

## CAPITOLUL 2

### CANALE DISCRETE DE TRANSMISIUNI

#### 2.1. Model matematic de canal discret de transmisiuni

În acest model trebuie precizate mulțimile simbolurilor aplicate la intrarea canalului, ale simbolurilor recepționate la ieșirea acestuia, precum și perturbațiile care apar.

Fie  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  mulțimea simbolurilor de la intrarea canalului (acceptate la intrare), numită și alfabetul de la intrarea canalului și  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  mulțimea simbolurilor recepționate, numită și alfabetul de la ieșirea canalului de transmisiuni. În general, cele două mulțimi sunt diferite, din cauza perturbațiilor care apar pe canal. Astfel, dacă se presupune că la intrarea unui canal se aplică numai două simboluri, de forma  $x_1=000$  și  $x_2=111$ , iar zgomotele de pe canal se presupun astfel încât pot modifica un zero în unu sau invers, la ieșirea acestuia se pot recepționa simbolurile  $y_1=000$ ,  $y_2=001$ ,  $y_3=010$ ,  $y_4=011$ ,  $y_5=100$ ,  $y_6=101$ ,  $y_7=110$  și  $y_8=111$ .

Prin definiție, canalul se va numi *discret*, dacă cele două mulțimi sunt finite.

Prin definiție, un canal discret se numește *fără memorie*, dacă recepționarea unui simbol nu depinde de unul sau mai multe simboluri recepționate anterior.

Prin definiție, un canal discret de transmisiuni se va numi *staționar*, dacă zgomotele sau perturbațiile care apar pe canal sunt invariante în timp.

În cele ce urmează se vor analiza numai canalele discrete, staționare și fără memorie.

Pentru a pune în evidență perturbațiile care pot să apară pe canalele discrete, staționare și fără memorie, se definesc trei tipuri de probabilități:

a) probabilitatea  $p(x_k \cap y_j)$ ;  $k = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ , prin care se înțelege probabilitatea ca la intrarea canalului să fie simbolul  $x_k$  și la ieșirea acestuia să fie simbolul  $y_j$ .

Considerând că la intrarea canalului de transmisiuni se aplică mulțimea  $X$ , numită și câmpul de la intrare, iar la ieșire rezultă mulțimea  $Y$ , numită și câmpul de la ieșire, probabilitățile  $p(x_k \cap y_j)$  pot fi ordonate într-o matrice de forma

$$[P(X, Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1 \cap y_1) & p(x_1 \cap y_2) & \dots & p(x_1 \cap y_m) \\ p(x_2 \cap y_1) & p(x_2 \cap y_2) & \dots & p(x_2 \cap y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_n \cap y_1) & p(x_n \cap y_2) & \dots & p(x_n \cap y_m) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Se pot demonstra următoarele proprietăți:

$$p(x_k) = \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j), \quad (\forall) k = \overline{1, n} \quad (2.2)$$

$$p(y_j) = \sum_{k=1}^n p(x_k \cap y_j), \quad (\forall) j = \overline{1, m} \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) = 1 \quad (2.4)$$

unde  $p(x_k)$  reprezintă probabilitatea cu care se aplică simbolul  $x_k$  la intrarea canalului, iar  $p(y_j)$  probabilitatea cu care se recepționează simbolul  $y_j$ . Pentru a demonstra relația (2.2), se face observația că evenimentele  $(x_k \cap y_1), (x_k \cap y_2), \dots, (x_k \cap y_m)$ , sunt disjuncte, deoarece, dacă la intrarea canalului este simbolul  $x_k$ , la ieșirea acestuia va rezulta fie simbolul  $y_1$ , fie  $y_2$ , ..., fie simbolul  $y_m$ . Ținând cont că probabilitatea reuniunii unor evenimente disjuncte (incompatibile) este egală cu suma probabilităților evenimentelor componente, se poate scrie

$$p(x_k \cap y_1 \cup x_k \cap y_2 \cdots \cup x_k \cap y_m) = \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \quad (2.5)$$

Pe de altă parte

$$p(x_k \cap y_1 \cup x_k \cap y_2 \cdots \cup x_k \cap y_m) = p[x_k \cap (y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_m)] \quad (2.6)$$

Dar

$$y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_m = E \quad (2.7)$$

unde  $E$  reprezintă evenimentul sigur, deoarece la ieșire cu certitudine se va recepționa unul din simbolurile mulțimii  $Y$ .

Ținând cont de (2.5), (2.6) și (2.7), rezultă

$$\sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) = p(x_k \cap E) = p(x_k) \quad (2.8)$$

Din (2.7) rezultă

$$\sum_{j=1}^m p(y_j) = 1 \quad (2.9)$$

Analog ,

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = 1 \quad (2.10)$$

Relația (2.4) rezultă atunci imediat, ținând cont fie de (2.2) și (2.10), fie de (2.3) și (2.9).

b) Probabilitatea  $p(y_j | x_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ , prin care se va înțelege probabilitatea de a se recepționa simbolul  $y_j$ , dacă s-a transmis simbolul  $x_k$ . Aceste probabilități condiționate pot fi ordonate într-o matrice,  $[P(Y|X)]$  numită *matrice de zgomot sau de canal*. Această matrice poate fi ușor obținută din matricea  $[P(X,Y)]$ , dată de relația (2.1), dacă prima linie se împarte la  $p(x_1)$ , a doua linie la  $p(x_2)$  ș. a. m. d., ultima linie se împarte la  $p(x_n)$  și se ține cont de relația

$$p(x_k \cap y_j) = p(x_k) \cdot p(y_j | x_k) \quad (2.11)$$

Astfel, matricea de zgomot sau de canal este de forma

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} p(y_1 | x_1) & p(y_2 | x_1) & \dots & p(y_m | x_1) \\ p(y_1 | x_2) & p(y_2 | x_2) & \dots & p(y_m | x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1 | x_n) & p(y_2 | x_n) & \dots & p(y_m | x_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Matricea de zgomot astfel întocmită este stochastică, adică

$$\sum_{j=1}^m p(y_j | x_k) = 1, \quad (\forall) k = \overline{1, n} \quad (2.13)$$

deoarece, dacă la intrarea canalului se aplică un anumit simbol  $x_k \in X$ , cu certitudine la ieșirea acestuia se va recepționa unul din simbolurile  $y_j \in Y$ .

c) Probabilitatea  $p(x_k | y_j)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ , prin care se va înțelege probabilitatea de a se fi transmis simbolul  $x_k$ , dacă s-a

recepționat simbolul  $y_j$ . Aceste probabilități condiționate pot fi grupate într-o matrice,  $[P(X|Y)]$ , ce poate fi ușor obținută din matricea  $[P(X,Y)]$ , dacă prima coloană se împarte la  $p(y_1)$ , a doua coloană la  $p(y_2)$  și așa mai departe, ultima coloană se împarte la  $p(y_m)$  și se ține cont de relația

$$p(x_k \cap y_j) = p(y_j) \cdot p(x_k | y_j) \quad (2.14)$$

Astfel, această matrice este de forma

$$[P(X|Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1 | y_1) & p(x_1 | y_2) & \dots & p(x_1 | y_m) \\ p(x_2 | y_1) & p(x_2 | y_2) & \dots & p(x_2 | y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_n | y_1) & p(x_n | y_2) & \dots & p(x_n | y_m) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Deoarece, atunci când s-a recepționat un anumit simbol  $y_j$ , cu certitudine la intrarea canalului s-a aplicat unul din simbolurile  $x_k \in X$ , se poate scrie relația

$$\sum_{k=1}^n p(x_k | y_j) = 1 \quad , \quad (\forall) j = \overline{1, m} \quad (2.16)$$

Din punct de vedere informațional, un canal discret de transmisiuni este caracterizat de următoarele mărimi informaționale

- 1) Entropia intrare - ieșire,  $H(X, Y)$ ;
- 2) Entropiile condiționate,  $H(X|Y)$  și  $H(Y|X)$ ;
- 3) Transinformația,  $I(X, Y)$ ;
- 4) Capacitatea canalului,  $C$ .

## 2.2. Entropia intrare - ieșire a unui canal discret de transmisiuni

Se presupune că la intrarea unui canal de transmisiuni se aplică câmpul  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , iar la ieșirea acestuia se recepționează câmpul  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Dacă se notează cu  $p(x_k \cap y_j)$  probabilitatea evenimentului că la intrarea canalului se află simbolul  $x_k$  și la ieșirea acestuia există simbolul  $y_j$ , informația atașată acestui eveniment, notată cu  $i(x_k \cap y_j)$ , se determină cu relația (1.10), adică

$$i(x_k \cap y_j) = -\log p(x_k \cap y_j) \quad (2.17)$$

Deoarece o informație înlătură o anumită nedeterminare, rezultă că informația dată de relația (2.17) este numeric egală cu nedeterminarea ca la intrarea canalului să fie simbolul  $x_k$  și la ieșirea acestuia să fie simbolul  $y_j$ .

Informația definită cu relația (2.17) determină o variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile  $p(x_k \cap y_j)$ ;  $k = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ . Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete definește entropia intrare - ieșire și va fi notată cu  $H(X, Y)$ , adică

$$H(X, Y) = \overline{i(x_k \cap y_j)} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \cdot \log p(x_k \cap y_j) \quad (2.18)$$

Înlocuind (2.17) în (2.18), rezultă

$$H(X, Y) = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \cdot \log p(x_k \cap y_j) \left\langle \frac{\text{biți}}{\text{pereche de simboluri}} \right\rangle \quad (2.19)$$

Se consideră, în continuare, două situații extreme

- 1) lipsa perturbațiilor de pe canal;
- 2) perturbații foarte puternice pe canal, care determină practic independența statistică a ieșirii de intrare, și invers.

În primul caz, se poate scrie

$$p(x_k | y_j) = p(y_j | x_k) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, \text{dacă } x_k = y_j \\ 0, \text{dacă } x_k \neq y_j \end{cases} \quad (2.20)$$

În acest caz, dacă se știe ce s-a recepționat, se știe cu certitudine ce s-a transmis sau, dacă se știe ce s-a transmis, se știe cu certitudine ce se va recepționa.

Dacă este adevărată relația (2.20), atunci (2.19) devine

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \cdot \log p \left[ p(x_k) \cdot p(y_j | x_k) \right] = \\ &= - \sum_{k=1}^n \log p(x_k) \cdot \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k) \cdot p(y_j | x_k) \cdot \log p(y_j | x_k) = \\ &= - \sum_{k=1}^n p(x_k) \log p(x_k) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k) \delta_{kj} \log \delta_{kj} = H(X) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pe de altă parte, este evident că în lipsa perturbațiilor câmpul de la intrare este identic cu cel de la ieșire, adică

$$H(X) = H(Y) \quad (2.22)$$

Rezultă, deci, că în lipsa perturbațiilor de pe canal se poate scrie relația

$$H(X, Y) = H(X) = H(Y) \quad (2.23)$$

În cel de-al doilea caz are loc relația

$$p(x_k \cap y_j) = p(x_k) \cdot p(y_j) \quad (2.24)$$

deoarece la perturbații foarte puternice simbolurile de la intrare  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , devin statistic independente de simbolurile de la ieșirea canalului  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Ținând cont de (2.24), relația (2.19) devine

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \cdot \log p[p(x_k) \cdot p(y_j)] = \\ &= - \sum_{k=1}^n \log p(x_k) \cdot \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) - \sum_{j=1}^m \log p(y_j) \sum_{k=1}^n p(x_k \cap y_j) = (2.25) \\ &= - \sum_{k=1}^n p(x_k) \log p(x_k) - \sum_{j=1}^m p(y_j) \log p(y_j) = H(X) + H(Y) \end{aligned}$$

Canalele discrete reale se încadrează între aceste două situații extreme.

O interpretare geometrică intuitivă se poate obține asociind câmpului  $X$  de la intrarea canalului mulțimea  $A$  și câmpului  $Y$  de la ieșirea canalului mulțimea  $B$ .

Pe aceste mulțimi se definesc măsurile  $m(A)$ , respectiv  $m(B)$  și se fac următoarele corespondențe  $m(A) \leftrightarrow H(X)$ ,  $m(B) \leftrightarrow H(Y)$  și  $m(A \cup B) \leftrightarrow H(X, Y)$ . Interpretarea geometrică este dată în Fig. 2.1. În această figură suprafața cercului mic este  $m(A)$ , suprafața cercului mare este  $m(B)$ , iar suprafața hașurată  $m(A \cup B)$ .

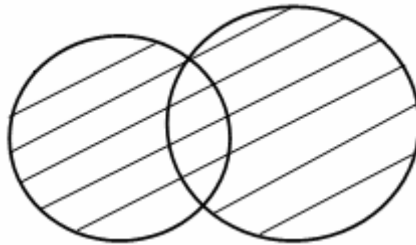


Fig. 2.1. Interpretarea geometrică a entropiei  $H(X, Y)$ .



### 2.3. Entropii condiționate

Fie  $Y$  câmpul de la ieșirea unui canal de transmisiuni. Dacă se cunoaște acest câmp, din cauza perturbațiilor de pe canalul de transmisiuni rămâne o anumită incertitudine (nedeterminare) asupra câmpului  $X$  de la intrarea canalului. Valoarea medie a acestei nedeterminări se numește *entropia condiționată* a câmpului de la intrare de cel de la ieșire. În scopul stabilirii unei relații de calcul pentru această entropie, se presupune că la un moment dat s-a recepționat simbolul  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Din cauza perturbațiilor de pe canal, la intrarea acestuia s-ar fi putut aplica fie  $x_1$ , fie  $x_2$ , ..., fie  $x_n$ . Graful corespunzător acestei situații este reprezentat în Fig.2.2.

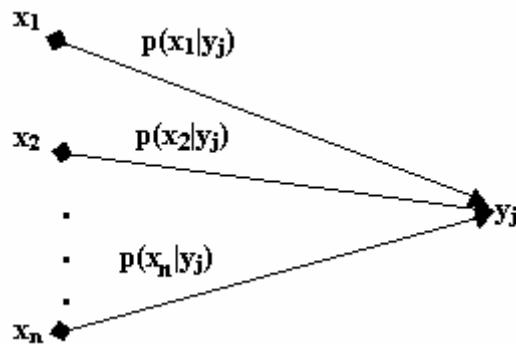


Fig. 2.2. Graful corespunzător recepționării simbolului  $y_j$

Fie  $p(x_k|y_j)$  probabilitatea de a se fi transmis simbolul  $x_k$ , dacă s-a recepționat simbolul  $y_j$ . Informația atașată acestui eveniment se notează cu  $i(x_k|y_j)$  și se deduce cu relația (1.10), adică

$$i(x_k|y_j) = -\log p(x_k|y_j) \quad (2.26)$$

Deoarece o informație înlătură o anumită nedeterminare,

înseamnă că informația calculată cu relația (2.26) este numeric egală cu nedeterminarea asupra simbolului  $x_k$ , dacă s-a recepționat simbolul  $y_j$ . Informația definită cu relația (2.26) determină o variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile  $p(x_k|y_j)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete, notată cu  $H(X|y_j)$ , se poate calcula cu relația

$$H(X|y_j) = \overline{i(x_k|y_j)} = \sum_{k=1}^n p(x_k|y_j) i(x_k|y_j) \quad (2.27)$$

sau, ținând cont de (2.26), rezultă

$$H(X|y_j) = -\sum_{k=1}^n p(x_k|y_j) \log(x_k|y_j) \quad (2.28)$$

Din punct de vedere fizic, această mărime măsoară nedeterminarea medie asupra intrării la recepționarea simbolului  $y_j$ .

Considerând toate posibilitățile de recepționare,  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , rezultă că mărimea definită cu relația (2.28) determină o nouă variabilă aleatoare discretă, ce poate lua valori cu probabilitățile  $p(y_j)$ . Valoarea medie statistică a acestei variabile aleatoare discrete se va nota cu  $H(X|Y)$  și va măsura nedeterminarea medie asupra intrării  $X$ , dacă se cunoaște ieșirea  $Y$ , adică entropia condiționată a câmpului de la intrarea canalului de câmpul de la ieșirea acestuia. Această mărime se va calcula cu relația

$$H(X|Y) = \overline{H(X|y_j)} = \sum_{j=1}^m p(y_j) H(X|y_j) \quad (2.29)$$

Înlocuind (2.28) în (2.29), rezultă

$$H(X|Y) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j) p(x_k|y_j) \log(x_k|y_j) \quad (2.30)$$

sau, ținând cont de (2.14), se poate scrie, echivalent

$$H(X|Y) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log(x_k|y_j) \quad (2.31)$$

Entropia condiționată calculată cu relația (2.30) sau (2.31) este denumită uneori *echivocație*, deoarece măsoară echivocul asupra intrării dacă se cunoaște ieșirea.

În mod analog, se poate determina entropia condiționată a câmpului de la ieșire de câmpul de la intrare, cu relația

$$H(Y|X) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k) p(y_j|x_k) \log(y_j|x_k), \quad (2.32)$$

sau, ținând cont de (2.11), se poate scrie echivalent

$$H(Y|X) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j \cap x_k) \log(y_j|x_k), \quad (2.33)$$

Entropia condiționată calculată cu relația (2.32) sau (2.33) este numită uneori *eroare medie*. În cazul extrem al perturbațiilor foarte puternice, ținând cont de (2.20), relațiile (2.30) și (2.32) devin

$$H(X|Y) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j) \delta_{kj} \log_{kj} = 0, \quad (2.34)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k) \delta_{kj} \log_{kj} = 0, \quad (2.35)$$

În cazul extrem al perturbațiilor foarte puternice, ținând cont de (2.11) și (2.24), se poate scrie

$$p(x_k) \cdot p(y_j|x_k) = p(x_k) \cdot p(y_j), \quad (2.36)$$

de unde rezultă

$$p(y_j|x_k) = p(y_j), \quad (2.37)$$

În mod analog, ținând cont de (2.14) și (2.24), se poate scrie

$$p(x_k|y_j) = p(x_k) \quad (2.38)$$

Înlocuind (2.38) în (2.31), rezultă că, în cazul perturbațiilor foarte puternice, echivocația devine

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= -\sum_{k=1}^n \log p(x_k) \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) = \\ &= -\sum_{k=1}^n p(x_k) \log p(x_k) = H(X) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Înlocuind (2.37) în (2.33), rezultă că, în cazul perturbațiilor foarte puternice, eroarea medie devine

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{j=1}^m \log p(y_j) \sum_{k=1}^n p(x_k \cap y_j) = \\ &= -\sum_{j=1}^m p(y_j) \log p(y_j) = H(Y) \end{aligned} \quad (2.40)$$

O interpretare geometrică intuitivă se poate obține dacă se fac corespondențele  $m(A) \leftrightarrow H(X)$ ,  $m(B) \leftrightarrow H(Y)$ ,  $m(A \cap \bar{B}) \leftrightarrow H(X|Y)$  și  $m(\bar{A} \cap B) \leftrightarrow H(Y|X)$ .

În Fig. 2.3, suprafața hașurată vertical reprezintă  $H(X|Y)$ , iar cea hașurată orizontal,  $H(Y|X)$ .

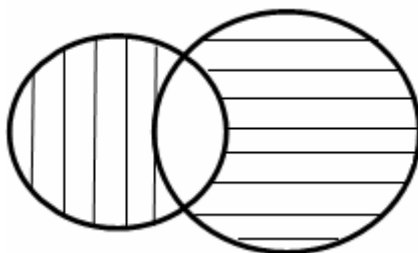


Fig. 2.3. Interpretare geometrică a echivocației și a erorii medii

## 2.4. Transinformația

Transinformația măsoară informația medie transmisă pe canalul discret de transmisiuni.

În scopul stabilirii unei relații de calcul pentru această mărime informațională, fie simbolul  $x_k$  aplicat la intrarea canalului cu probabilitatea  $p(x_k)$ . Incertitudinea inițială asupra simbolului  $x_k$  poate fi înlăturată printr-o informație,  $i(x_k)$ , calculată cu relația

$$i(x_k) = -\log p(x_k) \quad (2.41)$$

Fie  $p(x_k|y_j)$  probabilitatea de a se fi transmis simbolul  $x_k$ , dacă s-a recepționat simbolul  $y_j$ . Incertitudinea finală asupra simbolului  $x_k$ , adică după recepționarea simbolului  $y_j$  se poate înlătura cu o informație, notată cu  $i(x_k|y_j)$ , ce poate fi determinată cu relația

$$i(x_k|y_j) = -\log p(x_k|y_j) \quad (2.42)$$

Dacă  $i(x_k)$  este informația care înlătură incertitudinea inițială asupra lui  $x_k$  și  $i(x_k|y_j)$  este informația care înlătură incertitudinea finală asupra aceluiasi simbol, rezultă că nedeterminarea înlăturată asupra acestui simbol se datorează transmisiei unei informații pe canal, numită în continuare *informație mutuală*, notată cu  $i(x_k, y_j)$  și care se determină cu relația

$$i(x_k, y_j) = i(x_k) - i(x_k|y_j) \quad (2.43)$$

Înlocuind (2.41) și (2.42) în (2.43), rezultă

$$i(x_k, y_j) = -\log p(x_k) + \log p(x_k|y_j) = \log \frac{p(x_k|y_j)}{p(x_k)}. \quad (2.44)$$

Dacă  $p(x_k|y_j) < p(x_k)$ , rezultă că informația mutuală  $i(x_k, y_j)$  transmisă pe canal este negativă. Acest rezultat teoretic își găsește corespondențe numeroase în lumea reală. De exemplu, dacă un student are o anumită nedeterminare (neînțelegere) asupra unei demonstrații și dacă cere ajutorul unui coleg pentru a-și înlătura această nedeterminare, se pot întâmpla două situații: dacă nedeterminarea a dispărut sau s-a micșorat, înseamnă că  $i$  s-a transmis o informație pozitivă; dacă nedeterminarea a crescut, înseamnă că  $i$  s-a transmis o informație negativă. Transmiterea unei informații negative este uneori deliberat provocată, pentru a se crea o situație de incertitudine cu diverse scopuri. Deși informația mutuală poate fi negativă, așa cum se va demonstra ulterior, informația medie transmisă, adică transinformația, este totdeauna nenegativă.

Ținând cont de (2.14), relația (2.44) se poate scrie într-o formă simetrică, după cum urmează

$$i(x_k, y_j) = -\log \frac{p(x_k|y_j) \cdot p(y_j)}{p(x_k) \cdot p(y_j)} = \log \frac{p(x_k \cap y_j)}{p(x_k) \cdot p(y_j)} \quad (2.45)$$

Simetria în raport cu variabilele  $x_k$  și  $y_j$  din relația (2.45) are corespondent fizic în faptul că informația dată de  $x_k$  asupra lui  $y_j$  este egală cu informația dată de  $y_j$  asupra lui  $x_k$ .

Informația mutuală definită cu relațiile (2.44) sau (2.45) determină o variabilă aleatoare discretă, care poate lua valori cu probabilitățile  $p(x_k \cap y_j); k = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ . Valoarea medie

statistică a acestei variabile aleatoare discrete se numește *transinformație* și măsoară, din punct de vedere fizic, informația medie transmisă pe canalul discret de transmisiuni. Notând această mărime cu  $I(X, Y)$ , se poate scrie

$$I(X, Y) = \overline{i(x_k, y_j)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) i(x_k, y_j) \quad (2.46)$$

Înlocuind (2.44) sau (2.45) în relația (2.46), se obțin două relații echivalente de calcul pentru transinformație:

$$I(X, Y) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log \frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)} \quad (2.47)$$

$$I(X, Y) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log \frac{p(x_k \cap y_j)}{p(x_k) \cdot p(y_j)} \quad (2.48)$$

Simetria funcției  $I(X, Y)$  în raport cu variabilele  $x_k$  și  $y_j$  din relația (2.48) semnifică fizic faptul că informația câmpului de la intrare,  $X$ , asupra câmpului de la ieșire,  $Y$ , este egală cu informația câmpului de la ieșire asupra câmpului de la intrare.

În cazul limită (extrem) al lipsei perturbațiilor de pe canalul de transmisiuni, înlocuind (2.20) în (2.47), rezultă

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log \frac{\delta_{kj}}{p(x_k)} = \\ &= - \sum_{k=1}^n \log p(x_k) \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j) \delta_{kj} \log \delta_{kj} = \quad (2.49) \\ &= - \sum_{k=1}^n p(x_k) \log p(x_k) = H(X) \end{aligned}$$

Deoarece, în lipsa perturbațiilor, câmpurile de la intrarea și de la ieșirea canalului de transmisiuni sunt identice,  $X=Y$ , se poate scrie

$$I(X, Y) = H(X) = H(Y) \quad (2.50)$$

În celălalt caz limită, al perturbațiilor foarte puternice, înlocuind (2.24) în (2.48), rezultă

$$I(X, Y) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log \frac{p(x_k)p(y_j)}{p(x_k)p(y_j)} = 0, \quad (2.51)$$

Rezultatul obținut nu este surprinzător, deoarece este binecunoscut faptul că pe canalele foarte perturbate (eventual bruiate) nu se poate transmite nici o informație.

Dacă se fac corespondențele  $m(A) \leftrightarrow H(X)$ ,  $m(B) \leftrightarrow H(Y)$ , și  $m(A \cap B) \leftrightarrow I(X, Y)$ , rezultă interpretarea geometrică intuitivă a transinformației din Fig. 2.4. În această figură suprafața cercului mic este  $m(A)$ , a cercului mare  $m(B)$ , iar suprafața hașurată reprezintă transinformația.

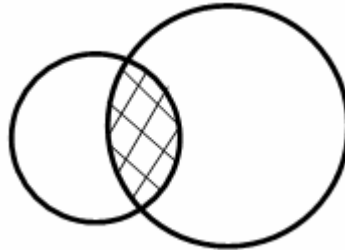


Fig. 2.4 Interpretarea geometrică a transinformației

## 2.5. Principalele relații între mărimile informaționale

Cele mai importante relații între mărimile informaționale, definite anterior, sunt

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (2.52, a)$$

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) \quad (2.52, b)$$

$$I(X, Y) = H(Y) + H(X) - H(X, Y) \quad (2.53)$$



$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.54,a)$$

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (2.54,b)$$

Relația (2.52,a) rezultă din (2.19) și (2.33), după cum urmează

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log [p(x_k) p(y_j|x_k)] = \\ &= -\sum_{k=1}^n \log p(x_k) \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log p(y_j|x_k) = \\ &= -\sum_{k=1}^n p(x_k) \log p(x_k) + H(Y|X) = H(X) + H(Y|X) \end{aligned} \quad (2.55)$$

În mod analog, relația (2.52,b) rezultă din (2.19) și (2.31). Pentru a demonstra relația (2.53), se prelucrează adecvat relația (2.48) și se ține cont de (2.19), așa cum este arătat în continuare:

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= -\sum_{k=1}^n \log p(x_k) \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) - \sum_{j=1}^m \log p(y_j) \sum_{k=1}^n p(x_k \cap y_j) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log p(y_j|x_k) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Relația (2.54,a) se obține înlocuind (2.52,b) în (2.53), iar relația (2.54,b) se obține înlocuind (2.52,a) în (2.53).

Relațiile dintre cele șase mărimi informaționale sunt utile pentru un calcul expeditiv a trei mărimi informaționale, dacă celelalte trei sunt cunoscute.

În afara relațiilor de egalitate între cele șase mărimi informaționale, între acestea se pot stabili următoarele relații de inegalitate

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (2.57,a)$$

$$H(X|Y) \leq H(X) \quad (2.58)$$

$$H(Y|X) \leq H(Y) \quad (2.59)$$

$$I(X, Y) \geq 0 \quad (2.60)$$

$$I(X, Y) \leq H(X) \quad (2.61)$$

$$I(X, Y) \leq H(Y) \quad (2.62)$$

Relația (2.57,a) este echivalentă cu

$$H(X, Y) - H(X) - H(Y) \leq 0 \quad (2.57,b)$$

Pentru demonstrarea inegalității (2.57,b), se ține cont de (2.19), (2.2) și (2.3), adică

$$\begin{aligned} H(X, Y) - H(X) - H(Y) &= -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log p(x_k \cap y_j) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log p(x_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log p(y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log \frac{p(x_k) p(y_j)}{p(x_k \cap y_j)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dacă în (2.63) se face notația

$$\frac{p(x_k) \cdot p(y_j)}{p(x_k \cap y_j)} = z \quad (2.64)$$

și se ține cont de (1.36), rezultă

$$\begin{aligned} H(X, Y) - H(X) - H(Y) &\leq \log e \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \left[ \frac{p(x_k) p(y_j)}{p(x_k \cap y_j)} - 1 \right] = \\ &= \log e \left[ \sum_{k=1}^n p(x_k) \sum_{j=1}^m \log p(y_j) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \right] = \log e (1 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Relația (2.58) se obține înlocuind (2.52,b) în (2.57,a), iar

relația (2.59), înlocuind (2.52,a) în (2.57,a). Relația (2.60) rezultă din (2.53) și (2.57,a). Relațiile (2.61) și (2.62) se deduc din (2.54,a), respectiv (2.54,b), ținând cont că orice entropie este nenegativă.

## 2.6. Principalele tipuri de canale de transmisiuni

În cele mai frecvente situații practice, canalele discrete de transmisiuni sunt caracterizate prin matricea de zgomot (2.12). Funcție de structura acestei matrice, canalele discrete de transmisiuni se clasifică astfel

- a) canale cu echivocație nulă;
- b) canale cu eroare medie nulă;
- c) canale uniforme față de intrare;
- d) canale uniforme față de ieșire;
- e) canale simetrice.

Prin definiție, *un canal este cu echivocație nulă*, dacă în fiecare coloană a matricei sale de zgomot există o singură probabilitate condiționată diferită de zero, restul fiind nule. De exemplu, matricea de zgomot a unui canal cu echivocație nulă, de forma

$$\left[ P(Y|X) \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

are graful reprezentat în Fig.2.5.

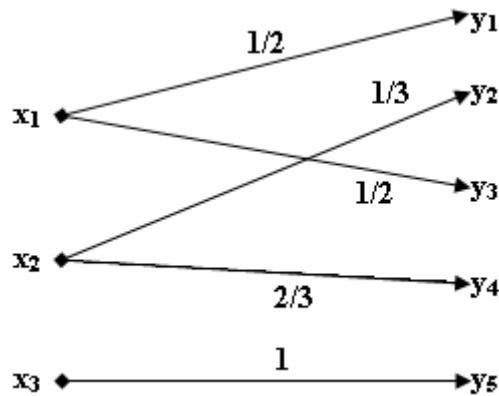


Fig. 2.5. Graful unui canal cu echivocație nulă

În cazul acestui tip de canal, dacă se știe ce s-a recepționat, se știe cu certitudine ce s-a transmis, reciproca nefiind totdeauna adevărată. Înseamnă că, în general, pentru acest tip de canal, probabilitățile  $p(x_k|y_j)$ ;  $k = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ , pot lua fie valoarea 1, fie 0. Conform relației (2.30), echivocația acestui tip de canal este

$$H(X|Y) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j) \delta_{kj} \log \delta_{kj} = 0 \quad (2.66)$$

unde  $\delta_{kj}$  poate lua fie valoarea 1, fie valoarea 0.

Conform relației (2.54,a), informația medie transmisă pe un astfel de canal este

$$I(X, Y) = H(X) \quad (2.67)$$

Prin definiție, un canal este cu eroare medie nulă, dacă în fiecare linie a matricei sale de zgomot există o singură probabilitate condiționată diferită de zero, restul fiind nule. Matricea de zgomot fiind stohastică, rezultă că unica probabilitate condiționată din fiecare linie diferită de zero este egală cu unitatea. Din această categorie de canale fac parte, de exemplu, toate circuitele combinaționale și secvențiale.

De exemplu, considerând o poartă logică ȘI cu două intrări, dacă la intrarea acestui "canal" se aplică simbolurile  $x_1=00$ ,  $x_2=01$ ,  $x_3=10$  și  $x_4=11$ , la ieșire vor rezulta simbolurile  $y_0=0$  sau  $y_2=1$ , astfel că matricea de zgomot, în acest caz particular, este de

$$\text{forma } [P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iar graful canalului este reprezentat în Fig. 2.6.

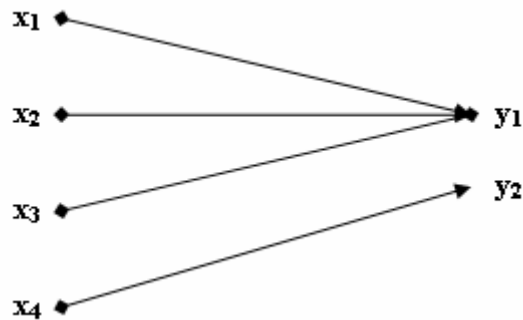


Fig. 2.6 Graful unui canal cu eroare medie nulă

În general, în cazul acestui tip de canal discret de transmisiuni, dacă se știe ce se transmite, se știe cu certitudine ce se recepționează, reciproca nefiind totdeauna adevărată.

Ținând cont de relația (2.32), eroarea medie a unui astfel de canal discret de transmisiuni este

$$H(Y|X) = -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k) \delta_{kj} \log \delta_{kj} = 0 \quad (2.68)$$

de unde și denumirea canalului. Informația medie transmisă pe un astfel de canal este egală cu entropia câmpului de la ieșirea canalului.

Prin definiție, *un canal se numește uniform față de intrare*, dacă în fiecare linie a matricei sale de zgomot se folosește aceeași mulțime de probabilități condiționate, ordinea de scriere a acestor probabilități putând diferi de la o linie la alta. În cazul acestor canale, se poate demonstra că eroarea lor medie nu depinde de probabilitățile  $p(x_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , cu care sunt aplicate simbolurile la intrarea canalului.

Într-adevăr, conform definiției acestui tip de canal, se poate scrie

$$\sum_{j=1}^m p(y_j|x_k) \log p(y_j|x_k) = A = \text{const}, \quad (\forall) k = \overline{1, n} \quad (2.69)$$

Ținând cont de (2.32) și (2.69), rezultă

$$H(Y|X) = -\sum_{j=1}^m p(y_j|x_k) \log p(y_j|x_k) \cdot \sum_{k=1}^n p(x_k) = -A \quad (2.70)$$

Prin definiție, *un canal se numește uniform față de ieșire*, dacă în fiecare coloană a matricei sale de zgomot se folosește aceeași mulțime de probabilități condiționate, ordinea de scriere a acestor probabilități putând diferi de la o coloană la alta. În cazul acestor canale se poate demonstra că, dacă simbolurile se aplică la intrarea canalului echiprobabil, atunci la ieșirea acestuia simbolurile vor rezulta, de asemenea, echiprobabile.

Într-adevăr, se presupune că

$$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = \frac{1}{n} \quad (2.71)$$

Conform relațiilor (2.3) și (2.11), se poate scrie

$$\begin{aligned} p(y_j) &= \sum_{k=1}^n p(y_j \cap x_k) = \sum_{k=1}^n p(x_k) p(y_j|x_k) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(y_j|x_k), \quad (\forall) j = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dar

$$\sum_{k=1}^n p(y_j|x_k) = B = \text{const.}, \quad (\forall) j = \overline{1, m} \quad (2.73)$$

deoarece în fiecare coloană se folosesc aceleași probabilități condiționate.

Ținând cont de (2.73), relația (2.72) devine

$$p(y_j) = \frac{B}{n}, \quad (\forall) j = \overline{1, m} \quad (2.74)$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^m p(y_j) = 1 \quad (2.75)$$

rezultă

$$B = \frac{n}{m} \quad (2.76)$$

și deci

$$p(y_j) = \frac{1}{m}, \quad (\forall) j = \overline{1, m} \quad (2.77)$$

Prin definiție, *un canal discret de transmisiuni se numește simetric*, dacă este caracterizat de o matrice de zgomot pătrată și este uniform atât față de intrare, cât și față de ieșire.

## **2.7. Definirea capacității, redundanței și eficienței unui canal discret de transmisiuni**

Pentru a defini o măsură a eficienței cu care se transmite informația pe un canal discret de transmisiuni și apoi o margine superioară a acesteia, C. E. Shannon a introdus noțiunea de *capacitatea canalului*.

Prin definiție, *capacitatea unui canal discret* de transmisiuni este valoarea maximă a transinformației, adică

$$\begin{aligned} C &= \max [I(X, Y)] = \max [H(X) - H(X|Y)] = \\ &= \max [H(Y) - H(Y|X)] \end{aligned} \quad (2.78)$$

Maximizările în (2.78) se fac în raport cu probabilitățile  $p(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , ale simbolurilor de la intrarea canalului.

Pentru a realiza acest deziderat, este necesar uneori ca sursa primară de informație  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  ce-și furnizează mesajele cu probabilitățile fixe  $p(s_k)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , să fie transformată într-o sursă secundară  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , astfel încât probabilitățile  $p(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , cu care sursa secundară furnizează simbolurile  $x_i$  la intrarea canalului să maximizeze transinformația.

Această transformare corespunde unei adaptări statistice a sursei primare la canalul de transmisiuni și se realizează prin operația de codare.

Prin *operația de codare* se întocmesc cuvinte de cod formate din succesiuni de simboluri  $x_i \in X$ . Dacă mulțimea cuvintelor de cod se notează cu  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , atunci prin operația de codare se realizează bijecția dintre  $s_k \in S$  și  $v_k \in V$ . Cuvintele de cod se vor aplica la intrarea canalului, evident, cu aceleași probabilități cu care sunt furnizate mesajele, adică  $p(v_k) = p(s_k)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , iar cuvintele de cod trebuie astfel întocmite, încât probabilitățile de folosire  $p(x_i)$  ale simbolurilor  $x_i$  să maximizeze informația medie transmisă pe canal, adică transinformația.

Prin definiție, se numește *redundanță absolută* a unui canal discret de transmisiuni diferența dintre capacitatea canalului și



informația medie transmisă pe acesta, adică

$$R_c = C - I(X, Y) \quad (2.79)$$

*Redundanța relativă* se obține prin raportarea redundanței absolute la capacitatea canalului, adică

$$\rho_c = \frac{R_c}{C} = 1 - \frac{I(X, Y)}{C} \quad (2.80)$$

Prin definiție, se numește eficiența canalului de transmisiuni raportul dintre informația medie transmisă pe canal și capacitatea acestuia, adică

$$\eta_c = \frac{I(X, Y)}{C} \quad (2.81)$$

## 2.8. Determinarea capacității canalului simetric de ordin n

Matricea de zgomot a unui astfel de canal este

$$\left[ P(Y|X) \right] = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{n-1} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \frac{p}{n-1} & 1-p & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{n-1} & \frac{p}{n-1} & \cdots & 1-p \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

unde  $0 < p < 1$  este un parametru ce caracterizează canalul respectiv.

Canalul fiind uniform față de intrare, înseamnă că eroarea sa medie este o constantă. Într-adevăr

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k \cap y_j) \log p(y_j|x_k) = \\
&= -\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_k) p(y_j|x_k) \log p(y_j|x_k) = \\
&= -\left[ (1-p) \log(1-p) + (n-1) \frac{p}{n-1} \log \frac{p}{n-1} \right] \cdot \sum_{k=1}^n p(x_k) = \\
&= -(1-p) \log(1-p) - p \log p + p \log(n-1) = \text{const.}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Datorită acestei proprietăți, capacitatea acestui canal discret de transmisiuni se determină ușor, utilizând relația

$$C = \max [H(Y) - H(Y|X)] = \max [H(Y)] - H(Y|X) \tag{2.84}$$

Pe de altă parte, valoarea maximă a entropiei  $H(Y)$  se atinge atunci când

$$p(y_1) = p(y_2) = \dots = p(y_n) = \frac{1}{n}, \tag{2.85}$$

obținându-se

$$\max [H(Y)] = \log n \tag{2.86}$$

Canalul fiind uniform și față de ieșire, rezultă că, dacă

$$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = \frac{1}{n}, \tag{2.87}$$

este adevărată și relația (2.85).

Înlocuind (2.83) și (2.86) în relația (2.84), rezultă

$$C = \log n + (1-p) \log(1-p) + p \log p - p \log(n-1) \tag{2.88}$$

care reprezintă capacitatea canalului simetric de ordinul  $n$  și care se atinge când simbolurile de la intrarea acestuia sunt aplicate echiprobabil.

Un caz particular, frecvent întâlnit în aplicații, este acela al canalului *binar simetric*. Acest caz se obține pentru  $n=2$ .

Particularizând relația (2.82) pentru  $n=2$ , se obține matricea

de zgomot a canalului binar simetric, cu graful reprezentat în Fig. 2.7.

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

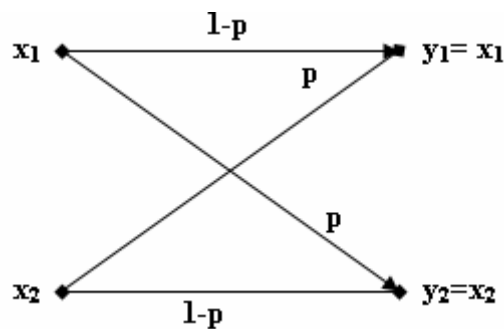


Fig. 2.7. Graful unui canal binar simetric

În acest caz,  $p$  reprezintă probabilitatea transmisiei incorecte (eronate), în timp ce  $1-p$  probabilitatea transmiterii corecte.

În cazurile practice, prin  $x_1$  și  $x_2$  se pot înțelege "0" și "1" logic, două semnale sinusoidale de aceeași amplitudine, dar de frecvențe diferite, două semnale de aceeași amplitudini și frecvențe, dar de faze diferite etc.

Capacitatea canalului simetric de ordinul doi se obține particularizând relația generală (2.88) pentru  $n=2$ , rezultând

$$C = 1 + (1-p) \log(1-p) + p \log p \quad (2.90)$$

sau, cu notația (1.44), se poate scrie

$$C = 1 - H(p) \quad (2.91)$$

Având în vedere reprezentarea grafică a funcției  $H(p)$  (Fig. 1.3), reprezentarea grafică a capacității canalului simetric de ordinul doi, funcție de parametrul  $p$ , este dată în Fig. 2.8. În această

figură, cu linie întreruptă s-a reprezentat  $H(p)$ , iar cu linie continuă capacitatea canalului. Atât din relația (2.90), cât și din reprezentarea grafică a capacității canalului simetric de ordinul doi rezultă că aceasta este nulă pentru  $p=1/2$  și maximă, egală cu  $C=1$ , pentru  $p=0$  sau  $p=1$ .

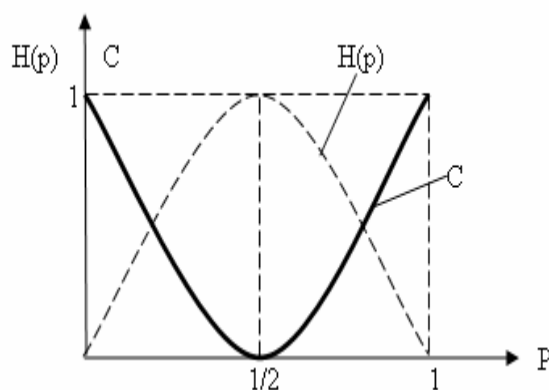


Fig. 2.8. Reprezentarea grafică a capacității canalului simetric de ordin doi

## 2.9. Determinarea capacității canalului binar cu anulări

Acest canal este uniform față de intrare, având un alfabet de intrare binar și un alfabet de ieșire ternar.

Matricea de zgomot a acestui canal este de forma

$$\left[ P(Y|X) \right] = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & 1-p-q \\ 1-p-q & q & p \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

unde  $p$  și  $q$  sunt numere reale ce caracterizează canalul respectiv,

satisfăcând condițiile

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 1 \end{cases} \quad (2.93)$$

Dacă, de exemplu,  $x_1$ , reprezintă un semnal de frecvență  $f_1$ , iar  $x_2$  un semnal de frecvență  $f_2$ , atunci prin  $y_1$ , se va înțelege un semnal de frecvență  $f_1$ , prin  $y_3$ , un semnal de frecvență  $f_2$  iar prin  $y_2$  un semnal de frecvență  $(f_1 + f_2)/2$ .

La recepționarea simbolului  $y_2$ , egal probabil ar fi putut fi transmise simbolurile  $x_1$ , sau  $x_2$  și din această cauză, la recepționarea unui astfel de semnal, el se anulează, de unde și denumirea canalului.

Canalul fiind uniform față de intrare, înseamnă că eroarea sa medie este o constantă. Într-adevăr

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_k \cap y_j) \log p(y_j|x_k) = \\ &= -\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_k) p(y_j|x_k) \log p(y_j|x_k) = \\ &= -[p \log p + q \log q + (1-p-q) \log(1-p-q)][p(x_1) + p(x_2)] = \\ &= -p \log p - q \log q - (1-p-q) \log(1-p-q) = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Datorită acestei proprietăți, capacitatea acestui canal de transmisiuni se determină ușor utilizând relația (2.84).

Spre deosebire de cazul canalului simetric de ordinul  $n$ , când valoarea maximă a entropiei  $H(Y)$  se atinge când simbolurile recepționate erau echiprobabile, în acest caz, așa cum se va demonstra ulterior,  $p(y_2) = \text{const.}$  și, deci, valoarea maximă a

entropiei se obține atunci când

$$p(y_1) = p(y_3) \quad (2.95)$$

Într-adevăr, conform relației (2.3), se poate scrie

$$p(y_1) = p(x_1) \cdot p + p(x_2) \cdot (1 - p - q) \quad (2.96)$$

$$p(y_2) = q[p(x_1) + p(x_2)] = q = \text{const.} \quad (2.97)$$

$$p(y_3) = p(x_1) \cdot (1 - p - q) + p(x_2) \cdot p \quad (2.98)$$

Înlocuind (2.96) și (2.98) în (2.95), rezultă

$$(2p + q - 1)p(x_1) = (2p + q - 1)p(x_2) \quad (2.99)$$

Dacă

$$(2p + q - 1) \neq 0 \quad (2.100)$$

entropia  $H(Y)$  devine maximă atunci când

$$p(x_1) = p(x_2) \quad (2.101)$$

și cum

$$p(x_1) + p(x_2) = 1 \quad (2.102)$$

rezultă că entropia  $H(Y)$  devine maximă, dacă simbolurile  $x_1$  și  $x_2$  sunt aplicate echiprobabil la intrarea canalului, adică

$$p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \quad (2.103)$$

Ținând cont de (2.103), relațiile (2.96) și (2.98) devin

$$p(y_1) = p(y_3) = \frac{1 - q}{2} \quad (2.104)$$

Cu relațiile (2.97) și (2.104), valoarea maximă a entropiei  $H(Y)$  este

$$\max[H(Y)] = 1 - q - (1 - q) \log(1 - q) - q \log q \quad (2.105)$$

Înlocuind relațiile (2.94) și (2.105) în relația (2.84), rezultă capacitatea canalului binar cu anulări, de forma

$$C = 1 - q - (1 - q) \log(1 - q) + p \log p + (1 - p - q) \log(1 - p - q) \quad (2.106)$$

În cazul  $q=0$ , canalul binar cu anulări devine binar simetric. Impunând  $q=0$  în relația (2.106), rezultă capacitatea canalului binar simetric, dată de relația (2.90).

Dacă relația (2.100) nu este satisfăcută, se poate scrie

$$2p + q - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1 - q}{2} \quad (2.107)$$

Înlocuind (2.107) în (2.106), rezultă  $C=0$ . În acest caz simbolurile  $y_1$  și  $y_3$  provin egal probabil din simbolurile  $x_1$ , și  $x_2$ , astfel încât, pentru acest caz particular, nu se transmite nici o informație pe canalul respectiv.