

CAPITOLUL III

COMPRESIA DATELOR

III.1 Introducere

Compresia este procedeul de reducere a entropiei unui semnal (continuu sau discret) în vederea obținerii unei rate de transmisie care să nu depășească valoarea capacității canalului de transmisie. Entropia surselor continue de informație este practic infinită. Pentru transmisia digitală a mesajelor furnizate de acestea, este necesară discretizarea lor prin operații succesive de filtrare, eșantionare, cuantizare și codare. În cazul surselor discrete, codurile de compresie se folosesc atunci când transmisia trebuie efectuată cu o rată mai mică decât entropia sursei sau în cazul în care cantitatea de date ce trebuie stocată depășește spațiul de memorie disponibil.

Performanțele unui cod de compresie se exprimă prin următorii *parametri*:

- ◆ rată de compresie;
- ◆ rata erorilor de decodare (grad de distorsionare);
- ◆ timpi de codare/decodare.

Indiferent de natura semnalului procesat (unidimensional sau semnal de imagine bi- sau tridimensional), compresia se realizează pe mai multe nivele, prin:

- ◆ alegerea dimensiunilor laticii de eșantionare (în spațiul semnalelor cu două sau trei dimensiuni se utilizează **pixelul**, echivalentul intervalului elementar de eșantionare din cazul semnalelor unidimensionale);
- ◆ stabilirea numărului de nivele de cuantizare (în particular, două nivele pentru cuantizare binară);
- ◆ aplicarea unei anumite legi de codare.

Observații:

1. Nivelul distorsiunilor introduse în semnal depinde și de forma laticii cu care se partiționează semnalul precum și de natura legii de cuantizare.
2. Teoria comunicațiilor se bazează tot mai mult pe statistica matematică. Natura mesajelor transmise printr-un sistem de comunicații digitale este neesențială. Aspectul statistic al comunicațiilor, atât în ce privește caracterul aleator al mesajelor transmise, cât și perturbațiile datorate canalelor de transmisie, a fost studiat pentru prima oară de Shannon (1948) pe baza unor

studii anterioare asupra semnalelor digitale elaborate de Nyquist (1924, 1928) și Hartley (1928) [Bla90]. Asemănător tehnicii scrisului, exprimarea digitală a informației se realizează prin folosirea unui alfabet cu număr finit de simboluri.

III.2 Eșantionarea semnalelor analogice

Teorema eșantionării a fost introdusă în teoria comunicațiilor de către Nyquist și generalizată de către Shannon (1948).

Teorema eșantionării (Shannon-Nyquist)

"Un semnal de bandă limitată (BL - *Band Limited*) poate fi reconstituit în mod unic din eșantioanele sale dacă rata de eșantionare este cel puțin egală cu dublul frecvenței maxime din spectrul semnalului ($W = 2W_0$ - rata Nyquist), conform relației:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \text{sinc}[\Omega_0(t - nT)] \quad (\text{III.1})$$

S-au făcut notațiile:

$f(t)$ - semnalul de BL ;

W_0 - frecvența maximă din spectrul semnalului;

$T=1/2W_0$ - perioada de eșantionare;

$\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$, x nenul.

Observații:

❶ Expresia matematică (III.1) a teoremei eșantionării reprezintă o dezvoltare în serie a semnalelor BL în raport cu funcțiile ortogonale:

$$\varphi_n(t) = \text{sinc}[\Omega_0(t - nT)] \quad (\text{III.2})$$

Expresia semnalului reconstituit devine:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t) \text{ unde } \alpha_n = f(nT) \quad (\text{III.3})$$

Spectrul α_n este dat de eșantioanele semnalului la momentele discrete de timp nT .

❷ Funcțiile de BL (W_0) formează un spațiu vectorial liniar numărabil, cu baza ortogonală $\{\varphi_n(t)\}$.

❸ Prin dualitate, transformata Fourier a unui semnal limitat în timp (T) poate fi reconstituită din eșantioanele sale la valori discrete de frecvență: $n/2T$.

④ În practică, frecvența de eșantionare este determinată de filtrul trece-jos (*antialiasing*) care precede circuitul propriu-zis de eșantionare .

Generalizarea I (Shannon)

"Dacă se dispune de semnalul $f(t)$ și derivatele sale $f'(t), \dots, f^{(M-1)}(t)$, toate de BL, atunci semnalul $f(t)$ poate fi reconstituit din eșantioanele uniform distribuite în timp ale acestor M semnale, luate cu o rată $1/M$ din rata Nyquist." (*undersampling function reconstruction*).

O generalizare a acestei teoreme, referitoare la eșantionarea unui semnal obținut prin multiplexarea mai multor surse, a fost dată de Athanasios Papoulis [Pap77].

Generalizarea a II-a (Papoulis)

"Un semnal $f(t)$ de BL ($W=1/T$) poate fi reconstituit din eșantioanele uniform distribuite ale semnalelor de ieșire g_k (T - perioada de eșantionare) din m sisteme cu funcțiile de transfer $H_k(\omega)$ ($k = 1; 2.. m$), luate cu frecvența de eșantionare de m ori mai mică decât rata Nyquist".

Formula de interpolare este:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m g_k(nT) y_k(t - nT) \right] \quad (\text{III.4})$$

cu semnalele de interpolare:

$$y_k(t) = \frac{1}{c} \int_{-\Omega_0}^{-\Omega_0+c} Y_k(\omega, t) \exp(j\omega t) d\omega \quad (\text{III.5})$$

unde T este perioada de eșantionare dată de relația:

$$T = m \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{c} \quad (\text{III.6})$$

iar funcțiile $Y_k(\omega, t)$ sunt soluțiile sistemului de ecuații:

$$\begin{aligned} H_1(\omega)Y_1(\omega, t) &+ \dots + H_m(\omega)Y_m(\omega, t) &= 1 \\ H_1(\omega+c)Y_1(\omega, t) &+ \dots + H_m(\omega+c)Y_m(\omega, t) &= \exp(jct) \\ \dots & \dots & \dots \\ H_1[\omega+(m-1)c]Y_1(\omega, t) &+ \dots + H_m[\omega+(m-1)c]Y_m(\omega, t) &= \exp[j(m-1)ct] \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Observație:

Eșantionarea sub rata Nyquist este deosebit de utilă în sistemele de comunicații de date de mare viteză precum și în demodulatele digitale.

Eșantionarea semnalelor de bandă nelimitată devine posibilă prin rezultatele cercetătorului chinez Yang-Ming Zhu [Yan92].

Generalizarea a III-a (Yang-Ming Zhu)

"Fie $f(t)$ o funcție de o singură variabilă. Dacă există o aplicație $g(t)$ inversabilă astfel încât $g(f(t))$ să fie de bandă limitată (W_0), atunci $f(t)$ poate fi determinată unic de eșantioanele $g(f(nT))$ luate cu rata Nyquist $1/2W_0$, conform formulei de interpolare:

$$f(t) = g^{-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[f(nT)] \operatorname{sinc}[\Omega_0(t-nT)] \right\}. \quad (\text{III.8})$$

Observație: Generalizarea a III-a a teoremei eșantionării face posibilă eșantionarea și refacerea fără distorsiuni a semnalelor limitate în timp (de tip impuls) precum și reducerea ratei de eșantionare sub valoarea ratei Nyquist în cazul semnalelor de tip BL.

În concluzie, pentru transmisia prin sisteme digitale de comunicații a semnalelor generate de surse analogice (voce, audio, video etc) se realizează eșantionarea acestora și cuantizarea liniară sau neliniară a valorilor eșantioanelor cu un anumit număr de biți. Optimizarea legilor de cuantizare constituie o problemă de codare a surselor de informație și va fi detaliată în paragraful cuprinzând codurile de compresie a datelor.

III.3 Eșantionarea semnalelor trece-bandă

Teorema eșantionării enunțată de Shannon se referă la semnalele în banda de bază. Discretizarea semnalelor modulate cu o frecvență purtătoare (f_0) mult mai mare decât banda (W) a semnalului modulator poate fi efectuată conform teoremei clasice a eșantionării în condiții dezavantajoase, cu cel puțin $2(f_0+W)$ eșantioane/secundă, respectiv un număr foarte mare de biți. Debitul binar poate fi redus prin folosirea unei rate de eșantionare comparabilă cu lățimea benzii semnalului modulator [Bla90]. În cazul sistemelor liniare, acest lucru devine posibil prin folosirea echivalentului de joasă-frecvență al semnalului trece-bandă (TB) adică prin prelucrarea componentelor de joasă-frecvență din semnalul modulat:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_m(t) \exp(j \cdot 2\pi f_0 t) = [v_{Re}(t) + j v_{Im}(t)] \exp(j \cdot 2\pi f_0 t) = \\ &= v_I(t) \cos(2\pi f_0 t) + v_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$



Fig.III.1 Eșantionarea semnalelor TB cu un singur circuit de eșantionare

Notatii:

$v_m(t)$ - semnalul modulator complex;

$\exp(j 2\pi f_0 t)$ - semnalul purtător complex;

$v_{re}(t)$, $v_{im}(t)$ - componentele reală și imaginară ale semnalului modulator;

$v_I(t)$, $v_Q(t)$ - componentele în fază și în cuadratură ale semnalului modulat.

Semnalul $v(t)$ este de tip TB dacă transformata sa Fourier este nulă în afara unei benzi finite de frecvențe:

$$V(f) = F\{v(t)\} = 0 \text{ pentru } |f \pm f_0| \leq W \quad (\text{III.10})$$

($F\{\dots\}$ semnifică transformata Fourier a semnalului.)

Dacă se eșantionează componentele v_I și v_Q , conform teoremei lui Shannon se vor transmite $4W$ eșantioane/secundă din care semnalul modulat poate fi refăcut în mod unic. Este avantajos să se folosească același circuit de eșantionare pentru ambele componente.

Se alege perioada de eșantionare ca multiplu al perioadei purtătoarei:

$$T = nT_0 = n / f_0 \quad (\text{III.11})$$

și se eșantionează semnalul la momentele kT respectiv $kT + T_0/4$. Se obțin eșantioanele:

$$v(kT) = v_I(kT) \quad (\text{III.12})$$

$$v(kT + T_0/4) = v_Q(kT + T_0/4) \quad (\text{III.13})$$

Pentru frecvențe purtătoare mari se poate considera că eșantioanele respective sunt obținute sincron, la aceleași momente de timp (Fig. III.1) [Pap77].

Formula de interpolare:

$$v(t) = \sum_k v_I(t) \sin c[W(t - kT)] \cos(2\pi f_0 t) + \sum_k v_Q(kT + \frac{T_0}{4}) \sin c[W(t - kT - \frac{T_0}{4})] \sin(2\pi f_0 t) \quad (\text{III.14})$$

Se elimină astfel dezavantajele metodei cu două circuite de eșantionare care ar trebui să lucreze sincron, să aibă aceleași performanțe și să lucreze pe același principiu.

III.4 Eșantionarea semnalelor de imagine bidimensionale

În vederea procesării digitale a semnalelor de imagine bidimensionale este necesară discretizarea acestora prin eșantionare și cuantizare pe un anumit număr de nivele (de exemplu: gama de culori). În cazul imaginilor alb-negru, prin discretizarea imaginii se obține o matrice binară.

Eșantionarea poate fi efectuată asupra diferitelor componente ale semnalului de imagine: luminanță, crominanță, valoare a unuia dintre tristimulii R,G,B.

În cazul eșantionării bidimensionale, apar numeroase aspecte similare cu eșantionarea unidimensională, datorită ortogonalității semnalelor de reconstrucție de tip *sinc* și a componentelor semnalului de eșantionare.

Se utilizează ca **semnal de eșantionare spațial** funcția bidimensională definită de relația:

$$\Phi(x; y) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \delta(x - n_1 S_x) \delta(y - n_2 S_y) \quad (\text{III.16})$$

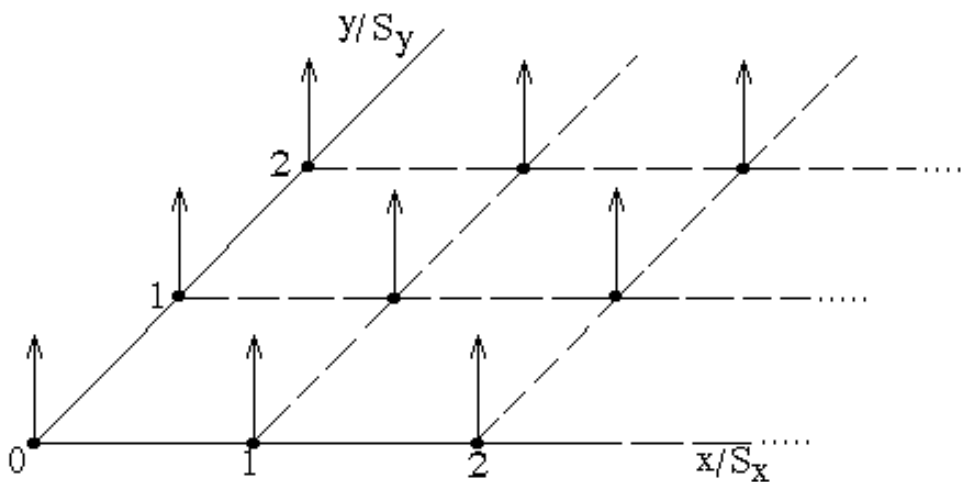


Fig.III.2 Funcția de scanare cu spot rectangular

S_x și S_y reprezintă intervalele de eșantionare (în particular de valori egale) pe cele două axe ale sistemului ortogonal de coordonate corelat cu orizontala și verticala imaginii prelucrate (Fig.III.2). N_1 și N_2 sunt dimensiunile matricii de imagine.

Funcția globală de eșantionare este definită după cum urmează:

$$\Gamma(t; x; y) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] \Phi(x; y) \quad (\text{III.17})$$

Prin T s-a notat perioada de eșantionare a imaginii.

Semnalul bidimensional discretizat se obține ca produs al funcției globale de eșantionare cu funcția analogică de imagine $F(t; x; y)$:

$$F(n; n_1; n_2) = F(t; x; y) \Gamma(t; x; y) \quad (\text{III.18})$$

unde prin n se simbolizează variabila discretă de timp.

Formula de interpolare în caz bidimensional este:

$$F(t; x; y) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n; n_1; n_2) \operatorname{sinc} \left[\frac{1}{T}(t - nT) \right] \right\} * h(x; y) \quad (\text{III.19})$$

Notatii: * este simbolul produsului de convoluție; $h(x; y)$ reprezintă funcția răspuns-la-impuls a filtrului de reconstituire a imaginii analogice [Pra91]:

$$h(x; y) = k \operatorname{sinc} \left(\frac{x}{S_x} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{y}{S_y} \right) \quad (\text{III.20})$$

Observație: Pot fi folosite pentru scanarea imaginii spoturi rectangulare dar și spoturi de formă gaussiană care reduc erorile de rezoluție.

III.5 Cuantizarea scalară a semnalelor

Performanțele unui circuit de cuantizare se exprimă prin **numărul nivelelor de cuantizare** ($n = 2^b$), respectiv numărul de biți ai cuantizorului (b) și prin **puterea zgomotului de cuantizare** (N_q), respectiv raportul puterilor de semnal/zgomot de cuantizare (S/N_q), care se pot calcula cu relațiile:

$$S = \int_A^B (x - m)^2 p(x) dx \quad (\text{III.21})$$

S - puterea de c.a. a semnalului util.

m - valoarea medie a semnalului;

$[A; B]$ - domeniul valorilor nivelelor de semnal;

$p(x)$ - funcția de distribuție probabilistică a semnalului aleator;

$$N_q = \frac{(B-A)^2}{12} 2^{-2b} \int_A^B p(x) [c'(x)]^{-2} dx \quad (\text{III.22})$$

N_q - distorsiunea medie pătratică (puterea zgomotului) de cuantizare;

$c(x)$ - funcția de cuantizare sau caracteristica de intrare-ieșire a cuantizatorului.

În cazul surselor cu distribuție uniformă de valori se folosesc *cuantizoare liniare* cu valoare constantă a cuantei.

Cuantizarea liniară poate fi realizată în următoarele variante:

- ◆ **scalară** (unidimensională) pentru o singură sursă de semnal;
- ◆ **vectorială** (multidimensională) în cazul multiplexării semnalelor.

Păstrarea constantă a raportului semnal/zgomot de cuantizare este posibilă prin folosirea unei cuante variabile, adică printr-o lege de cuantizare *neliniară* a semnalului sau printr-o prelucrare neliniară urmată de cuantizarea liniară a semnalului. Operația de prelucrare neliniară a semnalelor în vederea uniformizării distribuției de valori a sursei poartă denumirea de **compresie** (la emisie) și **expandare** (la recepție), într-un cuvânt **compandare**.

Legile de compandare A, μ se folosesc atunci când nu se cunoaște distribuția probabilistică de valori a sursei.

În cazul surselor cu distribuție $p(v)$ cunoscută, legea optimă de cuantizare, neliniară și în trepte, se deduce folosind *condițiile Lloyd-Max*.

Teoremă (Lloyd-Max)

Un cuantizor scalar cu număr fix de nivele de cuantizare (N) asigură distorsiunea pătratică medie minimă la cuantizarea semnalului dat de o sursă cu distribuția de valori $p(v)$, dacă și numai dacă sunt satisfăcute condițiile:

$$1. \int_{v_{i-1}}^{v_i} (v - c_i) p(v) dv = 0, \quad \forall i = \overline{1, N} \quad (\text{condiția valorii centrale}) \quad (\text{III.23})$$

$$2. v_i = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}, \quad \forall i = \overline{0, N-1} \quad (\text{condiția punctului median}) \quad (\text{III.24})$$

Demonstrație:

Funcția de cuantizare neliniară este definită în trepte:

$c(v) = v_i$ pentru $v_{i-1} < v \leq v_i$, $i = 1; 2; \dots; N$ și $A \leq v \leq B$.

Valorile funcției sunt uniform distribuite în intervalul de valori $[A; B]$.

Distorsiunea pătratică medie de cuantizare este dată de relația:

$$D = E[(v-c(v))^2] = \sum_i \int_{v_{i-1}}^{v_i} (v-c_i)^2 p(v) dv \quad (III.25)$$

(E(v) reprezintă valoarea medie a variabilei aleatoare v.)

Legea de cuantizare optimă satisface condițiile de minim:

$$1. \frac{\partial D}{\partial c_i} = 0, \forall i = \overline{0, N-1} \quad (III.26)$$

$$2. \frac{\partial D}{\partial v_i} = 0, \forall i = \overline{0, N-1}. \quad (III.27)$$

Acestea se transcriu ca:

$$1. 2 \int_{v_{i-1}}^{v_i} (v-c_i) p(v) dv = 0, \forall i = \overline{1, N}$$

$$2. (v_i - c_i)^2 p(v) - (v_i - c_{i+1})^2 p(v) = 0 \Rightarrow v_i = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}, \forall i = \overline{0, N-1} \quad \text{q.e.d.}$$

Observație: Pentru sursele de informație nestaționare sau nemodelabile se folosesc circuite de compandare cu caracteristică logaritmică urmate de cuantizoare liniare.

Puterea zgomotului de cuantizare se calculează cu relația lui Bennett:

$$D = \frac{1}{12} N^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} p(v) [c'(v)]^{-2} dv \quad (III.28)$$

Notatii:

N - numărul nivelelor de cuantizare ;

c'(v) - derivata de ordinul I a funcției de cuantizare;

p(v) - legea de distribuție a valorilor sursei de informație.

În cazul funcției de cuantizare în trepte se obține relația aproximativă de calcul a distorsiunii pătratice medii, cu sume finite:

$$D = \frac{1}{12} \sum_i p(v_i) (v_i - v_{i-1})^3 \quad (III.29)$$

Observații:

❶ Densitatea de probabilitate a unei surse care generează semnal cu nivele în intervalul de valori (A; B) se normalizează conform relației:

$$\int_A^B p(v) dv = 1 \quad (III.30)$$

❷ Expresia zgomotului de cuantizare poate fi scrisă într-o formă echivalentă celei din relația (III.28), dacă se extrage din funcția c(v) valoarea cuantei:

$$N_q = \frac{(B-A)^2}{12} 2^{-2n} \int_A^B p(v) [c'(v)]^{-2} dv \quad (III.31)$$

(n - numărul biților de cuantizare).

❸ În cazul cuantizării uniforme, cu lege de cuantizare liniară, se obține expresia distorsiunii medii pătratice de cuantizare:

$$N_q = \frac{(B-A)^2}{12} 2^{-2n} = \frac{q^2}{12} = \text{constant} \quad (\text{III.32})$$

indiferent de distribuția de valori a sursei. Astfel rezultă că raportul de puteri semnal/zgomot de cuantizare (S/N_q) este variabil, depinzând numai de nivelul semnalului util.

④ Câteva funcții unidimensionale, de distribuție probabilistică a valorilor nivelelor unui semnal continuu, utilizate în mod curent sunt date mai jos:

◆ **distribuția uniformă:**

$$p(v) = k = \frac{1}{B-A}, \forall v \in [A; B];$$

◆ **distribuția exponențială:**

$$p(v) = \exp(-k|v|), k \geq 0, -\infty < v < \infty$$

◆ **distribuția Gauss:**

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < v < \infty$$

◆ **distribuția Rayleigh:**

$$p(v) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right), v \geq 0$$

◆ **distribuția normală:**

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), -\infty < v < \infty$$

Exemplu: Pentru o sursă de semnal, cu valori uniform distribuite în intervalul $-5V \dots +5V$, se obține: $p(v) = 1/10$.

III.6 Coduri-bloc pentru compresia datelor. Cuantizarea vectorială

În cazul multiplexării semnalelor, se pot folosi legi de cuantizare multidimensionale care permit reducerea puterii zgomotului de cuantizare sub valoarea corespunzătoare cuantizării scalare optime a fiecărei surse de semnal.

Fie $\vec{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})$ vectorul-sursă N-dimensional.

Se definește **codul-bloc N-dimensional de compresie** ca funcție:

$$c(\vec{v}) : R^N \rightarrow \{\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{M-1}\}$$

care asociază vectorul de semnal v din spațiul R^N cu unul din cei $M = 2^b$ vectori de cod N-dimensionali, pe baza unei reguli de cuantizare alese (de obicei pe criteriul distanței Euclidiene minime dintre vectorul de date și cel de cod).

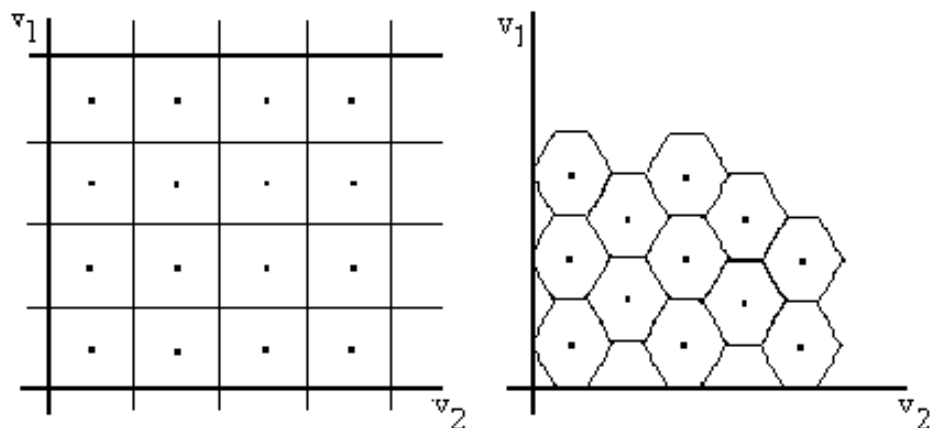


Fig.III.3 Cuantizare bidimensională: (a) cu latici rectangulare; (b) cu latici hexagonale

Un circuit de cuantizare vectorială foarte utilizat este acela de calcul a transformatei Fourier discrete (DFT - *Discrete Fourier Transform*). Acesta cuantizează vectorul obținut prin aplicarea unui algoritm rapid de calcul a DFT pentru vectorul de semnal considerat.

Cuantizarea scalară a componentelor sursei este echivalentă cuantizării vectoriale cu latici rectangulare (fig.III.3a). Forma regiunilor de decizie ale cuantizorului poate fi modificată astfel încât să se minimizeze distorsiunea medie de cuantizare :

$$D = \int_S [\bar{v} - c(\bar{v})]^2 p(\bar{v}) d\bar{v} \quad (\text{III.33})$$

Notatii:

S - regiunea de decizie;

$c(\mathbf{v})$ - legea de cuantizare;

$p(\mathbf{v})$ - funcția de distribuție probabilistică a vectorului de semnal.

Puterea zgomotului de cuantizare depinde de domeniul valorilor de semnal, de forma și mărimea domeniilor de decizie.

În cazul bidimensional, prin folosirea de latici hexagonale (Fig. III.3b), gradul de distorsiuni poate fi redus cu circa 4% raportat la cazul cuantizării cu latici rectangulare având aceeași arie.

Observații:

❶ Subiectul cuantizării vectoriale este dual cu cel al proiectării constelațiilor de semnal în care laticile joacă un rol important [Con88]. Diferă însă proprietățile și dimensiunile pe care trebuie să le aibă laticia pentru a asigura o proiectare optimă:

◆ distanța euclidiană minimă dintre două puncte de pe circumferință (*minorantul*), respectiv raza cercului înscris (pentru constelațiile de semnal);

◆ distanța euclidiană maximă dintre două puncte de pe circumferință (*majorantul*), respectiv raza cercului circumscris (pentru cuantizoare).

❷ Rata de cuantizare este determinată de numărul regiunilor de cuantizare adică de aria acestora, în timp ce distorsiunea pătratică medie depinde și de forma acestora. În cazul semnalelor cu distribuție uniformă de valori, laticile hexagonale asigură o mai bună împachetare decât cele rectangulare (majorant minim).

❸ Cuantizarea pe blocuri mai mari (8; 16 surse) presupune lucrul în spații multidimensionale extinse astfel că determinarea laticii optime devine o problemă. De asemeni repartiția punctelor de cuantizare în spațiul multidimensional (alese ca centre de greutate ale zonelor de decizie) este importantă. S-a constatat că prin compresia pe blocuri de semnale se obțin rezultate mai bune decât în cazul folosirii de cuantizoare scalare pentru fiecare sursă în parte, mai ales atunci când sursele generează valori neuniform distribuite și au memorie. Acest fapt rămâne valabil chiar și în cazul utilizării unei laticii suboptimale, neregulare (deduse pe principiul distanței euclidiene minime). Algoritmi eficienți de codare-bloc au fost găsiți de Conway, Barnes și Sloane.

III.7 Coduri de tip "arbore" pentru compresia datelor

În cazul semnalelor discrete cu redundanță mare, respectiv cu un grad ridicat de corelație între eșantioanele consecutive, se poate aplica pentru compresie o lege de **cuantizare cu reacție**, în particular **predictivă**. Metoda este utilizată pentru codarea surselor cu memorie (de exemplu, în cazul semnalului vocal). Se cunosc diverse tehnici

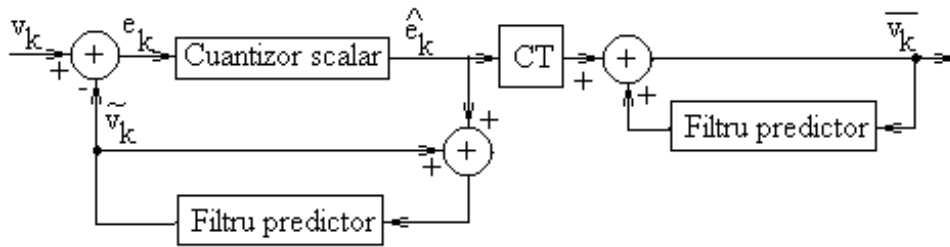


Fig. III.4 Principiul cuantizării cu predicție

de cuantizare cu predicție: modulația diferențială a impulsurilor în cod (DPCM - *Differential Pulse Coded Modulation*), modulația delta liniară, adaptivă sau sigma. Aceste metode realizează codarea pe un anumit număr de biți a diferenței dintre eșantionul curent și cel estimat (Fig.III.4). Metoda este eficientă doar dacă gama dinamică a eșantioanelor 'de eroare' (sau 'diferență') este mai mică decât cea a semnalului inițial.

Compresibilitatea sursei este determinată de gradul ei de predicție care poate fi crescut prin mărirea ratei de eșantionare.

Precizia metodei este determinată de tipul filtrului de predicție utilizat care în cel mai simplu caz este un filtru digital liniar, cu răspuns finit la impuls (FIR), de un anumit ordin. Eșantionul de ordin k este estimat funcție de valorile a N eșantioane anterioare ale semnalului:

$$\tilde{v}_k = g_1 v_{k-1} + g_2 v_{k-2} + \dots + g_N v_{k-N} .$$

Performanțe superioare se obțin prin utilizarea filtrelor recursive, cu răspuns infinit la impuls (IIR - *all-zero* sau IIR - *pole-zero*), cu o mai bună stabilitate și cu flexibilitate mai mare.

Cuantizarea cu predicție reprezintă un caz particular de cod "arbore" pentru compresia datelor. Codul poate fi descris printr-o diagramă cu număr finit de stări de tip "arbore" sau "grilă" (*trellis*). Numărul stărilor este determinat de numărul celulelor de memorie din filtru (2^N , N - ordinul filtrului de predicție).

Mai general, se pot folosi cuantizoare cu codare "trellis" care au memorie și anticipație finite, nenule, asemănător modulațiilor codate (TCM) [Ras95], doar că rolurile codorului și decodorului sunt inversate. Un **cod trellis pentru compresia datelor** caută

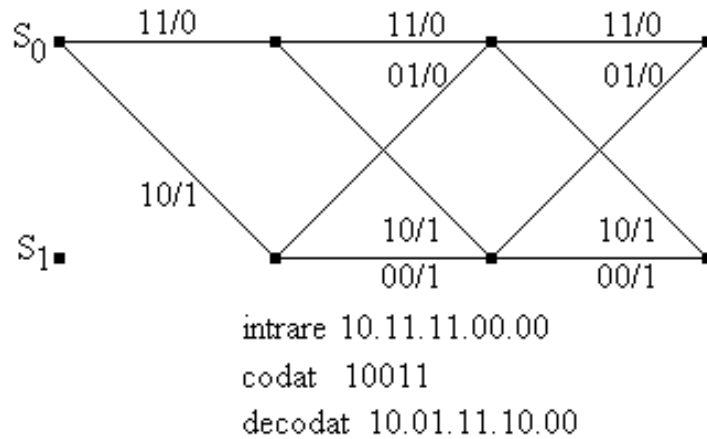


Fig. III.5 Cod-trellis de compresie a datelor

Într-o diagramă trellis, folosind algoritmul Viterbi (vezi capitolul IV), calea de pondere minimă, adică cea care este la distanță Hamming minimă față de secvența de biți generată de sursă. Semnalul codat specifică această cale. Decodorul are doar sarcina de a citi simbolurile corespunzătoare căii respective. Codurile Ungerboeck $(b+1, b)$ pot fi folosite pentru compresia datelor dar se preferă codurile trellis proiectate special pentru aceasta. Metode specifice de proiectare a cuantizoarelor cu codare trellis au fost studiate de Gray și Linde (1982), Marcellin și Fischer (1989). Algoritmul Viterbi asigură erori (distorsiuni) minime de cuantizare. Performanțele cuantizorului trellis depind de diagrama trellis folosită. În fig. III.5 se prezintă un cod trellis de compresie cu rata 2:1 care codează dibiții de intrare.

Observații:

- ◆ Erorile care apar prin codarea-trellis de compresie semnifică tocmai reducerea entropiei semnalului de date prin compresia acestuia.
- ◆ Pentru o sursă informațională discretă, cu entropie finită, compresia este utilă numai dacă se dorește reducerea debitului binar generat.

III.8 Metode parametrice de compresie a datelor

O altă metodă de compresie a datelor realizează modelarea sursei ca filtru digital (FIR; IIR) cu excitație dată și cuantizează parametrii modelului. Decodorul construiește modelul sursei conform parametrilor recepționați și regenerează semnalul de ieșire adică mesajul. Se preferă alegerea ca semnal-excitație a impulsului Dirac astfel încât mesajul este aproximat ca funcția răspuns-la-impuls a filtrului. Această metodă este cunoscută sub denumirea de **codare liniară predictivă** (LPC - *Linear Predictive Coding*) și este mult utilizată pentru compresia vorbirii (*vocoding*). În fapt, un cod liniar predictiv este un cod-bloc de compresie dar, spre deosebire de metodele de cuantizare-bloc prezentate, acesta nu prelucrează direct mesajul. Metoda LPC este similară cu unele tehnici de analiză spectrală a semnalelor (AR - *Auto-Regressive*, MA - *Moving Average*, ARMA) astfel încât, algoritmi folosiți în acest scop pentru procesarea digitală de semnal pot fi adaptați pentru compresia parametrică a datelor (Algoritmi Yule-Walker, Durbin, Judell, Steiglitz-McBride, Evans-Fischl ș.a [Can88], [Jac89], [Pro88]).

În caz particular, șirul de biți generat de sursă poate fi modelat ca ieșirea unui filtru autoregresiv de ordin L:

$$v_k = -g_1 v_{k-1} - g_2 v_{k-2} - \dots - g_L v_{k-L} + e_k \quad (\text{III.34})$$

Notatii:

g_1, \dots, g_L - coeficienții filtrului, respectiv parametrii modelului;

e_k - eșantionul **inovație** care joacă rolul zgomotului de cuantizare și nu este descris de datele compresate.

v_k - eșantionul de intrare la momentul k de eșantionare.

Secvența codată va conține coeficienții filtrului și o variabilă de inițializare.

Decodorul reface filtrul și prin inițializare obține secvența-bloc transmisă cu n eșantioane. În cazul codării diferențiale cu predicție se transmite codat eșantionul-inovație.

Coeficienții filtrului se determină astfel încât să se minimizeze eroarea de predicție. Particularizând, fără a restrânge generalitatea problemei, această minimizare poate fi făcută în sensul valorii pătratice medii:

$$E = \sum_{k=0}^{n-1} e_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^L g_i v_{k-i} \right)^2 \quad (g_0 = 1) \quad (\text{III.35})$$

Condiția globală de minim ce trebuie îndeplinită se rescrie ca sistem cu L ecuații și L necunoscute (coeficienții filtrului):

$$\frac{\partial E}{\partial g_m} = 0, \forall m = \overline{1, L} \quad (\text{III.36})$$

Se obțin relațiile echivalente:

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} 2v_{k-m} \sum_{i=0}^L g_i v_{k-i} = 2 \sum_{i=0}^L g_i \sum_{k=0}^{n-1} v_{k-m} v_{k-i} = 2 \sum_{i=0}^L g_i R_{mi} \quad (\text{III.37})$$

$$R_{m0} + \sum_{i=1}^L g_i R_{mi} = 0, m = \overline{1, L} \quad (\text{III.38})$$

Matricial aceste relații pot fi transcrise printr-o ecuație unică:

$$\bar{g} \cdot \bar{R} = -\bar{r} \Rightarrow \bar{g} = -\bar{R}^{-1} \bar{r} \quad (\text{III.39})$$

unde R_{mi} , \mathbf{m} și i luând valori întregi de la $\mathbf{1}$ la \mathbf{L} , sunt coeficienții de autocorelație ai secvenței de date, grupați în matricea \mathbf{R} de autocorelație care se calculează pe baza celor n eşantioane ce urmează a fi transmise. Întrucât \mathbf{R} este o matrice de tip Toeplitz, calculul inversei se face cu algoritmi rapizi utilizați în procesarea digitală a semnalelor.

Vectorii-coloană \mathbf{g} și \mathbf{r} conțin coeficienții filtrului, respectiv coeficienții de autocorelație R_{m0} ($m = 1; 2 \dots L$) ai secvenței de date.

III.9 Aplicații

P1. Care este frecvența de eşantionare și debitul binar generat în circuitele PCM pe 8 biți din sistemele de telefonie digitală?

P2. Determinați probabilitatea ca nivelul unui semnal aleator, având valorile amplitudinii distribuite Rayleigh (cu dispersie 0,5), în intervalul 0...1 V, să fie mai mic de 0,2 V. Deduceți pentru cazul cuantizării binare a acestui semnal, probabilitățile de apariție a nivelelor logice '0' și '1', dacă se utilizează o tensiune de prag de 0,5 V. Ce valoare de prag trebuie aleasă pentru ca biții de la ieșirea cuantizorului binar să fie echiprobabili?

P3. Calculați puterea zgomotului de cuantizare în cazul unui cuantizor liniar, cu lege de compandare μ ($\mu = 100$), pentru un semnal de intrare cu nivele uniforme distribuite în intervalul $-1V \dots +1V$. Determinați valoarea în dB a raportului de puteri semnal/zgomot de cuantizare.

P4. Calculați și reprezentați grafic funcție de timp valorile în dB ale raportului de puteri semnal/zgomot de cuantizare, în cazul cuantizării uniforme pe 8 biți, fără

compandare, a unui semnal sinusoidal de 4 kHz, eșantionat cu 32 kHz, pentru o perioadă a semnalului de intrare. Ce observați?

P5. Deduceți secvența obținută prin compresie de tip 'trellis' (pe baza diagramei din figura III.5) a octetului 01100011. Care va fi secvența decodată?