

CAPITOLUL 4

ANALIZA SEMNALELOR DISCRETE ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

Un alt instrument matematic foarte util în analiza și proiectarea SLIT îl constituie transformata și seria Fourier. Aceste reprezentări ale semnalelor implică descompunerea semnalului în sinusoidale sau exponențiale complexe. Astfel, semnalul este reprezentat în *domeniul frecvență*.

Pentru clasa semnalelor periodice, descompunerea se numește *serie Fourier*, iar pentru clasa semnalelor aperiodice de energie finită, descompunerea se numește *transformată Fourier*.

Aceste descompuneri sunt importante, deoarece permit obținerea cu ușurință a răspunsului sistemelor SLIT la astfel de semnale, pe baza proprietății de liniaritate a seriei și transformatei Fourier.

Din domeniul fizicii au fost preluate noțiunile de spectru, analiză spectrală și sinteză de spectru, prin analogie cu următoarea situație: lumina albă este descompusă cu ajutorul unei prisme în culorile curcubeului, fiecare din acestea corespunzând unei anumite frecvențe din spectrul vizual.

Analiza în frecvență a unui semnal implică descompunerea sa în componente sinusoidale. Rolul prisme este preluat de seria și transformata Fourier. Ca și în fizică, termenul de *spectru* se referă la conținutul de frecvențe al semnalului. Procesul de obținere a spectrului se numește *analiză spectrală*. În practică determinarea spectrului unui semnal, bazată pe măsurători asupra semnalului, se numește *estimare spectrală*. Transformata Fourier a unui semnal se numește *funcție de densitate spectrală* sau, mai simplu, *spectrul* semnalului.

Recombinarea sinusoidelor componente în scopul refacerii semnalului original este o problemă de *sinteză Fourier*. În cele ce urmează analiza se va referi atât la semnale analogice periodice și aperiodice, cât și la semnale discrete, de asemenea, periodice și aperiodice.

4.1. Analiza în frecvență a semnalelor analogice

Pentru semnalele analogice periodice și aperiodice se vor trece succint în revistă în următoarele două paragrafe câteva aspecte referitoare la ecuația de analiză, ecuația de sinteză, spectrul de amplitudine, spectrul de fază, spectrul de putere și, respectiv, spectrul de energie al semnalelor, tratarea detaliată a acestor subiecte fiind prezentată în [13], [16], [20].

4.1.1. Analiza în frecvență a semnalelor analogice periodice

Reprezentarea matematică a semnalelor periodice este dată de seria Fourier care este o sumă ponderată de sinusoidă armonice sau exponențiale complexe având aceeași perioadă fundamentală $T_p=1/F_0$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (4.1)$$

Semnalul exponențial $\{e^{j2\pi k F_0 t}, k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots\}$ este "blocul constructiv" de bază cu ajutorul căruia se construiesc semnale periodice diferite, prin alegerea potrivită a frecvenței fundamentale F_0 și a coeficienților $\{c_k\}$. F_0 reprezintă frecvența fundamentală a semnalului $x(t)$, iar coeficienții $\{c_k\}$ determină forma semnalului. Pentru un semnal periodic $x(t)$, de perioadă T_p , coeficienții $\{c_k\}$ se determină cu relația [23]

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \quad (4.2)$$

Coeficienții $\{c_k\}$ formează *spectrul* semnalului periodic. Modulul coeficienților formează *spectrul de amplitudine*, iar argumentul lor, *spectrul de fază*. Se observă că integrala poate fi evaluată pe orice interval de lungime T_p al semnalului $x(t)$. În reprezentarea semnalelor periodice prin serii Fourier apare problema convergenței seriei date de (4.1) la $x(t)$ pentru orice valoare a lui t .

Există unele condiții care garantează convergența [23], dintre care un set foarte utilizat în prelucrarea semnalelor este cunoscut sub numele de *condițiile Dirichlet*, care asigură faptul că $x(t)$ este egal cu dezvoltarea sa în seria dată de (4.1) în orice punct de continuitate, dacă:

1. Semnalul $x(t)$ are un număr finit de discontinuități pe orice interval finit;

2. Semnalul conține un număr finit de maxime și minime în orice perioadă;
3. Semnalul este absolut integrabil pe orice perioadă, adică

$$\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty \quad (4.3)$$

O altă condiție de convergență, dar mai slabă decât condiția 3 din setul anterior este aceea ca semnalul să aibă energia finită pe o perioadă, adică să fie de *de pătrat integrabil* pe o perioadă, adică

$$\int_{T_p} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.4)$$

Aceasta garantează faptul că energia semnalului diferență

$$d(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \cdot 2\pi k F_0 t} \quad (4.5)$$

este zero, deși $x(t)$ și seria sa Fourier pot diferi pentru toate valorile lui t . Un semnal absolut integrabil este de energie finită, dar reciproca nu este adevărată. Ambele condiții prezentate mai sus sunt *suficiente*, dar nu și necesare, adică există semnale care nu respectă condițiile Dirichlet și nu sunt nici de pătrat integrabil, dar seria Fourier este convergentă.

Toate semnalele periodice de interes practic satisfac aceste condiții. În concluzie, dacă $x(t)$ este periodic și satisface condițiile Dirichlet, el poate fi reprezentat într-o serie Fourier (4.1), cu coeficienții specificați de (4.2). Ecuația (4.1) se numește *ecuație de sinteză*, iar ecuația (4.2), *ecuație de analiză*.

În general, coeficienții Fourier sunt complecși, iar dacă semnalul $x(t)$ este real, coeficienții simetrici sunt complexi conjugați $c_{-k} = c_k^*$.

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k} \quad ; \quad c_k^* = c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k} \quad (4.6)$$

Spectrul de amplitudine este par

$$|c_{-k}| = |c_k|, \quad (4.7)$$

iar cel de fază este impar

$$\angle c_{-k} = -\angle c_k \quad (4.8)$$

Un semnal periodic are energie infinită și putere medie finită, dată de relația

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt \quad (4.9)$$

Între coeficienții Fourier și puterea semnalului periodic există relația

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (4.10)$$

Relațiile (4.9) și (4.10) ilustrează echivalența puterilor, pentru semnale de putere finită.

Mărimea $|c_k|^2$ reprezintă puterea medie a armonicilor k a semnalului, iar puterea medie totală a semnalului periodic este suma puterilor medii ale armonicilor. Reprezentarea lui $|c_k|^2$ funcție de frecvențele kF_0 , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ formează *spectrul densității de putere* a semnalului periodic $x(t)$.

Deoarece $|c_k|^2$ există numai pentru valori discrete ale frecvenței ($0; \pm F_0; \pm 2F_0 \dots$), se spune că spectrul semnalului periodic este format din linii spectrale. Distanța dintre două linii spectrale consecutive este inversa perioadei fundamentale $F_0 = \frac{1}{T_p}$, iar forma spectrului (distribuția de putere a semnalului) depinde de caracteristicile în domeniul timp ale semnalului.

4.1.2. Analiza în frecvență a semnalelor analogice aperiodice

Semnalele analogice aperiodice se reprezintă în domeniul frecvență cu ajutorul transformatei Fourier care, pentru semnalul $x(t)$, se definește cu relația

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (4.11)$$

$X(F)$, transformata Fourier directă a semnalului $x(t)$, mai este cunoscută sub numele de funcție de densitate spectrală și este o funcție de variabilă continuă F . Transformata Fourier inversă este dată de relația

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (4.12)$$

și permite determinarea semnalului $x(t)$ din $X(F)$. Relația (4.11) se numește *ecuație de analiză*, iar (4.12) *ecuație de sinteză*.

Perechile Fourier (4.11) și (4.12) se pot exprima și în funcție de pulsația $\Omega = 2\pi F$, $dF = \frac{d\Omega}{2\pi}$, în forma

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (4.13)$$

și

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (4.14)$$

Un set de condiții suficiente pentru existența transformatei Fourier a semnalelor aperiodice este dat de condițiile Dirichlet [23]:

1. Semnalul $x(t)$ are un număr finit de discontinuități;
2. Semnalul $x(t)$ conține un număr finit de maxime și minime;
3. Semnalul $x(t)$ este absolut integrabil, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.15)$$

O altă condiție de convergență, dar mai slabă decât (4.15), este aceea ca semnalul să fie de energie finită, adică să fie de *de pătrat integrabil* [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.16)$$

Un semnal absolut integrabil este de energie finită, însă reciproca nu este întotdeauna adevărată. În general, transformata Fourier $X(F)$ este o mărime complexă, care se exprimă în coordonate polare sub forma

$$X(F) = |X(F)|e^{j\theta(F)} \quad (4.17)$$

unde $|X(F)|$ este modulul spectrului, iar $\theta(F)$ faza sa.

Dacă semnalul $x(t)$ este real, atunci transformata Fourier prezintă proprietăți de simetrie, și anume, spectrul de amplitudine este o funcție pară

$$|X(-F)| = |X(F)| \quad (4.18)$$

iar cel de fază este o funcție impară

$$\angle X(-F) = -\angle X(F) \quad (4.19)$$

Energia matematică a unui semnal $x(t)$ este dată de relația

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.20)$$

Legătura dintre energia semnalului și transformata sa Fourier $X(F)$, este dată de echivalența energiilor

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \quad (4.21)$$

care exprimă principiul conservării energiei între domeniile timp și frecvență.

Mărimea

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2, \quad (4.22)$$

care este integrandul relației (4.21), reprezintă distribuția de energie a semnalului, funcție de frecvență și se numește *spectrul densității de energie* sau *densitate spectrală de energie* a lui $x(t)$. Din (4.22) se observă că

$$S_{xx}(-F) = S_{xx}(F) \quad (4.23)$$

adică spectrul densității de energie a unui semnal real are simetrie pară.

Din (4.22) se observă că $S_{xx}(F)$ nu conține informații despre fază și, deci, din cunoașterea spectrului de energie nu se va putea reface în mod unic semnalul $x(t)$.

4.2. Analiza în frecvență a semnalelor discrete

Așa cum s-a arătat în paragraful 1.2, spre deosebire de semnalele analogice, al căror domeniu de frecvențe se întinde de la $-\infty$ la ∞ , domeniul de frecvențe pentru semnalele discrete este restrâns în intervalul $(-\pi, \pi]$ sau $[0, 2\pi)$.

4.2.1. Serii Fourier pentru semnale discrete periodice

Pentru un semnal discret periodic ($x[n] = x[n + N], \forall n \in Z$) există numai N valori într-o perioadă, după care acestea se repetă $x[N] = x[0], x[N + 1] = x[1], \dots$. Se mai poate scrie $x[n] = x[(n)_N]$, unde $(n)_N$ este reprezentarea lui n în clase de resturi modulo N . Această observație atestă faptul că spațiul semnalelor discrete periodice, de perioadă N , are dimensiunea N . Funcțiile elementare $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, k \in N, 0 \leq k \leq N - 1$ formează o bază ortogonală completă în spațiul funcțiilor periodice de perioadă N . Un semnal discret de perioadă fundamentală N , poate conține componente de frecvență separate prin

$2\pi/N$ radiani sau $f = 1/N$ și reprezentarea în serie Fourier a unui semnal discret periodic, va conține cel mult N componente de frecvență. Aceasta reprezintă diferența esențială între reprezentările în serie Fourier ale semnalelor continue și discrete.

Se presupune un semnal discret $x[n]$, de perioadă N . Seria Fourier pentru acest semnal discret se definește cu relația

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.24)$$

unde $\{c_k\}$ sunt coeficienții dezvoltării în serie.

Pentru a determina expresia coeficienților Fourier, se folosește relația

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (4.25)$$

Multiplicând ambii membri ai relației (4.24) cu $e^{-j2\pi mn/N}$ și sumând produsul de la $n=0$ la $n=N-1$, rezultă

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-m)n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} c_m = Nc_m, \quad (m=k) \quad (4.26)$$

de unde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.27)$$

Relația (4.24) se mai numește ecuație de sinteză, iar (4.27) ecuație de analiză. Coeficienții $\{c_k\}$ reprezintă *spectrul* semnalului discret și descriu semnalul $x[n]$ în domeniul frecvență, reprezentând amplitudinea și faza asociate componentei

$$s_k[n] = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\omega_k n} \quad (4.28)$$

unde $\omega_k = 2\pi k/N$. Coeficienții $\{c_k\}$ sunt mărimi complexe, modulul coeficienților determinând *spectrul de modul*, iar faza acestora, *spectrul de fază*.

Semnalul $s_k[n]$ este periodic, de perioadă N , adică $s_k[n] = s_k[n+N]$.

Natura discretă a semnalului $s_k[n]$ determină ca și coeficienții $\{c_k\}$ să fie periodici, de aceeași perioadă N . Într-adevăr,

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = c_k \quad (4.29)$$

Spectrul unui semnal $x[n]$ periodic, de perioadă N , este o secvență periodică, de aceeași perioadă N . În consecință, cunoașterea a N eșantioane consecutive din semnal sau din spectrul său determină o descriere completă a semnalului în domeniile timp, respectiv frecvență. Aceasta înseamnă că domeniul corespunzător lui $k = 0, 1, \dots, N-1$ (adică o perioadă) acoperă domeniul fundamental de frecvență $0 \leq \omega_k = \frac{2\pi k}{N} < 2\pi$ sau, pentru $-\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$ domeniul corespunzător de frecvență este $-\pi < \omega_k = \frac{2\pi k}{N} \leq \pi$.

Dacă semnalul $x[n]$ este real, $x^*[n] = x[n]$, și din relația (4.27) se obține

$$c_k^* = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right)^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j2\pi kn/N} = c_{-k} \quad (4.30)$$

sau, echivalent

$$\begin{aligned} |c_{-k}| &= |c_k| && \text{simetrie pară} \\ -\angle c_{-k} &= \angle c_k && \text{simetrie impară} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aceste proprietăți de simetrie ale spectrului semnalului periodic, împreună cu proprietatea de periodicitate a coeficienților c_k determină

$$|c_k| = |c_{N-k}| \quad (4.32)$$

$$\text{și} \quad \angle c_k = -\angle c_{N-k} \quad (4.33)$$

adică

$$\begin{aligned} |c_0| &= |c_N| && \angle c_0 = -\angle c_N = 0 \\ |c_1| &= |c_{N-1}| && \angle c_1 = -\angle c_{N-1} \\ |c_{N/2}| &= |c_{N/2}| && \angle c_{N/2} = 0 \text{ pentru } N \text{ par} \\ |c_{(N-1)/2}| &= |c_{(N+1)/2}| && \angle c_{(N-1)/2} = -\angle c_{(N+1)/2} \text{ pentru } N \text{ impar} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pentru un semnal real, spectrul dat de coeficienții c_k , $k = 0, 1, \dots, N/2$, pentru N par sau $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ pentru N impar, descrie complet semnalul în domeniul frecvență.

Folosind proprietățile de simetrie pentru coeficienții c_k , seria Fourier (4.24) devine

$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^L |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn + \theta_k\right) \text{ sau}$$

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^L \left(a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn - b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn \right) \quad (4.35)$$

unde $\theta_k = \angle c_k$, $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$, $b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$, $L = N/2$ pentru N par și $L = (N-1)/2$, pentru N impar.

Spectrul este discret și periodic, de aceeași perioadă fundamentală cu a semnalului.

Exemplul 4.1.

Să se calculeze spectrul următoarelor secvențe:

a) $x_1[n] = \cos \sqrt{5}\pi n$;

b) $x_2[n] = 2 \sin \pi n / 3$;

c) $x_3[n] = \{1, 1, 0, 0\}$.

Soluție

a) Pentru $x_1[n] = \cos \sqrt{5}\pi n = \cos 2\pi f_0 n$ rezultă $f_0 = \sqrt{5}/2 \notin Q$, ceea ce înseamnă că secvența nu este periodică și spectrul său nu se calculează cu ajutorul seriei Fourier.

b) $x_2[n] = 2 \sin \pi n / 3 = \frac{2(e^{j2\pi n/6} - e^{-j2\pi n/6})}{2j} = -j(e^{j2\pi n/6} - e^{j2\pi 5n/6})$. Prin

identificare cu seria Fourier rezultă $N=6$, $c_1=-j$, $c_5=j$, $c_2=c_3=c_4=c_6=0$. Se observă că $|c_1|=|c_5|=1$, $\angle c_1 = -\pi/2$, $\angle c_5 = \pi/2$.

c) Perioada secvenței este $N=4$. Aplicând relația (4.27), se obțin coeficienții seriei pentru $k=0, 1, 2, 3$.

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/4} = \frac{1}{4} (x[0] + x[1] e^{-j2\pi k/4})$$
, de unde rezultă următoarele

valori pentru $k=0, 1, 2, 3$: $c_0=1/2$; $c_1=(1-j)/4$; $c_2=0$; $c_3=(1+j)/4$.

4.2.2. Spectrul densității de putere pentru semnale discrete periodice

Puterea medie a unui semnal discret periodic, cu perioada N , se calculează cu relația

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad (4.36)$$

Înlocuind (4.24) în (4.36) și ținând cont de (4.27), aceasta se exprimă în funcție de coeficienții Fourier, după cum urmează:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \quad (4.37)$$

Relația (4.37) se numește echivalența puterilor pentru semnale discrete periodice. Mărimea $|c_k|^2$ se numește *spectrul densității de putere* a semnalului discret periodic. Ca și în cazul semnalelor analogice, spectrul densității de putere nu conține informații despre faza semnalului.

Energia unui semnal discret periodic calculată pe o perioadă este

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \quad (4.38)$$

4.2.3. Proprietățile seriei Fourier pentru semnale periodice discrete

1. Liniaritatea Dacă transformările (4.24) și (4.27) definesc o pereche Fourier $x[n] \longleftrightarrow \{c_k\}$, atunci

$$\sum_j a_j x_j[n] \longleftrightarrow \sum_j a_j c_{jk} \quad (4.39)$$

2. Deplasarea (translarea) în timp

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow \{e^{-j2\pi kn_0/N} c_k\} \quad (4.40)$$

Spectrul de modul al semnalului nu este afectat de deplasare, ci numai spectrul de fază. Într-adevăr, aplicând (4.27) și notând $n - n_0 = m$, se obține

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n - n_0] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j2\pi k(m+n_0)/N} = e^{-j2\pi kn_0/N} \frac{1}{N} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j2\pi km/N} \quad (4.41)$$

Cum nu contează originea domeniului de însumare, ci doar înglobarea a N valori succesive, relația (4.40) este demonstrată.

3. Conjugarea complexă Fie $x[n] \in C$.

$$x^*[n] \longleftrightarrow \{b_k\} = \{c_{-k}^*\} = \{c_{(-k)_N}^*\} \quad (4.42)$$

Ceficienții b_k ai semnalului complex conjugat $x^*[n]$ sunt

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(-k)n/N} \right)^* = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^* \quad (4.43)$$

4. Reflectarea semnalului

$$x[-n] \longleftrightarrow \{c_{-k}\} = \{c_{(-k)_N}\} \quad (4.44)$$

5. Modificarea scării timpului

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow \left\{ \frac{1}{m} c_k \right\} \quad (4.45)$$

unde

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m]; & \text{dacă } m \text{ divide } n \\ 0; & \text{în rest} \end{cases} \quad (4.46)$$

Perioada N_1 a semnalului $x_{(m)}[n]$ se determină după cum urmează:

$$x_{(m)}[n + N_1] = \begin{cases} x[(n + N_1)/m]; & \text{dacă } m \text{ divide } (n + N_1) \\ 0; & \text{în rest} \end{cases} \quad (4.47)$$

Definiția periodicității implică egalitatea relațiilor (4.46) și (4.47). Dacă n se divide la m și $(n+N_1)$ se divide la m , atunci și N_1 se divide la m .

Alegând $N_1=Lm$, $L \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$x_{(m)}[n + N_1] = \begin{cases} x[(n/m) + L]; & \text{dacă } m \text{ divide } n \\ 0; & \text{în rest} \end{cases} = \begin{cases} x[n/m]; & \text{dacă } m \text{ divide } n \\ 0; & \text{în rest} \end{cases}$$

Deoarece $x[n]$ este de perioadă N , se obține $L=N$ și, deci, perioada semnalului $x_{(m)}[n]$ este $N_1=Lm=Nm$. Coeficienții seriei se calculează astfel:

$$\begin{aligned} c_{1k} &= \frac{1}{mN} \sum_{n=0}^{mN-1} x_{(m)}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} n} = \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{N-1} x_{(m)}[pm] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} mp} = \\ &= \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] e^{-jk \frac{2\pi}{N} p} = \frac{1}{m} c_k \end{aligned}$$

6. Modularea semnalului.

$$e^{jk_0 \frac{2\pi}{N} n} x[n] \longleftrightarrow \{c_{k-k_0}\} \quad (4.48)$$

Modularea realizează translarea cu k_0 a spectrului de modul și fază.

7. Produsul a două semnale (teorema produsului). Dacă $x_1[n]$ și $x_2[n]$ sunt două secvențe periodice de perioadă N , ai căror coeficienți Fourier sunt

$$c_{1k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}},$$

respectiv $c_{2k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, k = \overline{0, N-1}$ (4.49)

atunci

$$x_3[n] = x_1[n]x_2[n] \longleftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} c_{2((k-m)_N)} = c_{1m} \otimes c_{2m} \quad (4.50)$$

unde \otimes desemnează convoluția periodică sau circulară a secvențelor c_{1m} și c_{2m} . Produsul semnalelor este periodic de perioadă N . Coeficienții c_k ai produsului sunt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} e^{j \frac{2\pi mn}{N}} \right) x_2[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi(k-m)n}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} c_{2(k-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} c_{2(k-m)_N} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ultima sumă reprezintă *convoluția periodică sau circulară* a secvențelor discrete formate din coeficienții c_{1k} și c_{2k} .

8. Convoluția periodică sau circulară (teorema convoluției). Dacă $x_1[n]$ și $x_2[n]$ sunt două secvențe periodice de perioadă N , ai căror coeficienți Fourier sunt dați de (4.49), atunci

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \longleftrightarrow \{Nc_{1k}c_{2k}\} \quad (4.52)$$

unde, prin definiție, convoluția circulară a două semnale periodice $x_1[n]$ și $x_2[n]$ de aceeași perioadă N este

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[(n-k)_N] \quad (4.53)$$

Pentru a determina coeficienții seriei Fourier ai convoluției $x_1[n] \otimes x_2[n]$ se determină semnalul $x_3[n]$ care are drept coeficienți ai seriei Fourier produsele $Nc_{1k}c_{2k}$.

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} Nc_{1k}c_{2k} e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] e^{-j2\pi km/N} \right) c_{2k} e^{j2\pi kn/N} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_{2k} e^{j2\pi k(n-m)/N} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m] \end{aligned} \quad (4.54)$$

9. Diferența de ordinul întâi a semnalului discret

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow \left\{ \left(1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}} \right) c_k \right\} \quad (4.55)$$

10. Însurarea în domeniul timp Însurând un semnal discret $x[n]$ periodic de perioadă N , fără componentă continuă, adică având $c_0=0$, se obține un semnal $y[n]$ de aceeași perioadă, pentru care

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] = y[n] \longleftrightarrow \left\{ \frac{c_k}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} k}} \right\}, c_0 = 0. \quad (4.56)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]; \quad y[n] - y[n-1] = x[n] \quad (4.57)$$

Coefficienții seriei Fourier ai semnalului $y[n]$ sunt b_k . Aplicând proprietatea 9 (relația 4.55) relației (4.57), se obține

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow \left\{ \left(1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}} \right) b_k \right\} = c_k \quad (4.58)$$

de unde rezultă coeficienții b_k ai semnalului $y[n]$, ca în relația (4.56).

11. Proprietăți specifice semnalelor reale. Dacă $x[n] \in R$, atunci $x[n] = x^*[n]$ și, conform relației (4.24), rezultă că

$$c_k = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^* \quad (4.59)$$

ceea ce echivalează cu

$$\begin{aligned} |c_k| &= |c_{-k}| = |c_{(-k)_N}^*|; & \angle c_k &= -\angle c_{-k} = -\angle c_{(-k)_N} \\ \operatorname{Re}\{c_k\} &= \operatorname{Re}\{c_{-k}\} = \operatorname{Re}\{c_{(-k)_N}\}; & \operatorname{Im}\{c_k\} &= -\operatorname{Im}\{c_{-k}\} = -\operatorname{Im}\{c_{(-k)_N}\} \end{aligned} \quad (4.59')$$

4.2.4. Analiza în frecvență a semnalelor discrete aperiodice

În analiza semnalelor discrete, aperiodice, de energie finită se folosește transformata Fourier. Prin definiție, transformata Fourier a unui semnal discret $x[n]$, de energie finită, este dată de relația

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.60)$$

unde $X(\omega)$ reprezintă *spectrul* semnalului $x[n]$.

Există două deosebiri de bază între transformatele Fourier pentru semnale de energie finită analogice și discrete. Prima constă în faptul că spectrul semnalului analogic cuprinde un domeniu infinit de frecvență $(-\infty, \infty)$, pe când cel pentru semnale discrete este limitat la domeniul $(-\pi, \pi]$ sau, echivalent, $[0, 2\pi)$, fiind periodic, de perioadă 2π . Această periodicitate este o consecință a periodicității semnalului exponențial complex. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} X(\omega + 2k\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} e^{-j2\pi kn} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned} \quad (4.61)$$

A doua diferență de bază constă în faptul că transformata Fourier a semnalului discret se exprimă printr-o sumă, în timp ce pentru cel analogic, cu o integrală. Deoarece $X(\omega)$ este o funcție periodică de variabilă ω , ea se poate descompune cu ajutorul seriei Fourier. Coeficienții Fourier ai descompunerii sunt valorile secvenței $x[n]$. Pentru a demonstra această afirmație, se multiplică ambii membri ai relației (4.60) cu $e^{j\omega m}$ și se integrează pe domeniul $[-\pi, \pi]$. Astfel,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega \quad (4.62)$$

Integrala din membrul drept se calculează schimbând întâi ordinea sumei cu integrala. Această schimbare poate fi făcută dacă seria

$$X_M(\omega) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.63)$$

converge uniform la $X(\omega)$ pentru $M \rightarrow \infty$. Convergența uniformă presupune că $X_M(\omega) \rightarrow X(\omega)$ pentru $M \rightarrow \infty$. (Convergența transformatei Fourier este detaliată în paragraful 4.2.6). Presupunând, pentru moment, că seria converge uniform, membrul drept al relației (4.62) devine

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x[m] & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (4.64)$$

Din (4.64) și (4.62) se obține

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (4.65)$$

Ecuția (4.60) se numește *ecuație de analiză*, iar (4.65), *ecuație de sinteză*.

4.2.5. Spectrul densității de energie pentru semnale discrete aperiodice

Energia E_x a unui semnal discret, definită cu relația (2.17) poate fi exprimată în funcție de spectrul $X(\omega)$, după cum urmează:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.66)$$

Această relație este cunoscută sub numele de echivalența energiilor pentru semnale discrete aperiodice, de energie finită.

Spectrul $X(\omega)$ este o mărime complexă, care în coordonate polare se exprimă sub forma

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (4.67)$$

unde $\theta(\omega) = \angle X(\omega)$ este faza, iar $|X(\omega)|$ modulul lui $X(\omega)$.

Ca și în cazul semnalelor analogice

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (4.68)$$

reprezintă distribuția de energie a semnalului ca o funcție de frecvență și se numește *spectrul densității de energie*.

Pentru $x[n]$ un semnal real,

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \quad (4.69)$$

sau, echivalent

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad (4.70)$$

și
$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) \quad (4.71)$$

Din (4.68) ÷ (4.71) rezultă

$$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega) \quad (4.72)$$

Din această proprietate de simetrie, rezultă că domeniul de frecvență pentru semnale discrete aperiodice poate fi redus la $0 \leq \omega \leq \pi$ (adică o jumătate de perioadă), lucru care s-a putut observa și la semnale discrete periodice. În consecință, descrierea unui semnal real discret poate

fi realizată complet prin specificarea spectrului în domeniul de frecvență $0 \leq \omega \leq \pi$ sau $0 \leq F \leq F_s / 2$.

4.2.6. Convergența transformatei Fourier

În obținerea transformatei inverse date de (4.65) s-a presupus că seria (4.63) converge uniform la $X(\omega)$ când $M \rightarrow \infty$. Convergența uniformă presupune că pentru fiecare ω [23]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |X_M(\omega) - X(\omega)| = 0 \quad (4.73)$$

Convergența uniformă este garantată dacă $x[n]$ este absolut sumabil. Într-adevar, dacă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (4.74)$$

$$\text{atunci } |X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (4.75)$$

În plus, se observă că, dacă $x[n]$ este absolut sumabil, atunci el este un semnal de energie finită.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right]^2 < \infty \quad (4.76)$$

Relația (4.74) este o *condiție suficientă* pentru existența transformatei Fourier discrete.

Unele secvențe nu sunt absolut sumabile, dar sunt de pătrat sumabil, adică au energie finită, ceea ce reprezintă o condiție mai slabă decât (4.74). Și pentru aceste semnale, de energie finită, se poate defini transformata Fourier, dar trebuie relaxate condițiile convergenței uniforme. Pentru asemenea secvențe se poate impune o condiție de convergență în medie pătratică [18]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0 \quad (4.77)$$

Energia erorii $X(\omega) - X_M(\omega)$ tinde la zero, dar nu este necesar ca eroarea $|X(\omega) - X_M(\omega)|$ să tindă la zero. În acest mod, semnalele de energie finită pot fi incluse în clasa semnalelor pentru care există transformata Fourier.

Exemplul 4.2.

Să se determine răspunsul la impuls al unui sistem al cărui răspuns în frecvență este

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.78)$$

Răspunsul la impuls poate fi determinat cu relația (4.65).

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, & n \neq 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \quad (4.79)$$

Se observă că $h[n]$ este diferit de zero pentru $n < 0$, deci sistemul este necauzal. De asemenea, $h[n]$ nu este absolut sumabil. Aceasta se datorează faptului că $H(\omega)$ este o funcție discontinuă în $\omega = \omega_c$ și $\omega = -\omega_c$.

Seria
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n} \quad (4.80)$$

nu converge uniform pentru toate valorile lui ω . Secvența $h[n]$ este de energie finită, $E_x = \frac{\omega_c}{\pi}$, deci suma din (4.80) va converge la $H(\omega)$ dat de (4.78) în medie pătratică. În continuare se consideră suma finită

$$\begin{aligned} H_M(\omega) &= \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\theta n} e^{-j\omega n} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j(\omega-\theta)M} \sum_{m=0}^{2M} e^{j(\theta-\omega)m} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[(2M+1)(\omega-\theta)/2]}{\sin[(\omega-\theta)/2]} d\theta \end{aligned} \quad (4.81)$$

În figura 4.2 este reprezentat $H_M(\omega)$ pentru diverse valori ale lui M . Se observă oscilații semnificative la $\omega = \omega_c$, independent de valoarea lui M . Cu creșterea lui M , oscilațiile au o frecvență mai ridicată, dar mărimea riplului rămâne aceeași. Pentru $M \rightarrow \infty$, oscilațiile converg la punctul de discontinuitate $\omega = \omega_c$, dar rămân de aceeași amplitudine. Oricum, $h[n]$ dat de (4.79) este de pătrat sumabil și $H_M(\omega)$ converge la $H(\omega)$ în medie pătratică.

Comportarea oscilatorie a aproximării $H_M(\omega)$ a lui $H(\omega)$ în punctul de discontinuitate a lui $H(\omega)$ se numește *fenomen Gibbs*. Deși eroarea dintre $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(\omega)$ și $H(\omega)$ poate părea neimportantă, deoarece cele două funcții diferă numai în $\omega = \omega_c$, se va vedea (la proiectarea filtrelor digitale)

că sumele finite au implicații importante în proiectarea sistemelor discrete pentru filtrare.

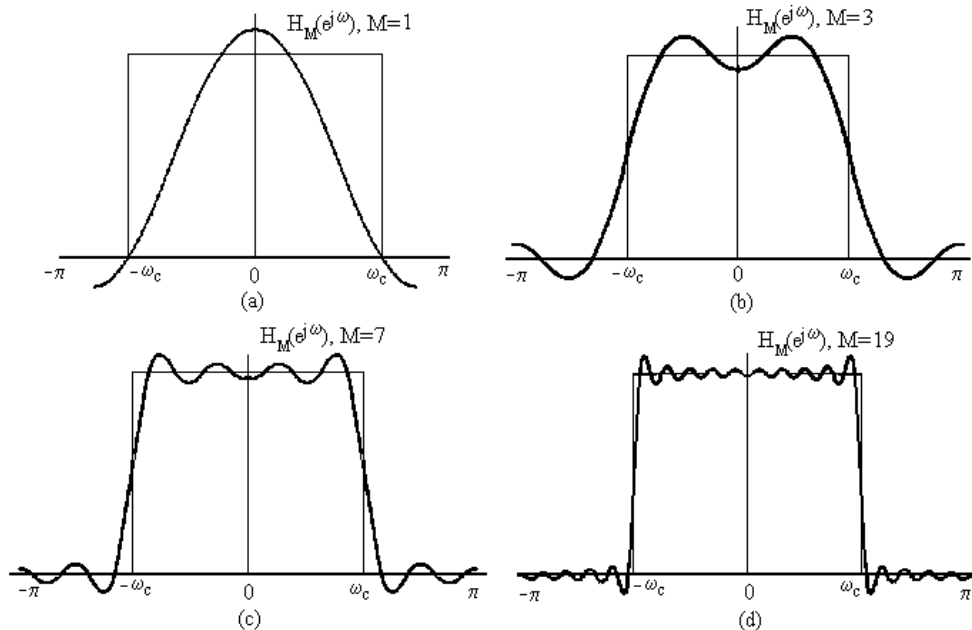


Figura 4.2. Comportarea oscilatorie la $\omega = \omega_c$, denumită fenomen Gibbs

Fenomenul Gibbs a fost observat inițial la trunchierea seriei Fourier pentru semnale analogice periodice. În 1898 fizicianul Albert Michelson a construit un analizor armonic, cu care descompunea un semnal până la a optzecea componentă, neglijând componentele de ordin superior. Însușind componentele, se obținea un semnal foarte asemănător cu cel inițial, cu o singură excepție, și anume, cazul când semnalul analizat era o undă rectangulară, la reconstrucția căruia se obținea un semnal care avea mici oscilații în vecinătatea tranziției semnalului. În 1899 Gibbs studiază și explică acest fenomen prin neconvergența uniformă a seriei Fourier în discontinuitate, deoarece odată cu creșterea lui M , amplitudinea oscilațiilor nu descrește, ele fiind doar "înghesuite" înspre momentul de tranziție al semnalului. Din figura 4.2 se observă că, indiferent de valoarea lui M , deci indiferent de calitatea aproximării, valoarea spre care tinde seria în punctul de discontinuitate a semnalului este media limitelor laterale ale semnalului.

Observație: Spre deosebire de semnalele discrete aperiodice, pentru semnale discrete periodice trunchierea seriei Fourier nu conduce la

aparitia unui fenomen asemănător cu fenomenul Gibbs, ci numai la o aproximare a acesteia. Aproximarea va fi cu atât mai bună, cu cât numărul termenilor însumați se apropie de N , perioada semnalului. Când se însumează toți termenii, semnalul obținut este chiar $x[n]$, fără nici o eroare. Din cele prezentate până acum s-a observat că sumabilitatea absolută a unei secvențe (care asigură convergența uniformă a transformatei Fourier) și energia finită (care asigură convergența în medie pătratică) sunt *condiții suficiente* pentru existența transformatei Fourier. Există semnalele care nu îndeplinesc condițiile semnalate anterior, dar totuși li se poate asocia o transformată Fourier, situație care va fi tratată în paragraful următor.

4.2.7. Transformata Fourier pentru semnale discrete periodice

După cum s-a arătat în paragraful 4.2.6, convergența uniformă a transformatei Fourier a unei secvențe impune ca aceasta să fie absolut sumabilă, iar convergența în medie pătratică cere ca secvența să fie de pătrat sumabil. Secvențele periodice nu satisfac nici una din aceste condiții, deoarece ele nu tind spre zero pentru $n \rightarrow \pm\infty$. Se poate considera că secvențele ce pot fi exprimate ca o sumă de exponențiale complexe au transformata Fourier sub forma unui tren de impulsuri [18]. Acesta este cazul semnalelor discrete periodice pentru care transformata Fourier poate fi interpretată ca fiind un tren de impulsuri în domeniul frecvență a căror valoare este proporțională cu valoarea coeficienților seriei Fourier. Mai precis, dacă $x[n]$ este periodic de perioadă N și coeficienții corespunzători ai seriei Fourier sunt c_k , atunci transformata Fourier a secvenței periodice $x[n]$ este definită ca fiind trenul de impulsuri

$$X(\omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (4.82)$$

De remarcat periodicitatea de 2π pentru $X(\omega)$ atât timp cât $c_k = c_{k+N}$, și impulsurile sunt spațiate la multipli întregi de $2\pi/N$, unde N este un întreg care reprezintă perioada semnalului $x[n]$. Pentru a arăta că $X(\omega)$ definit de (4.82) reprezintă transformata Fourier a semnalului periodic, se înlocuiește aceasta relație în (4.65), obținându-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0^-}^{2\pi^-} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0^-}^{2\pi^-} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.83)$$

Se reamintește că în evaluarea transformatei Fourier inverse integrarea se poate efectua pe orice interval de perioadă 2π , deoarece integrandul este periodic de perioadă 2π . Limitele integralei au fost notate cu 0^- și $2\pi^-$ – pentru a sugera că integrarea se efectuează pe un interval care conține impulsul din $\omega=0$ și îl exclude pe cel din $\omega=2\pi$. Prin schimbarea ordinii sumei cu integrala se obține

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0^-}^{2\pi^-} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{0^-}^{2\pi^-} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn} \quad (4.84)$$

Forma finală a ecuației (4.84) a rezultat datorită faptului că numai impulsurile corespunzătoare lui $k=0, 1, \dots, (N-1)$ sunt incluse în intervalul dintre $\omega=0^-$ și $\omega=2\pi^-$.

Comparând relația (4.84) cu (4.24) se observă că membrul drept al ecuației (4.84) este chiar reprezentarea în serie Fourier pentru semnalul $x[n]$ dat de (4.1). În consecință, transformata Fourier inversă a trenului de impulsuri din relația (4.82) este chiar semnalul periodic $x[n]$. Deși transformata Fourier a secvențelor periodice nu converge în sens obișnuit, ci numai în sens distribuțional, introducerea impulsurilor permite includerea secvențelor periodice în cadrul celor care pot avea transformată Fourier.

Uneori este utilă cunoașterea transformatei Fourier pentru semnale care nu sunt nici absolut sumabile, nici de pătrat sumabil. Acest lucru se va ilustra pe exemplele următoare.

Exemplul 4.3.

Fie secvența $x_1[n]=1$ pentru toți n . Această secvență nu este nici absolut sumabilă, nici de pătrat sumabil, așa încât, pentru acest caz suma (4.60) nu converge nici uniform, nici în medie pătratică. Formal, se poate stabili o relație similară proprietății de dualitate din domeniul analogic în felul urmator

$$\text{dacă} \quad F\{\delta[n]\} = 1 \quad (4.85)$$

$$\text{atunci} \quad F\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \quad (4.86)$$

unde $\delta[n]$ este funcția impuls unitate, iar $\delta(\omega)$ este distribuția Dirac.

Într-adevăr, prin înlocuirea formală a relației (4.86) în (4.65) se obține

$$F^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = 1 \quad (4.87)$$

dar, pentru semnale discrete, spectrul este periodic de perioadă 2π , $\delta(\omega) = \delta(\omega - 2\pi k)$ și

$$F^{-1}\{2\pi\delta(\omega - 2\pi k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) e^{j\omega n} d\omega = e^{j2\pi kn} = 1, \quad n \in Z \quad (4.88)$$

Semnalul $x_1[n] = 1$ se poate scrie ca o sumă de impulsuri unitate întârziate

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k]. \quad (4.89)$$

Acest semnal se poate descompune într-o serie Fourier exponențială în forma

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (4.90)$$

Semnalul $x_1[n]$ fiind periodic de perioadă $N=1$, se poate descompune într-o serie Fourier ai cărei coeficienți sunt

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} = 1 \quad (4.91)$$

astfel încât, prin prelungire periodică conform relației (4.90), $x_1[n]$ se poate scrie

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kn} \quad (4.92)$$

Ținând seama de (4.86), rezultă că

$$F\{e^{j2\pi kn}\} = 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad (4.93)$$

Cu relația (4.93), rezultă

$$F\{x_1[n]\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kn}\right\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (4.94)$$

Cu (4.60), spectrul semnalului $x_1[n]$ este

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \quad (4.95)$$

Din (4.94) și (4.95) rezultă

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega k} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (4.96)$$

Se constată că spectrul unui semnal discret și periodic este, de asemenea, discret și periodic. În cazul considerat, impulsurile care constituie spectrul sunt funcție de variabilă continuă ω și, prin urmare, sunt de "înălțime infinită, lățime zero și arie unitară", ceea ce este în concordanță cu faptul că seria (4.60) nu converge.

Exemplul 4.4.

Fie semnalul $x_2[n] = e^{j\omega_0 n}$ care este periodic relativ la ω_0 , de perioadă 2π . Conform relațiilor (4.60) și (4.94), spectrul său este

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X_1(\omega-\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0-2\pi k) \quad (4.97)$$

adică, transformata Fourier a unei exponențiale complexe de modul unitar este o distribuție Dirac de perioadă 2π , după cum este reprezentat în figura 4.3.

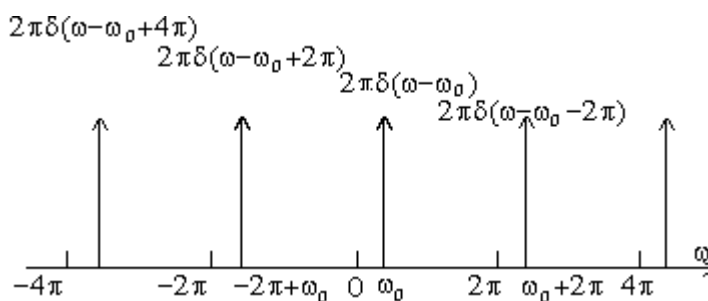


Figura 4.3. Spectrul exponențialei discrete

Rezultatul obținut în acest exemplu poate fi extins la semnale periodice care pot fi exprimate ca o suma ponderată de exponențiale complexe (seria Fourier discretă). Astfel, aplicând transformata Fourier relației (4.24) și ținând seama de liniaritate, rezultă

$$X(\omega) = F\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\} \quad (4.98)$$

Conform relației (4.97), (4.98) devine

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi r\right) \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi r\right) \right) \quad (4.99)$$

Pentru r fixat, termenii care rezultă sunt distribuții Dirac plasate în intervalul $[2\pi r, 2\pi r - 2\pi/N]$ cu pasul $2\pi/N$. Pentru $r+1$, în intervalul imediat următor $[2\pi(r+1), 2\pi(r+1) - 2\pi/N]$ se obțin aceleași valori pentru coeficienți, adică $2\pi c_0, 2\pi c_1, \dots, 2\pi c_{N-1}$. Dacă se consideră și periodicitatea după k , cu perioada N , relația (4.99) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= 2\pi c_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - r \cdot 2\pi) + 2\pi c_1 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} r \cdot 2\pi\right) + \\
&+ 2\pi c_2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - 2 \cdot \frac{2\pi}{N} r \cdot 2\pi\right) + \dots + \\
&+ 2\pi c_{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - (N-1) \cdot \frac{2\pi}{N} r \cdot 2\pi\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_{(k)_N} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Forma spectrului semnalului periodic este prezentată în figura 4.4. Acesta este format din linii spectrale reprezentate de distribuții Dirac plasate la multiplii frecvenței de $2\pi/N$. Amplitudinile acestora au valoarea $2\pi c_{(k)_N}$. Se remarcă periodicitatea cu 2π a spectrului, ca rezultat al periodicității coeficienților seriei Fourier și al plasării distribuțiilor la multiplii întregi de $\omega_0 = 2\pi/N$.

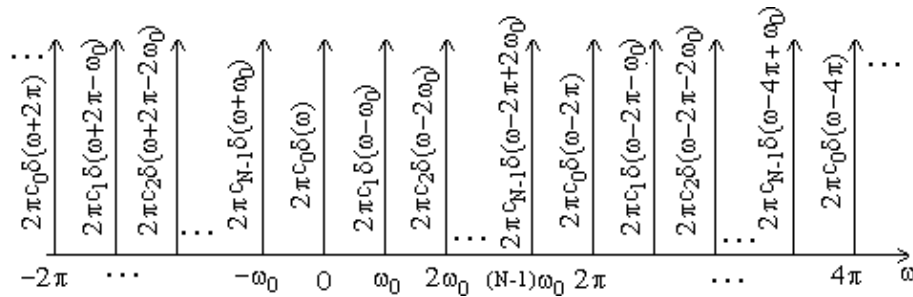


Figura 4.4. Spectrul unui semnal discret periodic, format din distribuții Dirac plasate la $\omega_k=2k\pi/N$ și periodic de perioadă 2π

Exemplul 4.5.

Fie semnalul discret periodic $\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$, de perioadă

N. Să se determine spectrul acestui semnal.

Soluție. Coeficienții Fourier ai acestui semnal periodic sunt

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N}$$

Conform relației (4.100), spectrul acestui semnal periodic este

$$F\{\delta_N[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega), \quad \omega_0 = 2\pi/N. \tag{4.101}$$

4.2.8. Relația între transformata Fourier și transformata Z

Transformata Z a unei secvențe $x[n]$ este definită ca

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad \text{RC: } r_2 < |z| < r_1 \quad (4.102)$$

Dacă se exprimă z în formă polară

$$z = re^{j\omega} \quad (4.103)$$

unde $r = |z|$ și $\omega = \angle z$, atunci în regiunea de convergență

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \quad (4.104)$$

Din (4.104) se observă că $X(z)$ poate fi interpretată ca transformată Fourier a semnalului $x[n]r^{-n}$.

Termenul r^{-n} poate fi văzut ca un factor de ponderare ce crește cu n , dacă $r < 1$ și descrește pentru $r > 1$. Dacă $X(z)$ converge pentru $|z|=1$, atunci

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.105)$$

adică transformata Fourier poate fi văzută ca transformata Z a unei secvențe evaluată pe cercul unitate. Dacă $X(z)$ nu converge în regiunea $|z|=1$ (cercul unitate nu este conținut în RC a lui $X(z)$), transformata Fourier fie nu există, fie nu se obține prin simpla înlocuire în $X(z)$. Reciproc, dacă $X(\omega)$ există, atunci $X(z)$ converge pe cercul unitate. Din cele prezentate până acum se desprind două observații.

1. Există secvențe pentru care există transformata Z, dar care nu au transformată Fourier sau, dacă au, aceasta nu se calculează prin evaluarea lui $X(z)$ pe cercul unitate. Existența transformatei Z impune ca secvența $\{x[n]r^{-n}\}$ să fie absolut sumabilă pentru anumite valori ale lui r , adică

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (4.106)$$

Dacă (4.106) converge numai pentru valori ale lui $r > 1$, atunci transformata Z există, dar transformata Fourier nu există. Acesta este, de exemplu, cazul secvenței cauzale exponențiale $x[n] = a^n u[n]$, unde $|a| > 1$.

2. Există semnale de energie finită care au transformată Fourier, dar care nu admit transformată Z.

De exemplu, semnalul

$$x[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (4.107)$$

nu satisface relația (4.106), și, deci, nu admite transformată Z, dar, deoarece este de energie finită, transformata sa Fourier converge în medie pătratică la funcția discontinuă $X(\omega)$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.108)$$

În concluzie, existența transformatei Z necesită ca (4.106) să fie satisfăcută într-o anumită regiune a planului Z. Dacă această regiune conține cercul unitate, transformata $X(\omega)$ există. Existența transformatei Fourier pentru semnale de energie finită nu asigură în mod necesar existența transformatei Z.

4.2.9. Proprietățile transformatei Fourier pentru semnale discrete aperiodice de energie finită

Transformata Fourier a semnalelor discrete aperiodice de energie finită prezintă o serie de proprietăți foarte utile în reducerea complexității analizei acestora. Se vor folosi notațiile:

$$X(\omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.109)$$

pentru transformarea directă (ecuație de analiză) și

$$x[n] = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (4.110)$$

pentru transformarea inversă (ecuație de sinteză). $x[n]$ și $X(\omega)$ se vor numi perechi Fourier. Se reamintește că $X(\omega)$ este o funcție periodică de perioadă 2π .

Proprietățile transformatei Fourier prezentate în continuare sunt similare celor ale transformatei Z, obținându-se din acestea prin înlocuirea $z = e^{j\omega}$.

1. Liniaritatea Dacă $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(\omega)$

$$\text{și } x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(\omega)$$

atunci $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \xrightarrow{F} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$ (4.111)

2. Translația (deplasarea) în domeniul timp Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

atunci $x[n-k] \xrightarrow{F} e^{-j\omega k} X(\omega)$ (4.112)

3. Reflectarea în timp a semnalului Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

atunci $x[-n] \xrightarrow{F} X(-\omega)$ (4.113)

Aceasta înseamnă că prin reflectarea unui semnal $x[n]$ se obține un semnal al cărui spectru are același modul cu cel al lui $x[n]$, dar faza suferă o schimbare de semn.

4. Modularea în domeniul timp Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

atunci $e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$ (4.114)

5. Scalarea variabilei în domeniul timp Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

atunci $x_{(m)}[n] \xrightarrow{F} X(m\omega)$ (4.115)

unde $x_{(m)}[n]$ este dat de (4.46).

6. Conjugarea complexă a semnalului Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$ și $x[n] \in C$,

atunci $x^*[n] \xrightarrow{F} X^*(-\omega)$ (4.116)

7. Transformarea diferenței de ordinul întâi a semnalului discret Expresia $x[n] - x[n-1]$ este echivalentă diferențierii în domeniul anlogic.

Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

atunci $x[n] - x[n-1] \xrightarrow{F} (1 - e^{-j\omega}) X(\omega)$ (4.117)

8. Teorema convoluției Dacă $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(\omega)$

și $x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $x[n] = x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{F} X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$ (4.118)

9. Teorema corelației Dacă $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(\omega)$ și $x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $r_{x_1 x_2}(l) \xrightarrow{F} S_{x_1 x_2}(\omega) = X_1(\omega) X_2(-\omega)$ (4.119)

$S_{x_1 x_2}(\omega)$ se numește *spectrul densității de energie de intercorelație* a semnalelor $x_1[n]$ și $x_2[n]$.

10. Multiplicarea a două secvențe

Dacă $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $x_3[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \xrightarrow{F} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda$ (4.120)

Demonstrația rezultă din (3.27). Dacă $X_1(v)$ și $X_2\left(\frac{1}{v}\right)$ converg pe cercul unitate definit de $v = e^{j\lambda}$, $-\pi < \lambda < \pi$, se poate alege cercul unitate drept contur de integrare pentru integrala din (3.27). Înlocuind $v = e^{j\lambda}$ și $z = e^{j\omega}$ în (3.27), apoi schimbând variabila din v în λ se obține (4.120), unde $X_1(\lambda) = X_1(v)|_{v=e^{j\lambda}}$, $X_2(\omega - \lambda) = X_2\left(\frac{z}{v}\right)|_{v=e^{j\lambda}, z=e^{j\omega}}$.

Integrala din relația (4.120) reprezintă convoluția transformatelor $X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$ și relația (4.120) este duala convoluției în domeniul timp. Aceasta înseamnă că multiplicarea a două secvențe în domeniul timp este echivalentă cu convoluția lor în domeniul frecvență, și invers.

11. Teorema Wiener-Hincin Fie $x[n]$ un semnal real. Atunci

$$r_{xx}[l] \xleftarrow{F} S_{xx}(\omega) \quad (4.121)$$

adică, densitatea spectrală de energie pentru un semnal de energie finită este transformată Fourier a funcției de autocorelație a semnalului. Acesta este un caz particular al relației (4.119).

12. Teorema lui Parseval Dacă $x_1[n] \xleftarrow{F} X_1(\omega)$ și $x_2[n] \xleftarrow{F} X_2(\omega)$

$$\text{atunci} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) \cdot X_2^*(\omega) d\omega \quad (4.122)$$

Pentru demonstrarea relației (4.122), se exprimă $x_1[n]$ din (4.110) și apoi se folosește (4.109).

În cazul în care $x_2[n] = x_1[n] = x[n]$, relația (4.122) devine

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.122')$$

adică s-a obținut echivalența energiilor, ca o consecință a relației lui Parseval. Membrul stâng al relației (4.122') reprezintă energia semnalului $x[n]$, egală, de asemenea, cu funcția de autocorelație $r_{xx}[l]$, evaluată în $l=0$. Integrandul din (4.122') reprezintă spectrul densității de energie care, integrat pe un interval de 2π are ca rezultat energia totală a semnalului. Rezumând, se poate scrie

$$E_x = r_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (4.123)$$

13. Derivarea în domeniul spectrului Dacă $x[n] \xleftarrow{F} X(\omega)$

atunci
$$nx[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (4.124)$$

14. Însurarea în domeniul timp Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

atunci
$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(0) \delta_{2\pi}(\omega) \quad (4.125)$$

Se consideră un semnal $v[n]$ cu proprietatea că $\sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] = 0$. Dacă se notează cu $V(\omega)$ spectrul său, pentru $\omega = 0$ se obține

$$V(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] = 0 \quad (4.126)$$

Suma parțială a semnalului $v[n]$ este

$$u_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n v[k]; u_1[n] - u_1[n-1] = v[n] \text{ și } U_1(\omega) \text{ spectrul său.}$$

Conform relației (4.117), se obține

$$(1 - e^{-j\omega})U_1(\omega) = V(\omega) \text{ cu } V(0) = 0, \text{ adică } U_1(\omega) = \frac{V(\omega)}{1 - e^{-j\omega}}. \quad (4.127)$$

Relația (4.127) are sens numai dacă $V(0)=0$, deoarece $(1 - e^{-j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0$

În continuare se va determina spectrul semnalului treaptă unitate $u[n]$ care nu satisface condiția (4.126). Din exemplul 4.3 se observă că spectrul unui semnal discret constant este format din linii spectrale plasate la multipli de 2π pe axa frecvențelor. Fie $g_u(\omega)$ componenta spectrului treptei unitate pentru frecvențele $\omega = 2k\pi$, de forma $g_u(\omega) = g\delta_{2\pi}(\omega) = g \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$, unde g este o constantă. Scăzând această componentă din spectrul treptei unitate $X_u(\omega)$, spectrul rămas corespunde unui semnal ce satisface condiția (4.126). Cum $X_u(0) = g_u(0)$ este componenta continuă a semnalului, scăzând din semnal această componentă continuă C , se obține semnalul $u[n] - C$, căruia i se poate aplica relația (4.127).

$$(u[n] - C) - (u[n-1] - C) = u[n] - u[n-1] = \delta[n] \text{ și, deci}$$

$$X_u(\omega) - g_u(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}; \quad X_u(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + g\delta_{2\pi}(\omega) \quad (4.128)$$

Pentru a determina constanta g se arată că partea impară a treptei unitate discrete este de forma

$$u_o[n] = u[n] + a + b\delta[n] \quad (4.129)$$

Cum $u_o[0] = 0$, rezultă $1+a+b=0$ și (4.129) se poate scrie

$$\frac{u[n] - u[-n]}{2} = u[n] - 1 - b + b\delta[n].$$

Pentru $n=1$ se obține $b=-1/2$ și apoi $a=-1/2$.

Componenta impară a treptei unitate este

$$u_o[n] = u[n] - 1/2 - (1/2)\delta[n] \quad (4.129')$$

și are, după cum se va vedea (proprietatea 15), un spectru pur imaginar.

$$F\{u_o[n]\}(\omega) = X_u(\omega) - (1/2)2\pi\delta_{2\pi}(\omega) - 1/2.$$

Înlocuind (4.128) în (4.129'), se obține

$$\begin{aligned} F\{u_o[n]\}(\omega) &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \frac{1}{2} + (g-\pi)\delta_{2\pi}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} + (g-\pi)\delta_{2\pi}(\omega) = \\ &= -j\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} + (g-\pi)\delta_{2\pi}(\omega) \notin R \end{aligned}$$

Aceasta impune $g = \pi$ și relația (4.128) devine

$$u[n] \xleftrightarrow{F} X_u(\omega) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\omega) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) \quad (4.130)$$

Semnalul sumă parțială $y[n]$ se poate scrie ca o convoluție

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] * u[n] \quad (4.131)$$

Aplicând teorema convoluției relației (4.131) și ținând seama de (4.130) se obține

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(\omega)\delta_{2\pi}(\omega) \quad (4.132)$$

$X(\omega)\delta(\omega - 2k\pi) = X(2k\pi)\delta(\omega - 2k\pi)$ și cum $X(\omega)$ este periodică, adică $X(2k\pi) = X(0)$, rezultă că $X(\omega)\delta(\omega - 2k\pi) = X(0)\delta(\omega - 2k\pi)$ și relația (4.125) este demonstrată.

15. Proprietăți de simetrie

Dacă un semnal prezintă proprietăți de simetrie în domeniul timp, este posibilă deducerea unor caracteristici ale semnalului în domeniul frecvență.

Semnalele $x[n]$ și $X(\omega)$ se presupun complexe, adică

$$x[n] = x_R[n] + jx_I[n] \quad (4.133)$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) \quad (4.134)$$

unde indicii R și I indică partea reală, respectiv imaginară.

Înlocuind (4.133) și $e^{-j\omega n} = \cos \omega n - j \sin \omega n$ în (4.109) și separând părțile reale și imaginare, se obține

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R[n] \cos \omega n + x_I[n] \sin \omega n \quad (4.135)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n] \sin \omega n - x_I[n] \cos \omega n] \quad (4.136)$$

Similar, din (4.110) se obține

$$x_R[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] d\omega \quad (4.137)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \sin \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega \quad (4.138)$$

În continuare, se vor considera câteva cazuri particulare.

a) **Semnale reale** Dacă $x[n]$ este real $\rightarrow x_R[n] = x[n]$ și $x_I[n] = 0$. Atunci

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos \omega n \quad (4.139)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin \omega n \quad (4.140)$$

Deoarece $\cos(-\omega)n = \cos \omega n$ și $\sin(-\omega)n = -\sin \omega n$, rezultă

$$X_R(-\omega) = X_R(\omega) \text{ simetrie pară} \quad (4.141)$$

$$X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \text{ simetrie impară} \quad (4.142)$$

Combinînd (4.141) cu (4.142), se obține

$$X^*(\omega) = X(-\omega), \quad (4.143)$$

caz în care se spune că spectrul unui semnal real are *simetrie hermitică*. În acest caz, modulul și faza spectrului sunt

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \quad (4.144)$$

$$\angle X(\omega) = \arctg \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \quad (4.145)$$

Ca o consecință a relațiilor (4.141) și (4.142), atât spectrul de modul cât și cel de faza prezintă proprietăți de simetrie.

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \text{ simetrie pară} \quad (4.146)$$

$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) \text{ simetrie impară} \quad (4.147)$$

Deoarece $x[n] = x_R[n]$, din (4.137) rezultă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] d\omega \quad (4.148)$$

Deoarece ambele produse $X_R(\omega) \cos \omega n$ și $X_I(\omega) \sin \omega n$ sunt funcții pare, rezultă

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] d\omega \quad (4.149)$$

a1) **Semnale reale pare** Dacă $x[n]$ este real și par ($x[-n] = x[n]$) atunci $x[n] \cos \omega n$ este par și $x[n] \sin \omega n$ este impar. Din (4.139), (4.140) și (4.149) se obține

$$X_R(\omega) = x[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \cos \omega n, \quad X_R(-\omega) = X_R(\omega) \quad (4.150)$$

$$X_I(\omega) = 0 \quad (4.151)$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \cos \omega n d\omega \quad (4.152)$$

Cu alte cuvinte, spectrele semnalelor discrete reale și pare sunt reale și, în plus, sunt funcții pare de ω .

a2) **Semnale reale impare** Dacă $x[n]$ este real și impar, ($x[-n] = -x[n]$), atunci

$$X_R(\omega) = 0 \quad (4.153)$$

$$X_I(\omega) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \sin \omega n, \quad X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \quad (4.154)$$

$$x[n] = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(\omega) \sin \omega n d\omega \quad (4.155)$$

Cu alte cuvinte, semnalele discrete reale și impare au spectrul pur imaginar și, în plus, acesta este o funcție impară de ω .

b) **Semnale pur imaginare** În acest caz $x_R[n] = 0$; $x[n] = jx_I[n]$. Astfel, (4.135), (4.136) și (4.138) devin

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n] \sin \omega n \quad (4.156)$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n] \cos \omega n \quad (4.157)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \sin \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega \quad (4.158)$$

b1) **Semnale pur imaginare pare** Dacă $x_I[n]$ este par ($x_I[-n] = x_I[n]$), rezultă

$$X_R(\omega) = 0 \quad (4.159)$$

$$X_I(\omega) = x_I[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I[n] \cos \omega n \quad (4.160)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(\omega) \cos \omega n d\omega \quad (4.161)$$

b2) **Semnale pur imaginare impare** Dacă $x_I[n]$ este impar ($x_I[-n] = -x_I[n]$), atunci

$$X_R(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I[n] \sin \omega n \quad (4.162)$$

$$X_I(\omega) = 0 \quad (4.163)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \sin \omega n d\omega \quad (4.164)$$

4.2.10. Cepstrum

Se consideră secvența $\{x[n]\}$ stabilă, cu transformata Z , $X(z)$, convergentă pe cercul unitate. Cepstrul complex al secvenței $\{x[n]\}$ se definește ca secvența $\{c_x[n]\}$, care este transformata Z inversă a secvenței $C_x(z)$, unde

$$C_x(z) = \ln X(z) \quad (4.165)$$

Cepstrul complex există dacă $C_x(z)$ converge într-o regiune inelară $r_1 < |z| < r_2$, unde $0 < r_1 < 1$ și $r_2 > 1$. În interiorul regiunii de convergență $C_x(z)$ poate fi reprezentat în serie Laurent

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x[n] z^{-n} \quad (4.166)$$

unde

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \oint_C \ln X(z) z^{n-1} dz \quad (4.167)$$

unde C este un contur închis din regiunea de convergență care conține originea.

Dacă $C_x(z)$ poate fi reprezentat ca în relația (4.166), secvența complexă $\{c_x[n]\}$ este stabilă și, mai mult, dacă cepstrul complex există, $C_x(z)$ converge pe cercul unitate.

$$C_x(\omega) = \ln X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.168)$$

$$\text{și} \quad c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.169)$$

Exprimând $X(\omega)$ în formă polară

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (4.170)$$

atunci

$$\ln X(\omega) = \ln |X(\omega)| + j\theta(\omega) \quad (4.171)$$

Înlocuind (4.171) în (4.169), se obține

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln |X(\omega)| + j\theta(\omega)] e^{j\omega n} d\omega \quad (4.172)$$

Separând transformata Fourier inversă din (4.172) în transformatele Fourier inverse ale lui $\ln|X(\omega)|$ și $\theta(\omega)$, se obține

$$c_m[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(\omega)| e^{j\omega n} d\omega \quad (4.173)$$

$$c_\theta[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.174)$$

În unele aplicații, ca de exemplu în procesarea semnalului vocal, se calculează numai componenta $c_m[n]$, iar faza lui $X(\omega)$ este ignorată și, prin urmare, secvența $x[n]$ nu poate fi refacută din $\{c_m[n]\}$. Aceasta înseamnă că transformarea $x[n] \rightarrow c_m[n]$ nu este inversabilă. *Cepstrul* complex este folosit în practică pentru a se separa cele două semnale care intervin într-o operație de convoluție. Acest proces de separare se numește *deconvoluție*, iar folosirea cepstrului complex în efectuarea acestei separări se numește *deconvoluție homomorfică*.

4.2.11. Transformata Fourier a semnalelor cu poli pe cercul unitate

În paragraful 4.2.8 s-a arătat că transformata Fourier a unei secvențe $x[n]$ poate fi obținută prin evaluarea transformatei Z , $X(z)$, pe cercul unitate, cu condiția ca acesta să fie conținută în RC a lui $X(z)$, în caz contrar, transformata Fourier fie nu există, fie nu se determină în acest mod.

Există unele semnale aperiodice care nu sunt nici absolut sumabile, nici de energie finită (condiții care asigurau, conform paragrafului 4.2.6 convergența transformatei Fourier). Pentru aceste semnale este utilă a extinde reprezentarea prin transformată Fourier în sens distribuțional. Matematic acest lucru poate fi realizat riguros permițând transformatei Fourier să conțină impulsuri la anumite frecvențe corespunzătoare localizării polilor lui $X(z)$ de pe cercul unitate. Impulsurile sunt funcție de frecvența continuă ω și au amplitudine infinită, lățime zero și arie unitară. La limită, un astfel de impuls poate fi văzut ca un puls rectangular de înălțime $\frac{1}{a}$ și lățime a , când $a \rightarrow 0$.

Astfel, permițând introducerea acestor impulsuri în spectrul semnalului, este posibil să extindă reprezentarea prin transformată Fourier a unor semnale care nu sunt nici absolut sumabile, nici de energie finită.

Următoarele exemple ilustrează extinderea transformatei Fourier pentru trei secvențe cu poli pe cercul unitate.

Exemplul 4.6

Să se determine transformata Fourier pentru următoarele semnale:

- a) $x_1[n] = u[n]$
- b) $x_2[n] = (-1)^n u[n]$
- c) $x_3[n] = (\cos \omega_0 n) u[n]$

prin evaluarea transformatei Z corespunzătoare pe cercul unitate.

a) Din Tabelul 3.1, $X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ RC : $|z| > 1$

$X_1(z)$ un pol $p_1 = 1$ pe cercul unitate, dar converge pentru $|z| > 1$.

Evaluând $X_1(z)$ pe cercul unitate, exceptând $z = 1$, se obține

$$X_1(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{2j \sin(\omega/2)} = \frac{1}{2 \sin(\omega/2)} e^{j(\omega - \frac{\pi}{2})}; \omega \neq 2k\pi, k = 0, 1, \dots$$

La $\omega = 0$ și multipli de 2π , $X_1(\omega)$ conține impulsuri de arie π , așa cum s-a arătat în exemplul din paragraful 4.2.9, proprietatea 14.

Prezența polului la $z=1$ (adică la $\omega = 0$) creează probleme numai dacă se dorește calcularea lui $|X_1(\omega)|$ în $\omega = 0$, deoarece acolo această mărime este infinită. Deși, la o primă vedere, s-ar putea crede că semnalul ar avea componentă continuă, nu este cazul, deoarece acesta nu este constant pentru $-\infty < n < \infty$, ci are un salt abrupt la $n=0$, ceea ce determină existența tuturor frecvențelor din intervalul $0 < \omega < \pi$.

$$b) X_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} \quad \text{RC } |z| > 1$$

care are un pol la $z = -1 = e^{j\pi}$. Transformata Fourier evaluată la frecvențe diferite de $\omega = \pi$ și multipli de 2π ai acesteia este

$$x_2(\omega) = \frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad \omega \neq 2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad k=0,1,\dots$$

În acest caz impulsurile apar la $\omega = \pi + 2k\pi$

$$|X_2(\omega)| = \frac{1}{2 \left| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|} \quad \omega \neq 2\pi k + \pi \quad k=0,1,\dots$$

și faza

$$\angle X_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{2} & \text{pentru } \cos \frac{\omega}{2} \geq 0 \\ \frac{\omega}{2} + \pi & \text{pentru } \cos \frac{\omega}{2} < 0 \end{cases}$$

Datorită prezenței polului la $a = -1$ (adică frecvența $\omega = \pi$) modulul transformatei Fourier devine infinit, $|X(\omega)| \rightarrow \infty$ pentru $\omega = \pi$.

c) $X_3(\omega)$ devine infinit la $\omega = \omega_0$,

$$X_3(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad \text{RC : } |z| > 1.$$

transformata Fourier este

$$X_3(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega} \cos \omega_0}{(1 - e^{-j(\omega-\omega_0)})(1 - e^{j(\omega+\omega_0)})}; \quad \omega \neq \omega_0 + 2\pi k; \quad k = 0,1,\dots$$

$$|X_3(\omega)| = \frac{|1 - e^{-j\omega} \cos \omega_0|}{|1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}| |1 - e^{j(\omega+\omega_0)}|}, \quad \omega \neq \omega_0 + 2\pi k, \quad k = 0,1,\dots$$

pentru $\omega = -\omega_0$ sau $\omega = \omega_0$, $|X_3(\omega)|$ devine infinită, pentru orice altă valoare aceasta fiind bine definită.

4.3. Caracterizarea semnalelor în domeniul frecvență și dualitatea timp frecvență

4.3.1. Dualitatea semnalelor

Pentru analiza în frecvență a semnalelor, în paragrafele precedente s-au introdus:

-seria Fourier pentru semnale analogice și discrete periodice;

-transformata Fourier pentru semnale analogice și discrete aperiodice.

Din paragrafele 4.1 și 4.2 se observă că există două caracteristici ale semnalelor care determină caracteristicile spectrului, și anume, natura variabilei, continuă sau discretă, și periodicitatea sau neperiodicitatea semnalului. Formulele de analiză și sinteză obținute în paragrafele 4.1. și 4.2 pentru semnale analogice și discrete periodice sau aperiodice se numesc duale una alteia și sunt prezentate în tabelul din figura 4.5. Se desprind următoarele concluzii:

- a) *Semnalele analogice au spectrul aperiodic.* Acest lucru se datorează faptului că exponențiala complexă $e^{j2\pi Ft}$ este o funcție de variabilă continuă t și, deci, nu este periodică în F . Spectrul semnalelor continue se întinde pe întreaga axă reală, dar în anumite situații de simetrie aceasta se reduce la axa reală pozitivă de la $F=0$ la $F=\infty$.
- b) *Semnalele discrete au spectrul periodic.* Într-adevăr, atât seria Fourier, cât și transformata Fourier pentru semnale discrete sunt funcții periodice cu perioada egală cu 2π . Ca urmare a acestei periodicități domeniul de frecvență al spectrului semnalelor discrete este finit, și cuprins între $\omega = -\pi$ și $\omega = \pi$, unde $\omega = \pi$ corespunde celei mai înalte frecvențe posibile de oscilație. În anumite condiții de simetrie acesta poate fi doar $\omega \in [0, \pi]$.
- c) *Semnalele periodice au spectrul discret.* Acestea sunt descrise de serii Fourier, ai căror coeficienți reprezintă "liniile" spectrului discret. Spațiul dintre linii de ΔF sau Δf este egal cu inversul perioadei T_p .

respectiv N , din domeniul timp, adică $\Delta F = \frac{1}{T_p}$ pentru semnale

analogice periodice și $\Delta f = \frac{1}{N}$ pentru semnale discrete periodice.

- d) *Semnalele aperiodice de energie finită au spectrul continuu.* Acest lucru este o consecință a faptului că atât $X(F)$ cât și $X(\omega)$ sunt funcții de $e^{j2\pi Ft}$ și, respectiv $e^{j\omega t}$, care sunt funcții continue de F și ω .

Periodicitatea cu perioada α într-un domeniu implică discretizarea cu spațiere de $1/\alpha$ în celălalt domeniu, și invers. În domeniul frecvență perioada se referă la banda de frecvență, iar în domeniul timp spațierea se referă la perioada de eșantionare. Se observă că toate relațiile duale diferă numai în semnul exponentului exponențialei complexe. Această schimbare de semn poate fi interpretată ca o reflectare a semnalului sau spectrului, deoarece

$$e^{-j2\pi Ft} = e^{j2\pi(-F)t} = e^{j2\pi F(-t)} \quad (4.165)$$

Din punct de vedere energetic s-a folosit termenul de densitate spectrală de energie în caracterizarea semnalelor aperiodice de energie finită și termenul de densitate spectrală de putere pentru semnale periodice, terminologie care este în concordanță cu faptul că semnalele periodice sunt de putere finită, iar cele aperiodice de energie finită.

4.3.2. Clasificarea semnalelor în domeniul frecvență

O posibilă clasificare a semnalelor în domeniul frecvență se poate efectua după banda dominantă din spectrul lor.

Dacă un semnal de putere (sau energie) finită are spectrul densității de putere (sau energie) concentrat în jurul frecvenței zero, atunci acesta se numește de *joasă frecvență*.

Dacă spectrul densității de putere (sau de energie) este concentrat la frecvențe înalte, acesta se numește *semnal de înaltă frecvență*.

Dacă spectrul densității de putere (sau de energie) al unui semnal este concentrat într-un domeniu cuprins între frecvențele joase și înalte, acesta se numește semnal *trece-bandă* sau *de medie frecvență*.

În plus față de această clasificare generală, se mai folosește o măsură cantitativă pentru domeniul în care este concentrat spectrul densității de putere (sau energie), numită *lățime de bandă*. Spre exemplu, dacă 95% din spectrul unui semnal analogic este concentrat în domeniul de frecvență $F_1 \leq F \leq F_2$, atunci 95% din lățimea de bandă a semnalului este $F_2 - F_1$. În cazul semnalelor trece bandă, termenul de *bandă îngustă* se

folosește pentru a descrie un semnal a cărui lățime de bandă F_2-F_1 este mult mai mică (≤ 10 ori) decât frecvența mediană $\frac{F_1 + F_2}{2}$. În caz contrar semnalele se numesc de *bandă largă*. Un semnal este de *bandă limitată*, dacă spectrul său este zero în afara domeniului de frecvență $|F| \geq B$.

De exemplu, un semnal continuu, de energie finită $x(t)$ este de bandă limitată, dacă transformata sa Fourier $X(F)=0$ pentru $|F|>B$. Un semnal discret $x[n]$, de energie finită, este *periodic de bandă limitată*, dacă

$$|X(\omega)|=0 \quad \text{pentru } \omega_0 < |\omega| < \pi.$$

Similar, un semnal analogic periodic, $x_p(t)$, este de bandă limitată dacă coeficienții săi Fourier $c_k=0$ pentru $|k|>M$ cu M întreg pozitiv.

Un semnal discret periodic, cu perioada fundamentală N este periodic de bandă limitată, dacă coeficienții săi Fourier $c_k=0$ pentru $k_0 < |k| < N$.

Folosind dualitatea dintre domeniile frecvență și timp se pot folosi mijloace similare în caracterizarea semnalelor în domeniul timp.

Un semnal se numește *limitat în timp* sau de durată finită dacă: $x(t)=0$ pentru $|t|>\tau$ pentru semnale analogice și $x[n]=0$ pentru $|n|>N$ pentru semnale discrete aperiodice. Dacă semnalul este periodic, el este *limitat în timp*, dacă $x_p(t)=0$ pentru $\tau < |t| < \frac{T_p}{2}$ pentru semnale analogice și $x[n]=0$ pentru $n_0 < n < N$ pentru semnale discrete.

O caracteristică de bază a oricărui semnal este aceea că el nu poate fi simultan de bandă și durată limitată.

4.4. Probleme propuse

4.1. Să se calculeze și să se reprezinte spectrul de modul și de fază pentru următoarele semnale: ($a > 0$)

$$\text{a) } x_a(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad \text{b) } x_a(t) = Ae^{-a|t|}$$

$$4.2. \text{ Fie semnalul } x(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau & |t| \leq \tau \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

- a) Să se determine și să se reprezinte spectrul de modul și de fază $|X_a(F)|$ și $\angle X_a(F)$.
- b) Să se creeze semnalul periodic $x_p(t)$, cu perioada fundamentală $T_p \geq 2\tau$, astfel încât $x(t) = x_p(t)$ pentru $|t| < T_p/2$. Care sunt coeficienții Fourier c_k pentru semnalul $x_p(t)$?
- c) Să se arate că $c_k = (1/T_p) X_a(k/T_p)$.

4.3. Se consideră semnalul

$$x[n] = 2 + 2 \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi n}{4}$$

- a) Să se determine și să se reprezinte spectrul densității de putere.
- b) Să se determine puterea semnalului.

4.4. Să se determine și să se reprezinte spectrele de modul și de fază ale următoarelor semnale periodice.

a) $x[n] = 4 \sin \frac{\pi(n-2)}{3}$, b) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{3}n + \sin \frac{2\pi}{5}n$

c) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{3}n \sin \frac{2\pi}{5}n$, d) $x[n] = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

e) $x[n] = \{\dots, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$, f) $x[n] = 1 \quad -\infty < n < \infty$

4.5 Să se determine semnalele periodice, cu perioada fundamentală $N = 8$, dați fiind coeficienții lor Fourier

a) $\{c_k\} = \cos \frac{k\pi}{4} + \sin \frac{3k\pi}{4}$, b) $\{c_k\} = \begin{cases} \sin \frac{k\pi}{3} & 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & k = 7 \end{cases}$

c) $\{c_k\} = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots \right\}$

4.6. Să se determine semnalele care au următoarele transformate Fourier:

a) $X(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_0 \\ 1 & \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$

c) Semnalul din figura p.4.6.

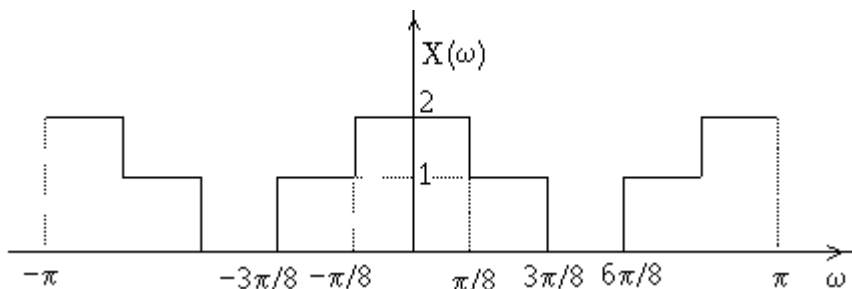


Figura p4.6.

4.7. Să se determine transformata Fourier a următoarelor semnale:

a) $x[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$, b) $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

c) $x[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq -1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

4.8. Se consideră semnalul $x[n] = \{-1, 2, -3, 2, -1\}$ a cărui

transformată Fourier este $X(\omega)$. Să se calculeze următoarele mărimi:

a) $X(0)$; b) $\angle X(\omega)$; c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$; d) $X(\pi)$; e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$

4.9. Fie $x[n]$ un semnal arbitrar, nu neapărat real, cu transformata Fourier $X(\omega)$. Să se exprime transformata Fourier a următoarelor semnale în funcție de $X(\omega)$.

a) $x^*[n]$; b) $x^*[-n]$; c) $y[n] = x[n] - x[n-1]$; d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$;

e) $y[n] = x[2n]$; f) $y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$.

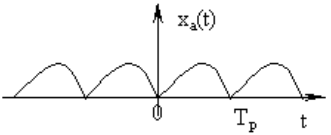
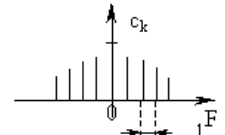
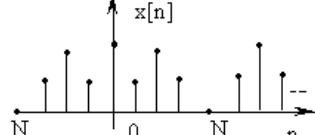
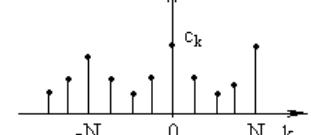
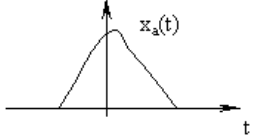
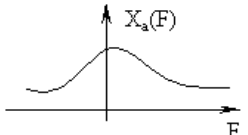
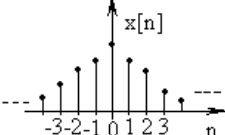
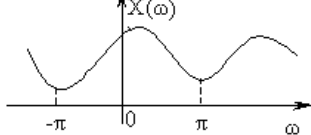
| | | Semnale analogice | | Semnale discrete | |
|--------------------|----------------------|---|---|---|---|
| | | Domeniul timp | Domeniul frecvență | Domeniul timp | Domeniul frecvență |
| Semnale periodice | Serii Fourier |  $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_a(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$ |  $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$ |  $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$ |  $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$ |
| | | Continuu și periodic | Discret și aperiodic | Discret și periodic | Discret și periodic |
| Semnale aperiodice | Transformate Fourier |  $X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$ |  $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$ |  $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ |  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$ |
| | | Continuu și aperiodic | Continuu și aperiodic | Discret și aperiodic | Continuu și periodic |

Figura 4.4