laplace

Funcția Laplace,  $F(x)$ , se bucură de următoarele proprietăți:

$$\left. \begin{aligned} F(-\infty) &= 0 \\ F(0) &= 0,5 \\ F(\infty) &= 1 \\ F(-x) &= 1 - F(x) \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

Cu (1.57), relația (1.56) devine:

$$P\left\{\frac{u_1 - \bar{u}}{U_{ef}} < v \leq \frac{u_2 - \bar{u}}{U_{ef}}\right\} = F\left(\frac{u_2 - \bar{u}}{U_{ef}}\right) - F\left(\frac{u_1 - \bar{u}}{U_{ef}}\right) \quad (1.59)$$

Impunându-se condiția determinării probabilității de depășire a unei tensiuni de prag  $U_p$ , în relația (1.59) trebuie înlocuit  $u_1 = U_p$  și  $u_2 = \infty$ , rezultând:

$$P\left\{v > \frac{U_p - \bar{u}}{U_{ef}}\right\} = F(\infty) - F\left(\frac{U_p - \bar{u}}{U_{ef}}\right) \quad (1.60)$$

Considerând, în continuare, că tensiunea fluctuantă ce reprezintă zgomotul de pe canalul de transmisiuni are componentă continuă nulă ( $\bar{u} = 0$ ), rezultă:

$$P\{u > U_p\} = 1 - F\left(\frac{U_p}{U_{ef}}\right) \quad (1.61)$$

Dacă  $U_p/U_{ef} \approx 3$ , consultând tabelul cu valorile integralei Laplace, rezultă că  $F(3) \approx 0,999$ , ceea ce înseamnă:

$$P\{u > 3U_{ef}\} \approx 0 \quad (1.62)$$

Din relația (1.62) rezultă că în condițiile menționate mai sus (zgomot repartizat normal cu valoare medie nulă), probabilitatea ca zgomotul să depășească tensiunea de prag,  $U_p = 3U_{ef}$ , este practic nulă și deci, alegând un astfel de prag, dacă semnalul recepționat îl depășește, se decide că în semnalul recepționat, pe lângă zgomot, există și semnal util.

## 1.5. Teorema Wiener-Khintcine

Fie  $f^k(t)$  o realizare particulară a unui proces aleator continuu în timp. De obicei:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(t)| dt \rightarrow \infty \quad (1.63)$$

motiv pentru care transformata Fourier și, deci, analiza armonică clasică nu poate fi utilizată. Pentru a se putea aplica și în acest caz transformata Fourier, realizarea particulară a procesului aleator se

trunchiază. Notând cu  $f_T^{(k)}(t)$  realizarea particulară trunchiată, aceasta este definită cu relația:

$$f_T^{(k)} = \begin{cases} f^{(k)}(t), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.64)$$

Intervalul de trunchiere,  $T$ , se alege astfel încât realizarea trunchiată să admită transformată Fourier. Notând cu  $F_T^{(k)}(j\omega)$  transformata Fourier a realizării particulare trunchiate și ținând cont de (1.64), se poate scrie:

$$F_T^{(k)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T^{(k)}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.65)$$

respectiv, transformata inversă:

$$f_T^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^{(k)}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.66)$$

Dacă se notează cu  $P_T^{(k)}$  și  $E_T^{(k)}$  puterea, respectiv energia realizării particulare trunchiate, se poate scrie:

$$P_T^{(k)} = \frac{E_T^{(k)}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f_T^{(k)}(t)]^2 dt \quad (1.67)$$

Ținând cont de (1.64) și (1.66), rezultă:

$$\begin{aligned} P_T^{(k)}(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T^{(k)}(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^{(k)}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt = \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^{(k)}(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_T^{(k)}(t) e^{j\omega t} dt d\omega = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T^{(k)}(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (1.68)$$

Mărimea

$$\frac{|F_T^{(k)}(j\omega)|^2}{T} \stackrel{not.}{=} S_{ff_T}^{(k)}(j\omega) \quad (1.69)$$

poartă denumirea de *densitatea spectrală de putere* a realizării particulare trunchiate. Din (1.69) rezultă că această mărime este o funcție reală, deci va conține numai puteri pare ale lui  $j\omega$ . Cu notația (1.69), puterea realizării particulare trunchiate se poate scrie sub forma:

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff_T}^{(k)}(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{ff_T}^{(k)}(j\omega) d\omega \quad (1.70)$$

Considerând, în continuare, mulțimea realizărilor particulare și notând cu  $S_{ff_T}(j\omega)$  densitatea spectrală de putere a procesului aleator trunchiat, rezultă:

$$\begin{aligned} S_{ff_T}(j\omega) &= m_1 \left\{ S_{ff_T}^{(k)}(j\omega) \right\} = m_1 \left\{ \frac{|F_T^{(k)}(j\omega)|^2}{T} \right\} = \\ &= \frac{1}{T} m_1 \left\{ F_T^{(k)}(j\omega) F_T^{(k)}(-j\omega) \right\} = \\ &= \frac{1}{T} m_1 \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T^{(k)}(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T^{(k)}(t_2) e^{j\omega t_2} dt_2 \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m_1 \left\{ f_T^{(k)}(t_1) f_T^{(k)}(t_2) \right\} e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \quad (1.71) \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$m_1 \left\{ f_T^{(k)}(t_1) f_T^{(k)}(t_2) \right\} = B_{ff_T}(t_1, t_2) \quad (1.72)$$

reprezintă funcția de autocorelație a procesului aleator trunchiat. Dacă se presupune că procesul aleator este staționar în sens larg, se poate scrie:

$$B_{ff_T}(t_1, t_2) = B_{ff_T}(t_1 - t_2) \quad (1.73)$$

Ținând cont de (1.72) și (1.73), relația (1.71) devine:

$$S_{ff_T}(j\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_{ff_T}(t_1 - t_2) e^{-j\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \quad (1.74)$$

Integrala dublă din (1.74) reprezintă volumul cuprins între suprafața

$$\phi(t_1 - t_2) = B_{ff_T}(t_1 - t_2) e^{-j\omega(t_1 - t_2)} \quad (1.75)$$

și pătratul cu latura T (figura 1.6).

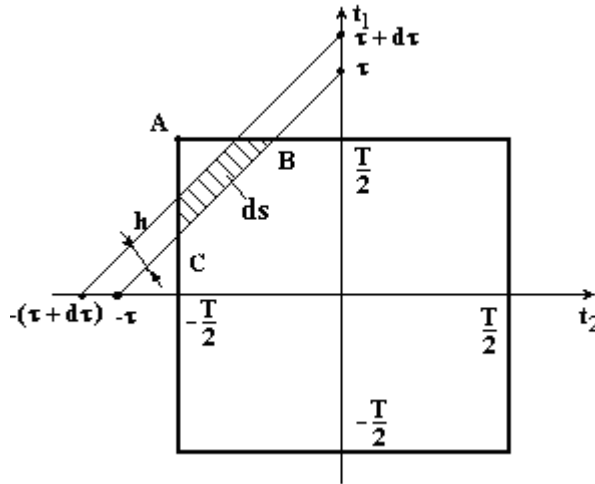


Fig. 1.6.

Această integrală dublă poate fi transformată într-o integrală simplă, dacă se face observația că pentru

$$\tau = t_1 - t_2 = \text{const.} \quad (1.76)$$

funcția  $\phi(\tau)$  este constantă pe dreapta de pantă unu:

$$t_1 = t_2 + \tau \quad (1.77)$$

Conform figurii, se poate scrie succesiv:

$$ds = BC \cdot h$$

$$h = \frac{d\tau}{\sqrt{2}}$$

$$BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \left[ \frac{T}{2} - \left( \tau - \frac{T}{2} \right) \right] = \sqrt{2}(T - \tau)$$

Deoarece  $\tau$  poate lua și valori negative, rezultă:

$$BC = \sqrt{2}(T - |\tau|) \quad (1.78)$$

Rezultă atunci că  $ds = (T - |\tau|)d\tau$ .

Cu (1.76) și (1.78), relația (1.74) devine:

$$\begin{aligned} S_{ff_r}(j\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T B_{ff_r}(\tau) e^{-j\omega\tau} (T - |\tau|) d\tau = \\ &= \int_{-T}^T B_{ff_r}(\tau) e^{-j\omega\tau} \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau \end{aligned} \quad (1.79)$$

La limită, când  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right) = 1 \quad (1.80)$$

și procesul aleator trunchiat devine netrunchiat. În aceste condiții, densitatea spectrală de putere a procesului trunchiat,  $S_{ff_r}(j\omega)$ , devine densitatea spectrală de putere a procesului netrunchiat,  $S_{ff}(j\omega)$ , iar funcția de autocorelație a procesului aleator trunchiat,  $B_{ff_r}(\tau)$ , devine funcția de autocorelație a procesului aleator

netrunchiat,  $B_{ff}(\tau)$ . Cu aceste observații, atunci când  $T \rightarrow \infty$ , relația (1.79) se poate scrie sub forma:

$$S_{ff}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.81)$$

Din (1.81) rezultă că în cazul proceselor aleatoare staționare în sens larg, densitatea spectrală de putere a procesului este transformata Fourier a funcției de autocorelație a acestuia.

Transformata Fourier inversă este:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.82)$$

Relațiile (1.81) și (1.82), care arată că densitatea spectrală de putere și funcția de autocorelație ale unui proces aleator, staționar în sens larg, sunt perechi Fourier, sunt cunoscute sub numele de *teorema Wiener-Khintchine*.

În mod similar se poate demonstra că în cazul proceselor aleatoare staționare în sens larg transformata Fourier a funcției de corelație determină *densitatea spectrală de putere de interacțiune*, adică  $S_{fg}(j\omega) = F\{B_{fg}(\tau)\}$ .

Conform relației (1.70), rezultă că puterea unui proces aleator, staționar în sens larg, se poate calcula cu relația:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{ff}(j\omega) d\omega \quad (1.83)$$

deoarece densitatea spectrală de putere  $S_{ff}(j\omega)$  este o funcție pară în  $\omega$ .

Un caz particular interesant, frecvent întâlnit în aplicații, îl reprezintă zgomotul alb, care este caracterizat de o densitate spectrală de putere constantă,  $S_0$ , în toată banda de frecvențe

$-\infty < \omega < \infty$ . În cazul zgomotului alb, conform relației (1.82), se poate scrie

$$B_{ff}(\tau) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau) \quad (1.84)$$

unde  $\delta(\tau)$  este distribuția Dirac.

Din punct de vedere fizic, funcția de autocorelație măsoară dependența statistică dintre eșantioanele prelevate dintr-un proces aleator. Deoarece  $\delta(\tau) = 0$  pentru  $\tau \neq 0$ , din (1.84) rezultă că  $B_{ff}(\tau) \neq 0$  numai pentru  $\tau = 0$ , ceea ce semnifică faptul că, în cazul unui proces aleator de tipul zgomotului alb, eșantioanele prelevate sunt statistic independente, oricât de apropiate ar fi între ele.

## 1.6. Proprietățile principale ale funcției de autocorelație

Relația (1.82) poate fi scrisă echivalent, sub forma:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) (\cos \omega\tau + j \sin \omega\tau) d\omega \quad (1.85)$$

Deoarece atât  $B_{ff}(\tau)$  cât și  $S_{ff}(j\omega)$  sunt funcții reale, din (1.85) rezultă:

$$B_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (1.86)$$

Relația (1.86) specifică prima proprietate a funcției de autocorelație a unui proces aleator, staționar în sens larg, și anume că este o funcție pară:

$$B_{ff}(\tau) = B_{ff}(-\tau) \quad (1.87)$$



Prima proprietate, că funcția de autocorelație este pară, se poate demonstra și astfel:

$$B_{ff}(\tau) = \overline{f(t_1)f(t_1+\tau)} = \overline{f(t_1+\tau)f(t_1)} = B_{ff}(-\tau) \quad (1.88)$$

Pentru a deduce a doua proprietate a funcției de autocorelație, se consideră un proces aleator, staționar în sens larg, și două variabile aleatoare  $f(t_1)$  și  $f(t_1+\tau)$ . Conform relației (1.11), rezultă:

$$B_{ff}(\tau) = \overline{f(t_1)f(t_1+\tau)}$$

Dacă  $\tau \rightarrow \infty$ , cele două variabile aleatoare  $f(t_1)$ , respectiv  $f(t_1+\tau)$ , prelevate din procesul aleator  $f(t)$ , devin statistic independente și, deci, se poate scrie relația:

$$B_{ff}(\infty) = \overline{f(t_1)} \cdot \overline{f(t_1+\infty)} = a \cdot a = a^2 = \text{const.} \quad (1.89)$$

unde prin  $a$  s-a notat valoarea medie statistică.

Cu alte cuvinte, când  $\tau \rightarrow \infty$ , funcția de autocorelație a procesului aleator, staționar în sens larg, tinde asimptotic la o constantă (în particular la zero) fie aperiodic, fie periodic amortizat, așa cum este reprezentat în figura 1.7.

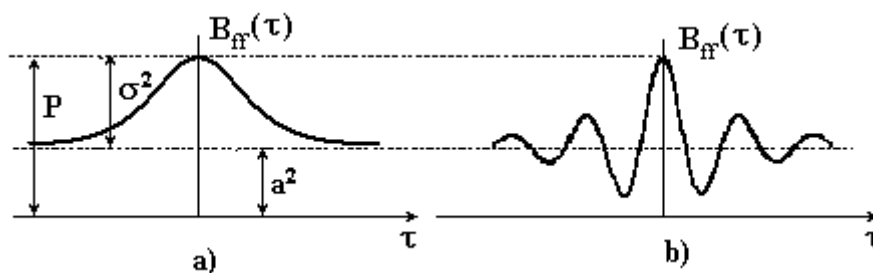


Fig 1.7. Reprezentarea grafică a funcției de autocorelație ce tinde aperiodic la  $a^2$ , a), respectiv periodic amortizat, b).

Deoarece funcția de autocorelație reprezintă o măsură a dependenței statistice între variabilele aleatoare  $f(t_1)$  și  $f(t_1+\tau)$ ,

rezultă intuitiv că pentru  $\tau = 0$  dependența statistică este cea mai puternică, adică  $B_{ff}(0)$  este valoarea maximă a funcției de autocorelație. Acest lucru se poate demonstra riguros, adică:

$$B_{ff}(0) \geq |B_{ff}(\tau)| \quad (1.90)$$

care reprezintă a treia proprietate a funcției de autocorelație.

Într-adevăr, plecându-se de la inegalitatea evidentă:

$$\left[ \overline{f(t_1) \pm f(t_1 + \tau)} \right]^2 \geq 0 \quad (1.91)$$

rezultă:

$$\overline{f^2(t_1)} \pm 2\overline{f(t_1)f(t_1 + \tau)} + \overline{f^2(t_1 + \tau)} \geq 0 \quad (1.92)$$

Dar

$$\overline{f^2(t_1)} = \overline{f(t_1)f(t_1)} = B_{ff}(0) \quad (1.93)$$

$$\overline{f(t_1)f(t_1 + \tau)} = B_{ff}(t_1 + \tau - t_1) = B_{ff}(\tau) \quad (1.94)$$

$$\overline{f^2(t_1 + \tau)} = \overline{f(t_1 + \tau)f(t_1 + \tau)} = B_{ff}(0) \quad (1.95)$$

Cu (1.93), (1.94) și (1.95), relația (1.92) devine:

$$B_{ff}(0) \pm B_{ff}(\tau) \geq 0 \quad (1.96)$$

care este echivalentă cu relația (1.90), ce trebuia demonstrată.

Pentru a pune în evidență a patra proprietate a funcției de autocorelație, se pleacă de la relația (1.82), care se particularizează pentru  $\tau = 0$  și se ține cont de (1.83), rezultând:

$$B_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) d\omega = P \quad (1.97)$$

Relația (1.97) evidențiază faptul că valoarea funcției de autocorelație în origine este egală cu puterea procesului aleator, staționar în sens larg.

În fine, a cincea proprietate a funcției de autocorelație se deduce din (1.13), (1.89) și (1.93), adică:

$$\sigma^2(t_1) = B_{ff}(0) - B(\infty) \quad (1.98)$$

Cele cinci proprietăți ale funcției de autocorelație sunt puse în evidență în figura 1.7 a,b.

Fie, în continuare, două procese aleatoare, staționare în sens larg, notate cu  $f(t)$ , respectiv  $g(t)$ . Fie, de asemenea, două variabile aleatoare  $f(t_1)$  și  $g(t_1 + \tau)$ .

Se pot scrie următoarele relații:

$$\overline{f(t_1)g(t_1 + \tau)} = B_{fg}(t_1 + \tau - t_1) = B_{fg}(\tau) \quad (1.99)$$

$$\overline{g(t_1 + \tau)f(t_1)} = B_{gf}[t_1 - (t_1 + \tau)] = B_{gf}(-\tau) \quad (1.100)$$

Deoarece

$$\overline{f(t_1)g(t_1 + \tau)} = \overline{g(t_1 + \tau)f(t_1)} \quad (1.101)$$

din (1.99) și (1.100) rezultă că în cazul a două procese aleatoare, staționare în sens larg, este adevărată relația:

$$B_{fg}(\tau) = B_{gf}(-\tau) \quad (1.102)$$

Din relația (1.102) rezultă că funcția de corelație nu mai este o funcție pară în  $\tau$ , așa cum este funcția de autocorelație. În general, funcția de corelație nu se bucură de cele cinci proprietăți ale funcției de autocorelație.

### **1.7. Determinarea funcției de autocorelație a semnalelor recepționate, afectate de perturbații**

Se presupune că se transmite semnalul  $s(t)$ , purtător de informație pe un canal perturbat de zgomot, modelat matematic de un proces aleator  $n(t)$ , staționar în sens larg. Deoarece, în general,

perturbațiile care apar pe canalul de transmisiuni au un caracter aditiv, semnalul recepționat  $r(t)$  va fi de forma

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (1.103)$$

Funcția de autocorelație a semnalului recepționat se determină cu relația

$$B_{rr}(\tau) = \overline{r(t)r(t+\tau)} \quad (1.104)$$

Înlocuind (1.103) în (1.104), rezultă

$$\begin{aligned} B_{rr}(\tau) &= \overline{[s(t) + n(t)][s(t+\tau) + n(t+\tau)]} = \\ &= B_{ss}(\tau) + B_{sn}(\tau) + B_{ns}(\tau) + B_{nn}(\tau) \end{aligned} \quad (1.105)$$

unde

$$\begin{aligned} B_{ss}(\tau) &= \overline{s(t)s(t+\tau)} \\ B_{sn}(\tau) &= \overline{s(t)n(t+\tau)} \\ B_{ns}(\tau) &= \overline{n(t)s(t+\tau)} \\ B_{nn}(\tau) &= \overline{n(t)n(t+\tau)} \end{aligned} \quad (1.106)$$

Zgomotul de pe canalul de transmisiuni este statistic independent de semnalul util, deoarece acesta apare fie că pe canal se transmite semnal util, fie că nu se transmite. Considerând, de asemenea, că procesul aleator staționar în sens larg, ce descrie zgomotul de pe canal are valoare medie statistică nulă, adică

$$\overline{n(t)} = 0 \quad (1.107)$$

rezultă

$$\begin{aligned} B_{sn}(\tau) &= \overline{s(t)} \cdot \overline{n(t+\tau)} = s(t)0 = 0 \\ B_{ns}(\tau) &= \overline{n(t)} \cdot \overline{s(t+\tau)} = 0s(t+\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.108)$$

Cu (1.108), relația (1.105) devine

$$B_{rr}(\tau) = B_{ss}(\tau) + B_{nn}(\tau) \quad (1.109)$$

Se consideră, în continuare, că semnalul util, purtător de informație este de forma

$$s(t) = A \cos \omega t \quad (1.110)$$

Rezultă atunci:

$$B_{ss}(\tau) = R_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t+\tau) dt \right] \quad (1.111)$$

sau, ținând cont de (1.110):

$$\begin{aligned} B_{ss}(\tau) &= A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega t \cos \omega(t+\tau) dt \right] = \\ &= \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega(2t+\tau) dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega \tau dt \right] \end{aligned} \quad (1.112)$$

Deoarece:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega(2t+\tau) dt \right] = 0 \quad (1.113)$$

și

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega \tau dt \right] = \cos \omega \tau \quad (1.114)$$

relația (1.112) devine:

$$B_{ss}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \quad (1.115)$$

Pe de altă parte, conform relației (1.89), rezultă:

$$B_{mm}(\infty) = a^2 = 0 \quad (1.116)$$

Din relația (1.115) rezultă că funcția de autocorelație a semnalului util, presupus periodic, este de asemenea periodică și, deci, atunci când în semnalul recepționat există și semnal util periodic, funcția de autocorelație a semnalului recepționat, pentru  $\tau$  suficient de mare, va fi un semnal periodic de forma (1.115).

Dacă în semnalul recepționat nu există și semnal util periodic, funcția de autocorelație a semnalului recepționat, pentru  $\tau$  suficient de mare, tinde asimptotic la zero.

Pe baza acestui rezultat se poate decide dacă în semnalul recepționat există sau nu semnal util, purtător de informație, chiar în situațiile severe, când nivelul semnalului util recepționat este mai mic decât nivelul zgomotului și când spectrul semnalului util este inclus în spectrul zgomotului. În astfel de condiții, prin nici o metodă clasică deterministă (filtrare sau detectare de amplitudine) nu se poate decide dacă în semnalul recepționat există sau nu semnal util.

## **1.8. Determinarea funcției pondere a unui sistem liniar invariant în timp prin metoda corelației**

Pentru determinarea funcției pondere a unui sistem liniar invariant (SLI) în timp prin metoda corelației, se folosește schema bloc din figura 1.8, unde  $f(t)$  este zgomot alb,  $g(t)$  răspunsul sistemului liniar invariant în timp la zgomotul alb, iar corelatorul, o instalație tehnică care poate calcula funcția de corelație dintre  $f(t)$  și  $g(t)$ . Conform relației (1.29), pentru un  $T$  suficient de mare și  $t_2 - t_1 = \tau$ , rezultă:

$$R_{fg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(t + \tau) dt \quad (1.117)$$

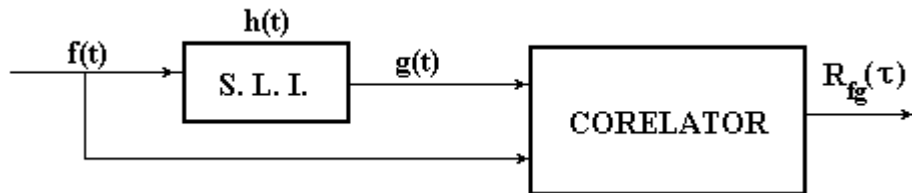


Fig. 1.8. Schema bloc pentru determinarea funcției pondere a unui S. L. I.

Dacă se notează cu  $h(t)$  funcția pondere (necunoscută) a sistemului liniar invariant în timp, conform integralei de convoluție, se poate scrie:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(t - u) du \quad (1.118)$$

Înlocuind (1.118) în relația (1.117), se obține:

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(t + \tau - u) du dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t + \tau - u) dt du \end{aligned} \quad (1.119)$$

Dar:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t + \tau - u) dt = R_{ff}(\tau - u) \quad (1.120)$$

reprezintă funcția de autocorelație a semnalului de la intrarea sistemului.

Dacă acest semnal se consideră zgomot alb, ergodic, cu densitatea spectrală de putere  $S_0$ , conform relației (1.84):

$$R_{ff}(\tau - u) = S_0 \delta(\tau - u) \quad (1.121)$$

unde  $\delta(\tau - u)$  este distribuția Dirac.

Ținând cont de (1.121) și de proprietatea de filtrare a distribuției Dirac, relația (1.119) devine

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) S_0 \delta(\tau - u) du = S_0 h(\tau) \quad (1.122)$$

Din (1.122) rezultă că funcția de corelație este proporțională cu funcția pondere a sistemului liniar invariant, necunoscut. Cunoscându-se densitatea spectrală de putere  $S_0$  a semnalului  $f(t)$ , care poate fi considerat zgomot alb pentru sistemul respectiv și calculându-se funcția de corelație dintre  $f(t)$  și răspunsul sistemului, se poate deduce funcția pondere a acestuia.

Avantajul principal al acestei metode față de metodele clasice deterministe (aplicarea la intrare a unui impuls scurt și înregistrarea răspunsului sau determinarea prin puncte a funcției de transfer etc.), constă în faptul că funcția pondere astfel determinată nu este afectată de perturbațiile care intervin în funcționarea sistemului.

Un alt avantaj al acestei metode constă în faptul că se poate determina funcția pondere a sistemului în funcțiune, deci în condiții reale.



### 1.9. Determinarea funcției de autocorelație și a densității spectrale de putere la ieșirea unui sistem analogic, liniar, invariant în timp

Se consideră  $f(t)$  un proces aleator, staționar în sens larg, care se aplică la intrarea unui sistem analogic, liniar, invariant în timp. Dacă  $h(t)$  este funcția pondere a acestui sistem, la aplicarea lui  $f(t)$ , la ieșire va rezulta de asemenea un proces aleator staționar în sens larg, notat în continuare cu  $g(t)$ , care se poate determina cu integrala de convoluție, după cum urmează:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)h(u)du \quad (1.123)$$

Funcția de autocorelație  $B_{gg}(\tau)$  a procesului aleator de la ieșirea sistemului se poate calcula, conform relației (1.11), astfel:

$$\begin{aligned} B_{gg}(\tau) &= m_1\{g(t_1)g(t_1+\tau)\} = \\ &= m_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1-u)h(u)du \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1+\tau-v)h(v)dv\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)m_1\{f(t_1-u)f(t_1+\tau-v)\}dudv \quad (1.124) \end{aligned}$$

Dar

$$m_1\{f(t_1-u)f(t_1+\tau-v)\} = B_{ff}(\tau-v+u) \quad (1.125)$$

reprezintă funcția de autocorelație a procesului aleator  $f(t)$  de la intrarea sistemului analogic, liniar, invariant în timp. Cu (1.125), relația (1.124) devine:

$$B_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau - v + u) h(u) h(v) dudv \quad (1.126)$$

Densitatea spectrală de putere de la ieșirea sistemului analogic, liniar, invariant în timp, conform teoremei Wiener - Khintchine, este transformata Fourier a funcției de autocorelație, adică:

$$S_{gg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{gg}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.127)$$

Înlocuind  $B_{gg}(\tau)$  din (1.126) în relația (1.127), rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\tau - v + u) h(u) h(v) e^{-j\omega\tau} dudvd\tau \quad (1.128)$$

Pentru o scriere mai compactă, se face schimbarea de variabilă:

$$\tau - v + u = \theta ; d\tau = d\theta \quad (1.129)$$

Cu (1.129), relația (1.128) devine:

$$S_{gg}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{j\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{-j\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \quad (1.130)$$

Dar:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{j\omega u} du &= H(-j\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{-j\omega v} dv &= H(j\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} B_{ff}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta &= S_{ff}(j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (1.131)$$

unde  $H(j\omega)$  este funcția de transfer a sistemului analogic, liniar, invariant în timp, iar  $S_{ff}(j\omega)$ , densitatea spectrală de putere a procesului aleator de la intrarea sistemului respectiv.

Cu (1.131), relația (1.130) devine:

$$S_{gg}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{ff}(j\omega) \quad (1.132)$$

În cazul în care la intrarea sistemului se aplică zgomot alb cu densitatea spectrală de putere  $S_0$ , rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_0 \quad (1.133)$$

### 1.10. Generarea de zgomote cvasialbe

Zgomotul alb este un proces aleatoriu cu densitatea spectrală de putere constantă într-o bandă infinită de frecvențe. Aceasta înseamnă că un generator de zgomot alb ar trebui să dezvolte la ieșire o putere infinită, ceea ce practic nu este posibil. Având în vedere avantajele pe care le prezintă zgomotul alb, se folosesc aproximații ale acestuia în sensul că se generează procese aleatoare cu densitatea spectrală de putere constantă într-o anumită bandă (zgomote cvasialbe).

S-a constatat că sursele primare ca: rezistoare, tranzistoare, diode Zener etc., în anumite condiții de funcționare generează zgomote cu densitatea spectrală de putere constantă într-o bandă suficient de mare, însă în domeniul frecvențelor ultrajoase, densitatea spectrală de putere tinde către zero.

Deoarece banda de trecere a majorității instalațiilor industriale este sub 5 Hz, este necesar a genera un zgomot cu densitatea spectrală constantă între 0 și aproximativ 50 de Hz. În general, în practică se alege banda de frecvențe a zgomotului generat de zece ori mai mare decât banda de trecere a sistemului cercetat. Pentru aceasta zgomotul de la sursa primară este amplificat și apoi trecut printr-un filtru trece bandă cu  $2\Delta f = f_2 - f_1$ , astfel încât la ieșirea filtrului se obține un zgomot cu densitatea spectrală

de putere constantă în această bandă. După o nouă amplificare, prin modularea zgomotului cu un tren de impulsuri dreptunghiulare de frecvență convenabil aleasă și o nouă filtrare cu un filtru trece jos se poate obține un semnal cu densitate spectrală de putere constantă într-o bandă de frecvențe începând cu frecvența de zero herți.

Zgomotul cvasialb generat de surse primare și prelucrat așa cum a fost descris este folosit tot mai rar în aplicații, deoarece prezintă instabilitate în timp și este greu de prelucrat. De aceea, în ultimul timp zgomotul cvasialb este generat prin secvențe pseudoaleatoare periodice. Aceste secvențe se bucură de următoarele proprietăți:

- a. Semnalul se prezintă ca o succesiune de impulsuri de durată elementară  $\Delta$  și multipli de  $\Delta$ , în cadrul unor asemenea intervale putând lua valorile constante  $+a$  sau  $-a$ ;
- b. Numărul total de intervale elementare  $\Delta$  în cadrul unei perioade este  $N = 2^p - 1$ , unde  $p$  este un număr întreg pozitiv;
- c. În fiecare perioadă, numărul de intervale elementare în care semnalul are valoarea  $+a$  este cu o unitate mai mare decât numărul de intervale elementare în care semnalul are valoarea  $-a$ ;
- d. Dacă se definește prin stare numărul de intervale elementare  $\Delta$  succesive în care semnalul este egal numai cu  $+a$ , sau numai cu  $-a$ , atunci numărul total de stări este egal cu  $\frac{N+1}{2} = 2^{p-1}$ ;
- e. În cadrul unei perioade, jumătate din numărul de stări au o durată egală cu  $\Delta$ , un sfert din numărul de stări au durată de

$2\Delta$ , o optime au durata  $3\Delta$  etc., exceptând o stare cu valoarea  $+a$  de durata  $p\Delta$  si starea cu valoarea  $-a$  de durata  $(p-1)\Delta$ ;

- f. Efectuând o permutare ciclică asupra unei succesiuni date se obține o nouă succesiune care, comparată cu succesiunea originală, prezintă un număr de necoincidențe cu o unitate mai mare decât numărul de coincidențe.

De obicei, secvențele pseudoaleatoare periodice se obțin din secvențe binare pseudoaleatoare periodice.

Secvențele binare pseudoaleatoare se obțin relativ simplu cu registre de deplasare cu reacții convenabil alese.

În cazul folosirii registrelor de deplasare cu reacții se obțin secvențe de impulsuri cu valoarea "1" logic si "0" logic. Printr-o convertire relativ ușoară se poate obține pentru "1" logic valoarea  $+a$  si pentru "0" logic valoarea  $-a$ .

Astfel, pentru fixarea ideilor, se considera schema din figura 1.9, unde  $B_1, B_2, B_3$  sunt circuite basculante bistabile (celule binare).

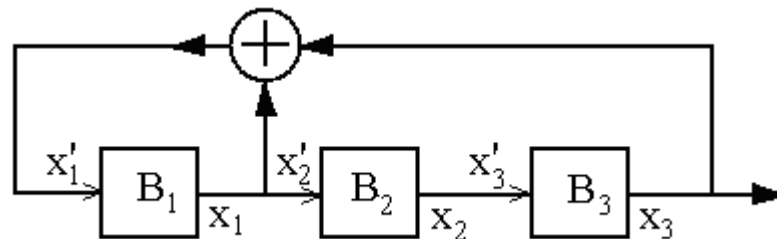


Fig. 1.9. Registru de deplasare cu reacție întocmit după polinomul

$$g(x) = 1 \oplus x^2 \oplus x^3$$

Dacă  $x_1', x_2', x_3'$  sunt variabilele de la intrarea celulelor binare, iar  $x_1, x_2$  și  $x_3$  stările celulelor binare, înainte aplicării tactului, se poate scrie:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \oplus x_3 \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.134)$$

Sub formă matriceală sistemul de ecuații (1.134) se poate scrie echivalent sub forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \quad (1.135)$$

Presupunând că inițial celulele binare se află în starea 1 logic, adică:

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Și dacă se notează cu  $[T]$  matricea

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.136)$$

atunci la aplicarea primului tact starea registrului devine:

$$S(1) = [T]S(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La următoarele tacte se poate scrie:

$$S(2) = [T]S(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad S(3) = [T]S(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$S(4) = [T]S(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S(5) = [T]S(4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad S(6) = [T]S(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se observă ușor ca la următorul tact se revine în starea inițială, adică:

$$S(7) = [T]S(6) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Secvența de ieșire a ultimei celule binare are structura 1110100. Se poate verifica ușor că toate cele șase proprietăți ale unei secvențe pseudoaleatoare periodice sunt verificate. Ieșirile celorlalte celule binare vor fi, de asemenea, secvențe pseudoaleatoare periodice, fiind permutări ciclice ale primei secvențe.

În general, dacă registrul de deplasare este format din  $p$  celule binare, atunci, ținând cont ca fiecare celulă poate fi în două stări “1” sau “0”, rezultă că registrul de deplasare poate fi în  $2^p$  stări distincte.

Excluzând starea cu toate celulele binare în “0” logic, rezultă  $2^p - 1$  stări distincte, deci secvențe formate din maximum  $2^p - 1$  biți.

Pentru obținerea lungimii maxime  $2^p - 1$ , reacțiile trebuie conectate convenabil (vezi tabelul 1). În caz contrar lungimile secvențelor vor rezulta mai mici.

**Tabelul 1**

Numărul de celule binare	Celulele de la care se iau semnele pentru reacția sumă modulo 2	Perioada semnalului
2	$1 \oplus 2$	3
3	$1 \oplus 3$ sau $2 \oplus 3$	7
4	$3 \oplus 4$ sau $1 \oplus 4$	15
5	$3 \oplus 5$ sau $2 \oplus 5$	31
6	$1 \oplus 6$ sau $5 \oplus 6$	63
7	$4 \oplus 7$	127
8	$4 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 8$	255
9	$5 \oplus 9$	511
10	$7 \oplus 10$	1023
11	$9 \oplus 11$	2047
12	$1 \oplus 12$ sau $4 \oplus 12$	4095

Având în vedere caracterul periodic al secvenței, și funcția sa de autocorelație va fi periodică. Calculul funcției de autocorelație într-o perioadă  $N\Delta$  se efectuează folosind relația:

$$R_{xx}^N(k\Delta) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} \int_0^{i_n\Delta} x(t_1)x(t_1 + k\Delta)dt_1 \quad (1.137)$$

în care:

$n$  – numerotarea stărilor;

$i_n$  - numărul de intervale elementare corespunzătoare stării a  $n$ -a;

$a_{n+k} = \pm a$  este valoarea semnalului decalat cu  $k$  intervale față de semnalul de bază;



$k\Delta$  - parametrul de întârziere sau decalare.

Funcția de autocorelație scrisă sub această formă se poate calcula separat, pe intervale în care semnalele sunt identice sau decalate.

Se disting următoarele cazuri:

1)  $k=0$

$$R_{xx}^N(0) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} \int_0^{i_n\Delta} a_n a_n dt = \frac{a^2}{N\Delta} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} i_n\Delta = a^2 \quad (1.138)$$

deoarece suma numărului de intervale elementare corespunzătoare tuturor stărilor este egală cu  $N$ , adică

$$\sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} i_n = N \quad (1.139)$$

2)  $|k| < 1$

$$\begin{aligned} R_{xx}^N(k\Delta) &= \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} \int_0^{i_n\Delta} x(t_1)x(t_1+k\Delta)dt_1 = \\ &= \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} \left[ \int_0^{k\Delta} x(t_1)x(t_1+k\Delta)dt_1 + \int_{k\Delta}^{i_n\Delta} x(t_1)x(t_1+k\Delta)dt_1 \right] \end{aligned} \quad (1.140)$$

Ținând cont că pe intervalul  $0-k\Delta$  stările celor două secvențe nu coincid, iar pe intervalul  $k\Delta-i_n\Delta$  stările celor două secvențe coincid, relația (1.140) devine

$$\begin{aligned} R_{xx}^N(k\Delta) &= \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} \left[ -a^2k\Delta + a^2(i_n\Delta - k\Delta) \right] = \\ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} (a^2i_n - 2a^2k) &= a^2 \left( 1 - 2\frac{N+1}{N}k \right) = \left( 1 - \frac{N+1}{N}k \right) a^2 \end{aligned} \quad (1.141)$$

3)  $|k| \geq 1$

Considerând mai întâi  $k$  întreg, rezultă, conform proprietății f) că numărul de necoincidențe este mai mare cu unu decât numărul de coincidențe și, deci:

$$R_{xx}^N(k\Delta) = \frac{1}{N\Delta}(-a^2\Delta) = -\frac{a^2}{N} \quad (1.142)$$

Datorită caracterului ciclic al secvenței pentru  $|k| > 1$ , adică decalaje mai mari decât  $\Delta$ , proprietatea f) se conservă și funcția de autocorelație păstrează aceeași valoare dată de (1.142).

Rezultă atunci că reprezentarea grafică a funcției de autocorelație în funcție de parametrul  $\tau = k\Delta$  este dată în figura 1.10.

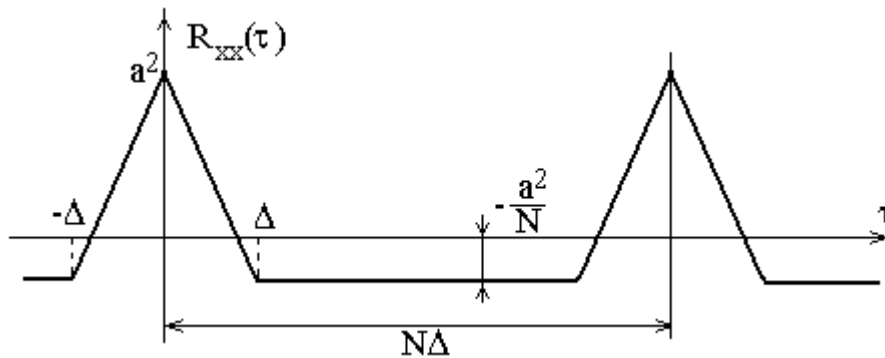


Fig. 1.10. Reprezentarea grafică a funcției de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatoare periodice

Din figura 1.10 se observă că funcția de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatoare se apropie cu atât mai mult de funcția de autocorelație a zgomotului alb, cu cât  $\Delta$  este mai mic și  $N$  este mai mare.

### 1.11. Probleme rezolvate

1. Un punct efectuează o mișcare armonică de forma  $x = a \sin \omega t$ . Să se determine densitatea de repartiție de ordinul întâi,  $w_1(x)$ , a mărimii  $x$  în orice moment de timp  $t$ , dacă probabilitatea aflării punctului în intervalul  $(x, x+dx]$  este proporțională cu lungimea intervalului  $dx$  și invers proporțională cu viteza din momentul de timp corespunzător. Să se determine apoi funcția de repartiție de ordinul întâi,  $F_1(x)$ , și probabilitatea ca punctul să se afle în intervalul  $(-a < x \leq -a/2)$ .

*Soluție*

Conform relației (1.52), se poate scrie:

$$w_1(x)dx = Cdt$$

unde  $C$  este o constantă de proporționalitate.

Rezultă atunci:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= C \frac{dt}{dx} = \frac{C}{\frac{dx}{dt}} = \frac{C}{a\omega \cos \omega t} = \frac{C}{a\omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}} = \\ &= \frac{C}{a\omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{C}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Deoarece  $w_1(x)$  este o mărime reală, rezultă:

$$w_1(x) = \frac{C}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ pentru } |x| < a$$

Pentru determinarea constantei de proporționalitate, se folosește relația generală:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x_1; t_1) dx_1 = 1$$

În acest caz:

$$\int_{-a}^a \frac{C dx}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{C}{\omega} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = 1 \Rightarrow C = \frac{\omega}{\pi}$$

Deci:

$$w_1(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ pentru } |x| < a$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x w_1(x) dx = \int_{-a}^x \frac{dx}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\begin{aligned} P \left\{ -a < x \leq -\frac{a}{2} \right\} &= \int_{-a}^{-\frac{a}{2}} w_1(x) dx = \int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} w_1(x) dx - \int_{-\infty}^{-a} w_1(x) dx = \\ &= F_1 \left( -\frac{a}{2} \right) - F_1(\infty) - F_1(-a) + F_1(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \\ &-\frac{1}{\pi} \arcsin(-1) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Valoarea efectivă a tensiunii fluctuante ce corespunde zgomotului staționar cu componentă continuă nulă descris de o lege de repartiție normală este  $U_{ef}=16V$ . Să se determine probabilitatea ca zgomotul să depășească nivelul de prag  $U_p=20V$ . Se dă valoarea funcției Laplace  $F(1,25)=0,895$ .

*Soluție*

Conform relației (1.51), legea de repartiție a zgomotului, reprezentat prin tensiunea fluctuantă, este de forma:

$$w_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}U_{ef}} e^{-\frac{u^2}{2U_{ef}^2}} = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{16^2}}$$

Conform relației (1.61), rezultă:

$$\begin{aligned} P\{u \geq U_p\} &= P\{u \geq 20\} = \int_{20}^{\infty} w_1(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(u) du - \int_{-\infty}^{20} w_1(u) du = \\ &= F(\infty) - \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{20} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{16^2}} du \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

$$\frac{u}{16} = v, du = 16dv$$

rezultă:

$$\begin{aligned} P\{u \geq 20\} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{20}{16}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - F\left(\frac{20}{16}\right) = 1 - F(1,25) = \\ &= 1 - 0,895 = 0,105 \end{aligned}$$

**3.** Funcția caracteristică este definită ca transformata Fourier a densității de repartiție de ordinul întâi cu semnul lui  $\omega$  inversat, adică o funcție  $\psi(\omega)$  de forma:

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) e^{j\omega x} dx$$

Să se demonstreze că

$$\overline{f(t_1)} = m_1\{f(t_1)\} = \frac{1}{j} \left[ \frac{d\psi(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0}$$

$$\overline{f^2(t_1)} = m_1\{f^2(t_1)\} = \frac{1}{j^2} \left[ \frac{d^2\psi(\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0}$$

etc., unde  $j = \sqrt{-1}$ .

Să se calculeze apoi, pe această cale, valoarea medie în cazul legii de repartiție uniforme, definite prin relația:

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad \text{pentru } a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad \text{pentru } x > b \text{ si } x < a \end{cases}$$

*Soluție*

$$\left. \frac{d\psi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} jxw_1(x)e^{j\omega x} dx \right]_{\omega=0} = j \int_{-\infty}^{\infty} xw_1(x) dx = j \overline{f(t_1)} \Rightarrow$$

$$\overline{f(t_1)} = \frac{1}{j} \left[ \frac{d\psi(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\psi(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} j^2 x^2 w_1(x) e^{j\omega x} dx \right]_{\omega=0} = \\ &= j^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x) dx = j^2 \overline{f^2(t_1)} \Rightarrow \overline{f^2(t_1)} = \frac{1}{j^2} \left[ \frac{d^2\psi(\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} \end{aligned}$$

În cazul legii de repartiție uniforme, funcția caracteristică este de forma:

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) e^{j\omega x} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{j\omega x} dx = \frac{1}{j\omega(b-a)} (e^{j\omega b} - e^{j\omega a})$$

$$\left. \frac{d\psi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \frac{1}{b-a} \frac{(jbe^{j\omega b} - jae^{j\omega a})j\omega - j(e^{j\omega b} - e^{j\omega a})}{j^2\omega^2} \Big|_{\omega=0} = j \frac{b+a}{2}$$

Rezultă atunci:

$$\overline{f(t_1)} = \frac{1}{j} \left. \frac{d\psi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \frac{b+a}{2}$$

4. Un semnal staționar și ergodic,  $x$ , este caracterizat prin densitatea spectrală de putere:

$$S_{xx}(j\omega) = \frac{2}{1 + 4\omega^2}$$

Dacă semnalul  $x$  este repartizat după o lege normală, să se determine această lege.

*Soluție*

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\bar{x})^2}$$

unde  $\bar{x}$  și  $\sigma^2$  reprezintă valoarea medie și dispersia.

Conform relațiilor (1.89) și (1.98), rezultă:

$$\bar{x} = \sqrt{B_{xx}(\infty)} \quad \text{și} \quad \sigma^2 = B_{xx}(0) - B_{xx}(\infty)$$

Pentru a calcula funcția de autocorelație  $B_{xx}(\tau)$ , se folosește teorema Wiener - Khintchine:

$$B_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Efectuând schimbarea de variabilă:

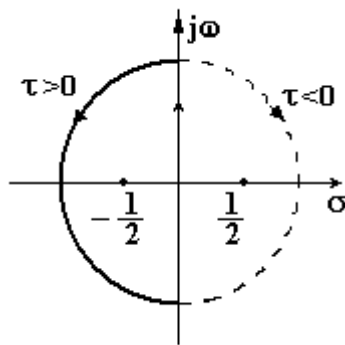
$j\omega = s, \Rightarrow d\omega = \left(\frac{1}{j}\right) ds$  și atunci:

$$S_{xx}(s) = \frac{2}{4\left(\frac{1}{4} - s^2\right)} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(\frac{1}{2} + s\right)}$$

Funcția de autocorelație se poate calcula folosind teorema reziduurilor.

$$B_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau} ds}{2\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(\frac{1}{2} + s\right)} =$$

$$= \begin{cases} \left. \frac{e^{s\tau}}{2\left(\frac{1}{2}-s\right)} \right|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}}, & \text{pentru } \tau \geq 0 \\ \left. \frac{e^{s\tau}}{2\left(\frac{1}{2}+s\right)} \right|_{s=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{2}}, & \text{pentru } \tau < 0 \end{cases}$$



Deci:

$$B_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$$

și atunci

$$\bar{x} = \sqrt{B_{xx}(\infty)} = 0, \text{ iar } \sigma^2 = B_{xx}(0) - B_{xx}(\infty) = 1/2$$

Legea de repartiție a semnalului va fi de forma:

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$



5. Să se deducă funcția de autocorelație de la ieșirea unui filtru trece jos ideal, caracterizat prin funcția de transfer  $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ , unde:

$$A(\omega) = \begin{cases} A, & \text{pentru } |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & \text{pentru } |\omega| \geq \omega_1 \end{cases}$$

dacă la intrarea acestuia se aplică zgomot alb cu densitatea spectrală de putere  $S_0$ .

*Soluție*

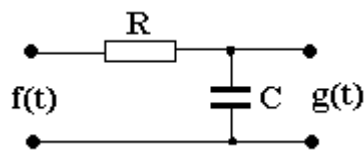
Conform relației (1.133), rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_0 = \begin{cases} A^2 S_0, & \text{pentru } |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & \text{pentru } |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

Conform teoremei Wiener - Khintchine:

$$B_{gg}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{A^2 S_0}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{A^2 S_0}{\pi\tau} \sin \omega_1 \tau$$

6. Fie filtrul RC din figura alăturată.



Să se determine funcția de autocorelație de la ieșire,  $B_{gg}(\tau)$ , dacă la intrare se aplică zgomot alb  $f(t)$ , cu densitatea spectrală de putere  $S_{ff}(j\omega) = S_0$

*Soluție*

Conform relației (1.132), rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{ff}(j\omega)$$

Funcția de transfer,  $H(j\omega)$  a filtrului este:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Rezultă atunci:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + j\omega RC} \frac{1}{1 - j\omega RC} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

Deoarece  $S_{ff}(j\omega) = S_0$ , rezultă:

$$S_{gg}(j\omega) = \frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2}, B_{gg}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

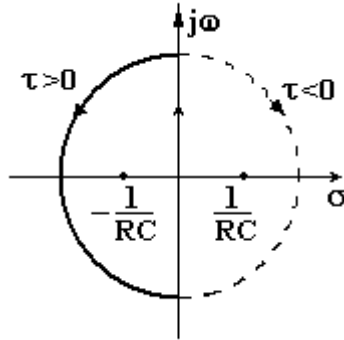
Efectuând schimbarea de variabilă  $j\omega = s$ ,  $\Rightarrow d\omega = \left(\frac{1}{j}\right) ds$  și atunci:

$$B_{gg}(\tau) = \frac{S_0}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau} ds}{(1 + sRC)(1 - sRC)} = \frac{1}{2\pi j} \frac{S_0}{(RC)^2} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{s\tau} ds}{\left(\frac{1}{RC} + s\right)\left(\frac{1}{RC} - s\right)} =$$

$$= \begin{cases} \left. \frac{\frac{S_0}{(RC)^2} e^{s\tau}}{\left(\frac{1}{RC} - s\right)} \right|_{s=-\frac{1}{RC}} & = \frac{S_0}{2RC} e^{-\frac{\tau}{RC}}, \text{ pentru } \tau \geq 0 \\ \left. \frac{\frac{S_0}{(RC)^2} e^{s\tau}}{\left(\frac{1}{RC} + s\right)} \right|_{s=\frac{1}{RC}} & = \frac{S_0}{2RC} e^{\frac{\tau}{RC}}, \text{ pentru } \tau < 0 \end{cases}$$

Scris sub formă compactă, rezultă:

$$B_{gg}(\tau) = \frac{S_0}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$



7. Fie  $X(t) = \{x^{(k)}(t)\}$  și  $Y(t) = \{y^{(k)}(t)\}$  două procese aleatoare legate prin relația  $Y(t) = L_t[X(t)]$ , unde  $L_t$  este un operator liniar ce operează asupra variabilei  $t$ . Dacă  $L_t$  este operatorul de derivare, să se arate că:

$$B_{XX}(t_1, t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_2}; \quad B_{XX}(t_1, t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1};$$

$B_{XX}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ , unde  $\dot{X}(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial t}$ , iar  $B_{XX}(t_1, t_2)$  este

funcția de autocorelație. Dacă  $X(t)$  este staționar în sens larg, să se

arate că:  $B_{XX}(t_1 - t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_2}$ ;  $B_{XX}(t_1 - t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_1}$ ;

$$B_{XX}(t_1 - t_2) = \frac{\partial^2 B_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

*Soluție*

Fie  $X(t_1) = \{x^{(k)}(t_1)\}$  și  $Y(t_1) = \{y^{(k)}(t_1)\}$  două variabile aleatoare ale proceselor aleatoare  $X(t)$  și  $Y(t)$ . Cele două procese aleatoare sunt legate prin relația

$$Y(t) = L_t[X(t)] \quad (\text{p7.1})$$

Multiplicând la stânga relația (p7.1) cu  $X(t_1)$  și mediind apoi ambii membri pentru  $t = t_2$ , rezultă

$$E\{X(t_1)Y(t_2)\} = E\{X(t_1)L_{t_2}[X(t_2)]\} = L_{t_2}[E\{X(t_1)X(t_2)\}]$$

$$\text{Dar} \quad E\{X(t_1)Y(t_2)\} = B_{XY}(t_1, t_2)$$

reprezintă funcția de corelație și

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = B_{XX}(t_1, t_2)$$

reprezintă funcția de autocorelație.

Deci, se poate scrie

$$B_{XY}(t_1, t_2) = L_{t_2}[B_{XX}(t_1, t_2)] \quad (\text{p7.2})$$

Multiplicând la dreapta relația (p7.1) cu  $X(t_2)$  și mediind apoi ambii membri pentru  $t = t_1$ , rezultă

$$E\{Y(t_1)X(t_2)\} = E\{L_{t_1}[X(t_1)]X(t_2)\} = L_{t_1}[E\{X(t_1)X(t_2)\}]$$

sau

$$B_{YX}(t_1, t_2) = L_{t_1}[B_{XX}(t_1, t_2)] \quad (\text{p7.3})$$

Multiplicând la dreapta relația (p7.1) cu  $Y(t_2)$  și mediind apoi ambii membri pentru  $t = t_1$ , rezultă

$$E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{L_{t_1}[X(t_1)]Y(t_2)\} = L_{t_1}[E\{X(t_1)Y(t_2)\}]$$

sau

$$B_{YY}(t_1, t_2) = L_{t_1}[B_{XY}(t_1, t_2)] \quad (\text{p7.4})$$

În cazul particular când operatorul  $L_t$  este de derivare și procesul aleator  $X(t)$  este staționar în sens larg, relațiile (p7.2), (p7.3), (p7.4) devin

$$B_{XX}(t_1 - t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_2} \quad (\text{p7.2'})$$

$$B_{\dot{X}X}(t_1 - t_2) = \frac{\partial B_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_1} \quad (\text{p7.3'})$$

$$B_{\dot{X}\dot{X}}(t_1 - t_2) = \frac{\partial^2 B_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (\text{p7.4'})$$

Dacă se face notația  $t_1 - t_2 = \tau$ , se poate scrie echivalent:

$$B_{\dot{X}X}(\tau) = -\frac{\partial B_{XX}(\tau)}{\partial \tau} \quad (\text{p7.2''})$$

$$B_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = \frac{\partial B_{XX}(\tau)}{\partial \tau} \quad (\text{p7.3''})$$

$$B_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = -\frac{\partial^2 B_{XX}(\tau)}{\partial \tau^2} \quad (\text{p7.4''})$$