Funcțiile Q, *erf* şi *erfc*

1. Funcția Q

Calculul probabilităților ce implică procese Gaussiene necesită determinarea ariei unei porțiuni de sub graficul funcției densitate de probabilitate (pdf) Gaussiene (normale), ca în *Figura 1*.

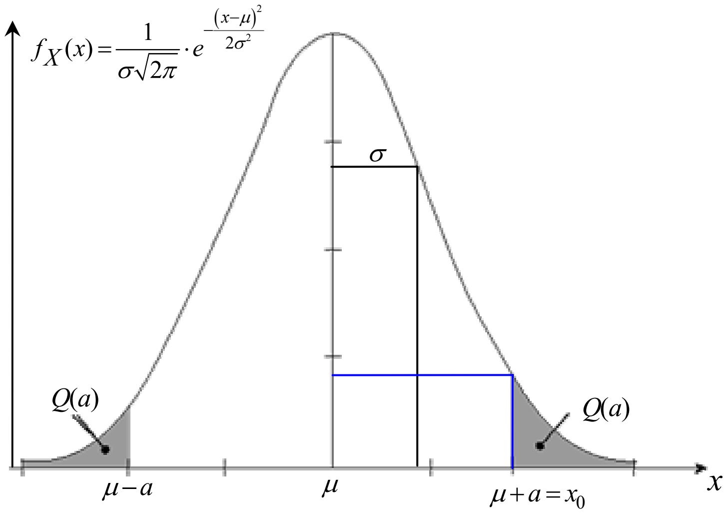

Figura 1. Distribuția Gaussiană.

Figura 1 ilustrează probabilitatea ca o variabilă aleatoare X să aibă valori mai mari decât x_0, $P(x \geq x_0)$ fiind dată de relația (1).

$$P(x \geq x_0) = \int_{x_0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot \mathrm{d}x \tag{1}$$

Integrata din ecuația (1) nu poate fi calculată simbolic conducând la o integrală nedefinită, însă se poate rescrie ca în relația (3), folosind substituția (2).

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{2}$$

$$P\left(y > \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot \mathrm{d}y \tag{3}$$

Termenul de integrat din relația (3) reprezintă distribuția Gaussiană cu media $\mu = 0$ şi deviația standard $\sigma = 1$. Evaluarea respectivei integrale se poate realiza cu ajutorul funcției Q, definită prin relația (4). Rezultă astfel relația (5).

$$Q(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot \mathrm{d}y \tag{4}$$

$$P\left(y > \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = Q(z) \tag{5}$$

Funcția $Q(z)$ este limitată de două funcții a căror expresie analitică este exprimată de relația (6), expresii care pentru $z>3$ aproximează chiar destul de bine funcția $Q(z)$.

$$\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{1}{z\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \le Q(z) \le \frac{1}{z\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{6}$$

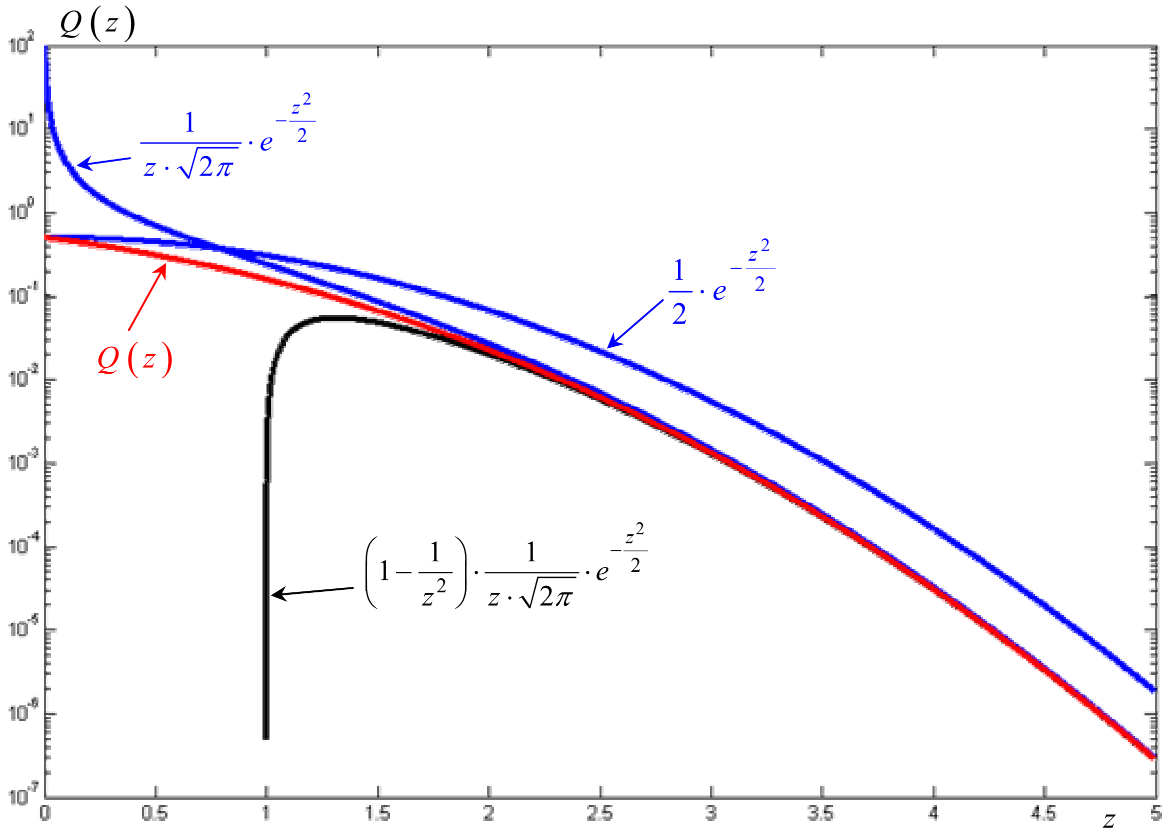

Figura 2. Funcția $Q(z)$ și limitele sale analitice.

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0	0.5	*2*	0.02275
0.1	0.46017	*2.1*	0.017864
0.2	0.42074	*2.2*	0.013903
0.3	0.38209	*2.3*	0.010724
0.4	0.34458	*2.4*	0.0081975
0.5	0.30854	*2.5*	0.0062097
0.6	0.27425	*2.6*	0.0046612
0.7	0.24196	*2.7*	0.003467
0.8	0.21186	*2.8*	0.0025551
0.9	0.18406	*2.9*	0.0018658
1	0.15866	*3*	0.0013499
1.1	0.13567	*3.1*	0.0009676
1.2	0.11507	*3.2*	0.00068714
1.3	0.0968	*3.3*	0.00048342
1.4	0.080757	*3.4*	0.00033693
1.5	0.066807	*3.5*	0.00023263
1.6	0.054799	*3.6*	0.00015911
1.7	0.044565	*3.7*	0.0001078
1.8	0.03593	*3.8*	0.000072348
1.9	0.028717	*3.9*	0.000048096

Tabelul 1. Valori ale funcției $Q(z)$.

Două dintre cele mai importante proprietăți ale funcției Q sunt exprimate de relațiile (7) şi (8).

$$Q(-z) = 1 - Q(z) \tag{7}$$

$$Q(0) = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Reprezentarea grafică a funcției $Q(z)$ este cea din *Figura 2*, în timp ce *Tabelul 1* redă câteva valori ale acesteia.

2. Funcția de *eroare* şi complementara sa

Funcția de eroare erf este definită de expresia (9) iar complementara acesteia $erfc$ de (10). Relația (11) arată dependența celor două funcții una de alta, iar relațiile (12), (13) şi (14) redau dependența erf şi $erfc$ de funcția $Q(z)$.

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-x^2} \cdot \mathrm{d}x \tag{9}$$

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_z^\infty e^{-x^2} \cdot \mathrm{d}x \tag{10}$$

$$erfc(z) = 1 - erf(z) \tag{11}$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \tag{12}$$

$$erfc(z) = 2 \cdot Q\left(\sqrt{2} \cdot z\right) \tag{13}$$

$$erf(z) = 1 - 2 \cdot Q\left(\sqrt{2} \cdot z\right) \tag{14}$$

O serie de valori semnificative ale funcției de eroare sunt tabelate în *Tabelul 2*.

z	$erf(z)$
0.1	0.11246
0.2	0.2227
0.3	0.32863
0.4	0.42839
0.5	0.5205
0.6	0.60386
0.7	0.6778
0.8	0.7421
0.9	0.79691
1	0.8427
1.1	0.88021
1.2	0.91031
1.3	0.93401
1.4	0.95229
1.5	0.96611

z	$erf(z)$
1.6	0.97635
1.7	0.98379
1.8	0.98909
1.9	0.99279
2	0.99532
2.1	0.99702
2.2	0.99814
2.3	0.99886
2.4	0.99931
2.5	0.99959
2.6	0.99976
2.7	0.99987
2.8	0.99992
2.9	0.99996
3	0.99998

Tabelul 2. Valori ale funcției de eroare erf.