CAPITOLUL 3

TRANSFORMATA Z ȘI APLICAȚIILE EI LA ANALIZA SISTEMELOR DISCRETE, LINIARE, INVARIANTE ÎN TIMP

3.1. Transformata Z

În analiza semnalelor și a sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, transformata Z joacă același rol ca transformata Laplace în analiza semnalelor și a sistemelor analogice, liniare, invariante în timp.

3.1.1. Transformata Z directă

Transformata Z a unui semnal discret $x[n]$ este definită ca o serie de puteri

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{3.1}$$

unde z este o variabilă complexă. În planul complex z, în abscisă se trece partea reală a variabilei complexe z, iar în ordonată, partea sa imaginară. Relația (3.1) se numește transformată Z directă, pentru că transformă semnalul definit în domeniul timp în reprezentarea sa în planul complex, X(z).

Transformata Z a unui semnal $x[n]$ va fi notată cu

$$X(z) = Z\{x[n]\}, \tag{3.2}$$

în timp ce relația dintre $x[n]$ și $X(z)$ va fi indicată de reprezentarea

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \tag{3.3}$$

Deoarece transformata Z este o serie infinită de puteri, ea există numai pentru acele valori ale lui z pentru care seria converge. Regiunea de convergență (RC) a transformatei X(z) este dată de mulțimea valorilor lui z pentru care X(z) are valori finite. Ori de câte ori este dată o transformată Z, trebuie precizată și RC corespunzătoare.

Exemplul 3.1.

Să se determine transformata Z pentru următoarele semnale de durată finită:

a) $x_1[n] = \{1,2,5,7,0,1\}$

b) $x_2[n] = \{1,2,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\}$

c) $x_3[n] = \{0,0,1,2,5,7,0,1\}$

d) $x_4[n] = \delta[n]$

e) $x_5[n] = \delta[n-k], \quad k > 0$

f) $x_5[n] = \delta[n+k], \quad k > 0$

Soluție. Din definiția (3.1) se obține:

a) $X_1(z) = 1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$, RC: planul z – {z = 0}.

b) $X_2(z) = z^2+2z+5+7z^{-1}+z^{-3}$, RC: planul z – {z = 0; z = ∞}.

c) $X_3(z) = z^{-2}+2z^{-3}+5z^{-4}+7z^{-5}+z^{-7}$, RC: planul z – {z = 0}.

d) $X_4(z) = 1$, RC: planul z.

e) $X_5(z) = z^{-k}$, RC: planul z – {z = 0}.

f) $X_6(z) = z^k$, RC: planul z – { z = ∞}.

Din exemplul precedent se observă că RC a semnalelor de durată finită este întreg planul z, exceptând eventual punctele z = 0 şi/sau z = ∞, unde unii termeni ai seriei devin nemărginiți. Din definiția transformatei Z, se observă că transformata Z a părții cauzale a unei secvențe conține numai puteri negative ale variabilei z, iar partea pur necauzală, numai puteri pozitive. Pentru secvențe de durată finită $x[n] = \{x_{N_1}, x_{N_1+1}, ..., x_{N_2}\}$, cu N_1, N_2 numere întregi, se consideră că $x[n] = 0$, pentru $x \notin [N_1, N_2]$.

În unele cazuri, sumele finite sau infinite ale unei serii de puteri pot fi exprimate mai compact, dacă seria converge într-o regiune.

Exemplul 3.2.

Transformata Z a semnalului $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ este

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

care este o serie geometrică infinită, convergentă pentru $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1$, şi, deci, $X(z)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}z^{-1}}$ pentru $|z|>\dfrac{1}{2}$, adică RC: $|z|>\dfrac{1}{2}$.

Dacă în relația (3.1) variabila complexă se exprimă sub formă polară $z=re^{j\theta}$, unde r = |z| şi $\theta=\angle z$, atunci X(z) poate fi scris sub forma

$$X(z)\,|_{z=re^{j\theta}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}e^{-j\theta n} \tag{3.4}$$

În regiunea de convergență a lui X(z), $|\,\mathrm{X(z)}\,|<\infty$.

$$|X(z)|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]r^{-n}\right| \tag{3.5}$$

Prin urmare, |X(z)| este finit dacă $x[n]r^{-n}$ este absolut sumabil. Problema găsirii RC pentru X(z) este echivalentă cu determinarea domeniului de valori pentru r, pentru care $x[n]r^{-n}$ este absolut sumabil. Pentru aceasta, se exprimă (3.5) sub forma

$$|X(z)|\le\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|x[n]r^{-n}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x[n]}{r^{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x[-n]r^{n}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x[n]}{r^{n}}\right| \tag{3.6}$$

Dacă |X(z)| converge într-o regiune a planului complex, ambele sume din (3.6) trebuie să fie finite în acea regiune. Dacă prima sumă, care corespunde părții necauzale a lui x[n], converge, trebuie să existe valori suficient de mici pentru r, astfel încât produsele $x[-n]r^{n}$ să fie absolut sumabile pentru $n\ge1$. Aşadar, pentru prima sumă, RC este formată din punctele dintr-un cerc de rază $r_1<\infty$ ca în figura 3.1a. Dacă a doua sumă, care corespunde părții cauzale a lui x[n], converge, trebuie să existe valori pentru r suficient de mari, astfel încât $\dfrac{x[n]}{r^{n}}$, $0\le n<\infty$, să fie absolut sumabil. Regiunea de convergență pentru a doua sumă constă din punctele din afara unui cerc de rază $r>r_2$, ca în figura 3.1b. Deoarece convergența lui X(z) implică ambele sume din (3.6) finite, RC pentru X(z) este regiunea inclusă din planul z, $r_2<r<r_1$, figurată în figura 1c.

Dacă $r_2>r_1$, nu există regiune de convergență comună pentru cele două sume şi, deci, X(z) nu există.

Conceptul de regiune de convergență în legătură cu transformata Z este ilustrat pe următoarele două exemple.

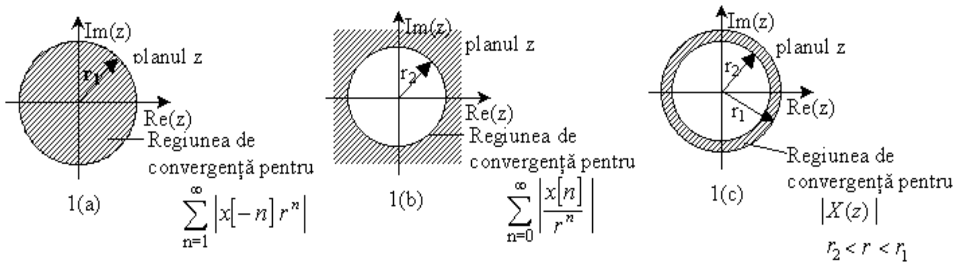

Figura 3.1. Regiunea de convergență pentru a) partea pur necauzală a lui X(z), b) partea cauzală a lui X(z) şi c) X(z)

Exemplul 3.3.

Să se determine transformata Z a semnalului

$$x[n] = \alpha^n u[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Soluție. Aplicând definiția (3.1), se obține

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha z^{-1}\right)^n$$

Dacă $\left|\alpha z^{-1}\right| < 1$ sau, echivalent, $|z| > |\alpha|$, seria X(z) converge la $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$.

$$x[n] = \alpha^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad RC \quad |z| > |\alpha| \tag{3.8}$$

Dacă în (3.8) se impune α = 1, se obține transformata Z a treptei unitate

$$x[n] = u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad RC: \quad |z| > |1| \tag{3.9}$$

Exemplul 3.4.

Să se determine transformata Z a semnalului

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1] = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\alpha^n & n \leq -1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Soluție. Aplicând definiția (3.1), se obține

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1} \cdot z\right)^m, \text{ unde m = −n.}$$

Dacă $\left|\alpha^{-1} z\right| < 1$, sau, echivalent, $|z| < \alpha$, $X(z) = -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

$$x[n] = -\alpha^n u[-u-1] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad RC: |z| < |\alpha| \tag{3.11}$$

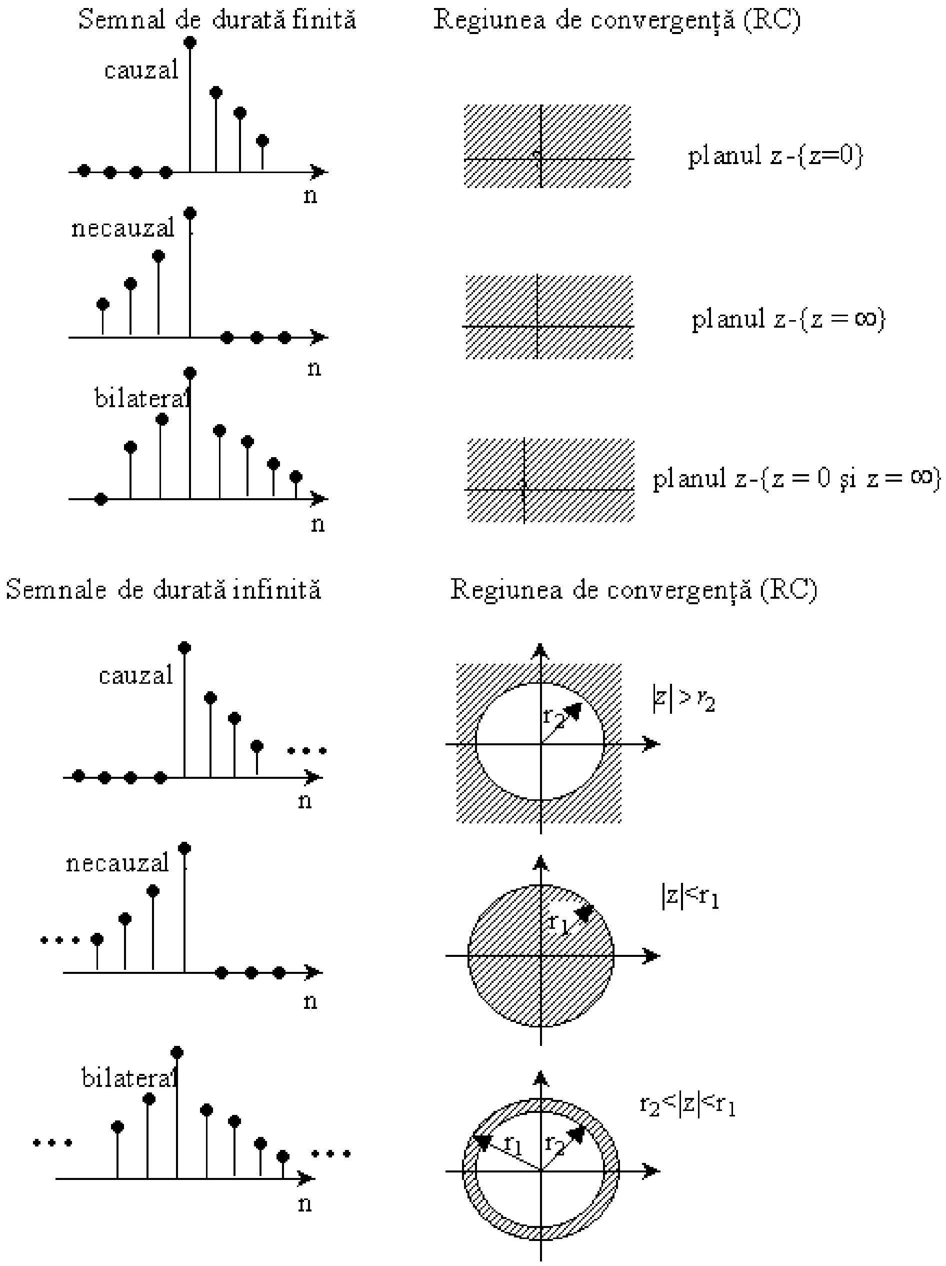

Figura 3.2. Regiuni de convergență pentru diverse tipuri de semnale

Din comparația exemplelor 3 şi 4 se desprind următoarele observații:
1. Două semnale diferite, unul cauzal, dat de (3.7), şi celălalt necauzal, dat de (3.10), au aceeaşi transformată Z, adică

$$Z\{\alpha^n u[n]\} = Z\{-\alpha^n u[-n-1]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

şi, prin urmare, cunoaşterea transformatei Z a unui semnal fără precizarea RC nu determină în mod unic semnalul respectiv. Această ambiguitate se elimină prin specificarea regiunii de convergență. În continuare, termenul de transformată Z va fi folosit pentru a face referire atât la expresia analitică a transformatei Z cât şi la regiunea ei de convergență;
2. Exemplul 3 ilustrează faptul că RC a unui semnal cauzal este exteriorul unui cerc de rază $r_2=\alpha$, iar exemplul 4 ilustrează că RC a unui semnal necauzal este interiorul unui cerc de rază $r_1=\alpha$. Pentru un semnal bilateral (care are o parte cauzală şi una pur necauzală) RC, dacă există, va fi un inel circular, ca în fig.1c.

Din cele prezentate până acum s-a observat că RC a unui semnal depinde atât de durata sa (finită sau infinită) cât şi de faptul dacă este sau nu cauzal, dependență arătată în figura 3.2.

Transformata Z dată de relația (3.1) mai este cunoscută ca transformata Z bilaterală, pentru a o deosebi de transformata Z unilaterală definită de relația

$$X^+(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{3.12}$$

În continuare se va folosi expresia de *transformată Z* în desemnarea transformatei bilaterale date de (3.1). Evident, dacă semnalul x[n] este cauzal, transformata Z bilaterală şi cea unilaterală sunt identice.

3.1.2. Transformata Z inversă

În multe cazuri se dispune de transformata Z a unui semnal şi trebuie determinat semnalul x[n], lucru care se realizează cu ajutorul *transformatei Z inverse.* O formulă de obținere a lui $x[n]$ din $X(z)$ se bazează pe teorema integrală a lui Cauchy [23].

Se presupune transformata Z de forma

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \tag{3.13}$$

Multiplicând ambii membri ai relației (3.13) cu z^{n-1} şi apoi integrând pe un contur închis din RC a lui X(z) care conține originea, se obține

$$\oint_c X(z)z^{n-1}dz = \oint_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{n-1-k}dz \qquad (3.14)$$

unde c – reprezintă un contur închis din RC ce conține originea, parcurs în sens antiorar. Deoarece seria converge pe acest contur, se poate schimba ordinea integrării şi sumării din membrul drept al relației (3.14), obținându-se

$$\oint_c X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\oint_c z^{n-1-k}dz \qquad (3.15)$$

Conform teoremei integrale a lui Cauchy, se poate scrie

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{n-k-1}dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \qquad (3.16)$$

Aplicând (3.16) în (3.15), membrul drept se reduce la $2\pi j x[n]$ şi formula de inversiune este

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz \qquad (3.17)$$

Deşi relația de inversiune (3.17) permite obținerea originalului din transformata Z, ea nu se foloseşte direct în evaluarea transformatei Z inverse atunci când se operează cu semnale care au transformate Z raționale (raport de polinoame), deoarece pentru acestea s-au dezvoltat metode mai simple de inversiune.
Transformata Z inversă a lui X(z) se notează cu Z^{-1}, adică $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$.

3.2. Proprietățile transformatei Z

Transformata Z reprezintă un instrument foarte puternic în studiul semnalelor şi sistemelor discrete, însuşire ce este o consecință a proprietăților pe care le posedă. Când într-o expresie intervin mai multe transformate Z, va rezulta o transformată a cărei regiune de convergență este cel puțin intersecția regiunilor de convergență a transformatelor individuale.

1. Liniaritatea

Dacă
$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad z \in RC1$$
$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad z \in RC2$$

atunci

$$x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\xleftrightarrow{Z}X(z)=a_1X_1(z)+a_2X_2(z) \qquad (3.18)$$

cu RC - cel puțin intersecția dintre RC1 şi RC2.
Această proprietate se demonstrează simplu, aplicând definiția (3.1)

2. Translația sau deplasarea în timp

Dacă $x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z)$
atunci

$$x[n-k]\xleftrightarrow{Z}z^{-k}X(z) \qquad (3.19)$$

Demonstrația rezultă imediat din aplicarea definiției (3.1).

$$Z\{x[n-k]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-k]z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m}\cdot z^{-k}=z^{-k}\cdot X(z),$$

unde m=n-k. RC pentru $z^{-k}\cdot X(z)$ este aceeaşi cu RC pentru X(z), exceptând z=0 pentru k>0 şi z=∞ pentru k<0.

3. Modularea în timp

Dacă $x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z),\ RC: r_1<|z|<r_2$
atunci

$$e^{j\omega_0 n}\cdot x[n]\xleftrightarrow{Z}X\left(e^{-j\omega_0}\cdot z\right) \quad RC: r_1<|z|<r_2 \qquad (3.20)$$

Demonstrație

$$Z\left\{e^{j\omega_0 n}\cdot x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 n}\cdot x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(e^{-j\omega_0}\cdot z\right)^{-n}=X\left(e^{-j\omega_0}\cdot z\right),$$

$RC: r_1<|z|<r_2$

Regiunea de convergență a transformatei semnalului modulat este aceeaşi cu a semnalului inițial, deoarece multiplicarea cu $e^{-j\omega_0}$ a variabilei z nu modifică modulul variabilei complexe, ci numai unghiul său.

Se poate stabili o relație mai generală, modulând cu z_0^n, $|z_0|\neq 1$.

$$Z\left\{z_0^n x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_0^n x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n}=X\left(\frac{z}{z_0}\right);\quad RC: r_1<\left|\frac{z}{z_0}\right|<r_2$$

Dacă z_0 este real, adică $z_0=a$, se obține scalarea în domeniul z, adică

$$Z\left\{a^n x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(a^{-1}z\right)^{-n}=X\left(a^{-1}z\right)$$

Deoarece RC pentru X(z) este $r_1 < |z| < r_2$, RC pentru X(a^{-1}z) este

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2 \text{ sau } |a|r_1 < |z| < |a|r_2 .$$

4. Reflectarea semnalului

Dacă $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ RC: $r_1 < |z| < r_2$

atunci

$$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad RC: \ \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \tag{3.21}$$

Demonstrație

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(z^{-1}\right)^{-m} = X(z^{-1})$$

unde m = -n.

RC a lui X(z^{-1}) este $r_1 < |z^{-1}| < r_2$ sau, echivalent, $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Se observă că dacă z_0 aparține RC a lui x[n], 1/z_0 aparține RC pentru x[-n].

5. Derivarea transformatei Z

Dacă $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad z \in RC$

atunci

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad z \in RC \tag{3.22}$$

Demonstrație

Prin derivarea ambilor membri ai relației (3.1) rezultă

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n][-n]z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[n\,x[n]]z^{-n} = -z^{-1}Z\{n\,x[n]\}.$$

Ambele transformate au aceeași regiune de convergență.

6. Transformarea diferenței

Dacă $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad z \in RC$

atunci

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{Z} (1 - z^{-1})X(z), \quad z \in RC - \{z = 0\} \tag{3.23}$$

Demonstrația se obține aplicând proprietatea 2 de translare în timp.

7. Însumarea în timp

Dacă $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad z \in RC$

atunci

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}, \quad z \in RC - \{z = 1\} \tag{2.24}$$

Demonstrație

Semnalul sumă $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ satisface relația $x[n] = y[n] - y[n-1]$, a cărei tranformată Z este $X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$. În consecință, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$.

8. Transformarea semnalului complex conjugat

Dacă $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad z \in RC$ unde $x[n]$ este o secvență complexă, atunci

$x^*[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*)$

Demonstrație

$$Z\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z^*\right)^{-n} \right)^* = X^*(z^*), \quad z \in RC$$

9. Teorema convoluției

Dacă $\quad x_1[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \qquad RC_1$

$\qquad x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z) \qquad RC_2$

atunci

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = X_1(z) X_2(z) \tag{3.25}$$

cu RC intersecția RC_1 cu RC_2.

Demonstrație

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right] \cdot z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m] z^{-m} \cdot z^{-k} =$$

$$= X_2(z) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} = X_2(z) \cdot X_1(z)$$

Convoluția este una dintre cele mai importante proprietăți ale transformatei Z deoarece transformă convoluția a două semnale din domeniul timp într-o multiplicare a transformatelor Z.

Uneori, pentru calculul convoluției a două semnale se recurge la folosirea transformatei Z, după cum urmează:

1 - se calculează transformatele Z ale semnalelor implicate în convoluție

$X_1(z) = Z\{x_1[n]\}$
$X_2(z) = Z\{x_2[n]\}$ domeniul timp → domeniul z.

2 - se multiplică cele două transformate

$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$ în domeniul z.

3 - se efectuează transformarea inversă

$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$ domeniul z → domeniul timp.

În multe cazuri această procedură implică un efort de calcul mai mic decât calculul direct al sumei de convoluție.

10. Teorema corelației

Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$, $z \in RC1$ $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$, $z \in RC2$

atunci $r_{x_1x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n-l] \xleftrightarrow{Z} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1})$ (3.26)

RC: intersecția RC pentru $X_1(z)$ cu RC pentru $X_2(z^{-1})$

Demonstrație

Se reaminteşte că $r_{x_1x_2}[l] = x_1[l] * x_2[-l]$

Folosind proprietățile de convoluție şi de reflectare în timp, se obține

$$R_{x_1x_2}(z) = Z\{x_1[l]\} \cdot Z\{x_2[-l]\} = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1}).$$

Ca şi în cazul convoluției, corelația a două semnale poate fi calculată mai uşor cu relația (3.26), urmată de transformarea inversă a rezultatului.

11. Teorema produsului semnalelor în domeniul timp

Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$, $r_{1l} < |z| < r_{1u}$

şi $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$, $r_{2l} < |z| < r_{2u}$
atunci

$$x_3[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \qquad (3.27)$$

unde c este un contur închis care include originea plasat în regiunea comună de convergenţă a lui $X_1(v)$ şi $X_2(1/v)$.

Demonstraţie

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \cdot x_2[n] z^{-n}$$

Se înlocuieşte $x_1[n]$ cu transformata inversă a lui $X_1(z)$, conform relaţiei (3.17)

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) v^{n-1} dv ,$$

apoi se schimbă ordinea sumei cu integrala

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$$

Pentru a găsi RC pentru $X_3(z)$, se observă că dacă $X_1(v)$ converge pentru $r_{1l} < |v| < r_{1u}$ şi $X_2(z)$ pentru $r_{2l} < |z| < r_{2u}$, atunci RC pentru $X_2\left(\frac{z}{v}\right)$ este $r_{2l} < \left|\frac{z}{v}\right| < r_{2u}$. RC pentru $X_3(z)$ este cel puţin

$$r_{1l} r_{2l} < |z| < r_{1u} r_{2u}$$

Dacă $x_2[n] = x_1^*[n]$, se obţine

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) X^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right) \frac{dv}{v}$$

Pentru z=1, rezultă expresia teoremei lui Parseval în domeniul z.

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) X^*\left(\frac{1}{v^*}\right) \frac{dv}{v}$, unde c este un contur în RC.

12. Teorema valorii iniţiale

Dacă x[n] este un semnal discret cauzal (x[n]=0 pentru n<0), atunci

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \qquad (3.28)$$

Demonstrație

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\dots$$

Evident, pentru z→∞, z^{-n}→0, pentru $n\geq 1$, şi (3.28) rezultă imediat.

În Tabelul 3.1 sunt date câteva perechi semnal – transformată Z, uzuale, frecvent utilizate în practică.

Tabel 3.1

	Semnal x[n]	Transformată Z X(z)	RC
1.	δ[n]	1	întreg planul z
2.	u[n]	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
3.	n·u[n]	$\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
4.	a^nu[n]	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
5.	n·a^nu[n]	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
6.	-a^nu[-n-1]	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
7.	-na^nu[-n-1]	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
8.	$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)}a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^k}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
9.	($\cos\omega_0$n)u[n]	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
10.	($\sin\omega_0$n)u[n]	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
11.	($a^n\cos\omega_0$n)u[n]	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

12.	$(a^n \sin\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Exemplul 3.5.

Să se determine transformata Z a semnalelor

a) $x_1[n]=n$,

b) $x_2[n]=n^2$,

c) $x_3[n]=n^3$.

Soluție

a) Fie $x[n]=u[n]$. $X(z)=\frac{z}{z-1}$.

Conform relației (3.22) ,

$$n \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz}=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

b) Conform punctului a), $Z\{n\}=\frac{z}{(z-1)^2}$. Aplicând (3.22) acestei relații, rezultă

$$Z\{n^2\}=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

c) Aplicând (3.22) relației precedente, se obține

$$Z\{n^3\}=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right)=\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}=\frac{z^{-1}(1+4z^{-2}+z^{-3})}{(1-z^{-1})^4}$$

3. 3. Transformate Z exprimate prin funcții raționale

3.3.1. Poli şi zerouri

O familie importantă de transformate Z este aceea pentru care X(z) este o funcție rațională, adică un raport de două polinoame în z^{-1} sau z.

Zerourile unei transformate Z, X(z), sunt valorile lui z pentru care X(z)=0. *Polii* transformatei Z sunt valorile lui z pentru care X(z)=∞.

Dacă X(z) este o funcție rațională, atunci

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+...b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+...a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}} \tag{3.29}$$

Dacă $a_0 \neq 0$ şi $b_0 \neq 0$, (3.29) se mai poate scrie

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0z^{-M}}{a_0z^{-N}}\cdot\frac{z^M+(b_1/b_0)z^{M-1}+...+(b_M/b_0)}{z^N+(a_1/a_0)z^{N-1}+...+(a_N/a_0)}=$$

$$=\frac{b_0}{a_0}z^{-M+N}\frac{(z-z_1)...(z-z_M)}{(z-p_1)...(z-p_N)}=G\cdot z^{N-M}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \tag{3.30}$$

unde $G=\frac{b_0}{a_0}$.

Transformata X(z) are M zerouri finite la $z=z_1,\ z_2\ \ldots\ z_M$, (rădăcinile polinomului de la numărător), N poli finiţi la $z=p_1,\ p_2\ \ldots\ p_N$ (rădăcinile numitorului) şi $|N-M|$ zerouri (dacă N>M) sau poli (dacă N<M) în origine. Poli şi zerouri pot apărea şi la infinit. Un zerou este la infinit, dacă $X(\infty)=0$ şi un pol este la infinit, dacă $X(\infty)=\infty$. Numărul de poli şi zerouri de la zero şi infinit este acelaşi, deoarece un pol în zero echivalează cu un zerou la infinit şi un zerou în zero echivalează cu un pol la infinit. Polii şi zerourile de la 0 şi/sau ∞ se numesc *banali* sau *triviali.* Zerourile şi polii finiţi determinaţi de coeficienţii b_k şi a_k se mai numesc *nebanali* sau *netriviali*.

Se face convenţia ca în planul complex un pol să fie reprezentat prin "x" iar un zero prin "o". Ordinul de multiplicitate al polilor sau zerourilor se indică printr-un număr plasat în apropierea semnului "x" sau "o". Evident, RC a unei transformate Z nu poate conţine poli. Dacă pentru o transformată Z se cunosc polii şi zerourile, atunci, conform (3.30), se poate determina transformata Z până la un factor de câştig G şi apoi, eventual, semnalul original.

3.3.2. Descompunerea transformatelor Z raţionale

În continuare se vor aborda câteva aspecte referitoare la descompunerea în fracţii simple a transformatelor Z raţionale, care se vor dovedi foarte utile în implementarea sistemelor discrete de ordin superior.

Fie o transformată Z, exprimată sub forma dată de relaţia (3.29). O funcţie raţională de forma (3.29) se numeşte *proprie*, dacă $a_N \neq 0$ şi M<N. Conform relaţiei (3.30), aceasta înseamnă că numărul zerourilor finite este mai mic decât al polilor finiţi. În caz contrar funcţia se numeşte *improprie*.

O funcţie raţională improprie (M≥N) poate fi întotdeauna scrisă ca suma dintre o funcţie polinomială şi una raţională proprie, adică

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=c_0+c_1 z^{-1}+\ldots+c_{N-M}z^{-(M-N)}+\frac{N_1(z)}{D(z)} \tag{3.31}$$

sau, altfel scris

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}c_k z^{-k}+X_{pr}(z) \tag{3.31'}$$

Dacă polii lui $X_{pr}(z)$ sunt distincţi, atunci

$$X_{pr}(z)=\frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2 z^{-1}}+\cdots+\frac{A_N}{1-p_N z^{-1}} \tag{3.32}$$

În cazul în care coeficienţii a_k şi b_k sunt reali, polii complecşi apar în perechi conjugate şi se grupează după cum urmează:

$$\frac{A}{1-pz^{-1}}+\frac{A^*}{1-p^*z^{-1}}=\frac{A-Ap^*z^{-1}+A^*-A^*pz^{-1}}{1-pz^{-1}-p^*z^{-1}+pp^*z^{-2}}=\frac{b_{c0}+b_{c1}z^{-1}}{1+a_{c1}z^{-1}+a_{c2}z^{-2}} \tag{3.33}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{c0}&=2\operatorname{Re}(A) \qquad & a_{c1}&=-2\operatorname{Re}(p)\\ b_{c1}&=-2\operatorname{Re}(Ap^*) \qquad & a_{c2}&=|p|^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Combinând (3.31), (3.32) şi (3.33), X(z) devine

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}c_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{k_1}\frac{b_{rk}}{1+a_{rk}z^{-1}}+\sum_{k=1}^{k_2}\frac{b_{c0k}+b_{c1k}z^{-1}}{1+a_{c1k}z^{-1}+a_{c2k}z^{-2}} \tag{3.35}$$

unde $k_1+2k_2=N$, indicele "c" face referire la poli complecşi, iar "r" la poli reali.

Evident, pentru M=N, primul termen este o constantă, iar pentru M<N, acesta dispare.

O formă alternativă pentru exprimarea lui X(z) se obţine plecând de la expresia (3.30) care, pentru $a_0=1$ poate fi scrisă echivalent

$$X(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - p_k z^{-1}\right)} \tag{3.36}$$

Dacă $a_0 \neq 1$, se poate obține (3.36) din (3.30) prin împărțirea numărătorului şi numitorului la a_0. În această expresie polii complex conjugați şi zerourile complex conjugate se combină pentru a forma expresii cu coeficienții reali, de forma

$$\frac{\left(1 - z_k z^{-1}\right)\left(1 - z_k^* z^{-1}\right)}{\left(1 - p_k z^{-1}\right)\left(1 - p_k^* z^{-1}\right)} = \frac{1 + b_{c1k} z^{-1} + b_{c2k} z^{-2}}{1 + a_{c1k} z^{-1} + a_{c2k} z^{-2}} \tag{3.37}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{c1k} &= -2\,\mathrm{Re}(z_k) \qquad & a_{c1k} &= -2\,\mathrm{Re}(p_k) \\ b_{c2k} &= \left|z_k\right|^2 & a_{c2k} &= \left|p_k\right|^2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Presupunând M=N, se obține

$$X(z) = b_0 \prod_{k=1}^{k_1} \frac{1 + b_{rk} z^{-1}}{1 + a_{rk} z^{-1}} \prod_{k=1}^{k_2} \frac{1 + b_{c1k} z^{-1} + b_{c2k} z^{-2}}{1 + a_{c1k} z^{-1} + a_{c2k} z^{-2}} \tag{3.39}$$

unde $N = k_1 + 2k_2$

3.3.3. Localizarea polilor şi comportarea în domeniul timp a semnalelor cauzale

În continuare se va considera relația dintre poziția polilor şi forma semnalului corespunzător din domeniul timp pe baza perechilor semnal – transformată Z din tabelul 3.1. Se va opera cu semnale reale, cauzale ale căror caracteristici depind de poziționarea polilor transformatei Z în regiunea $|z| < 1$ sau $|z| > 1$. Deoarece cercul $|z| = 1$ are raza egală cu 1, el se numeşte *cercul unitate*.

Dacă un semnal real are o transformată Z cu un pol, acesta trebuie sa fie real. Singurul semnal de acest fel este semnalul real exponențial.

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad RC \quad |z| > |a| \tag{3.40}$$

care are un zero la $z_1=0$ şi un pol la $p_1=a$ pe axa reală.

În figura 3.3 este prezentată comportarea semnalului în funcție de poziția polului față de cercul unitate. Semnalul este exponențial descrescător dacă polul este în interiorul cercului unitate; constant, dacă polul este pe cercul unitate şi exponenţial crescător când acesta este în afara cercului unitate. În plus, un pol negativ are ca rezultat un semnal cu semnul alternant.

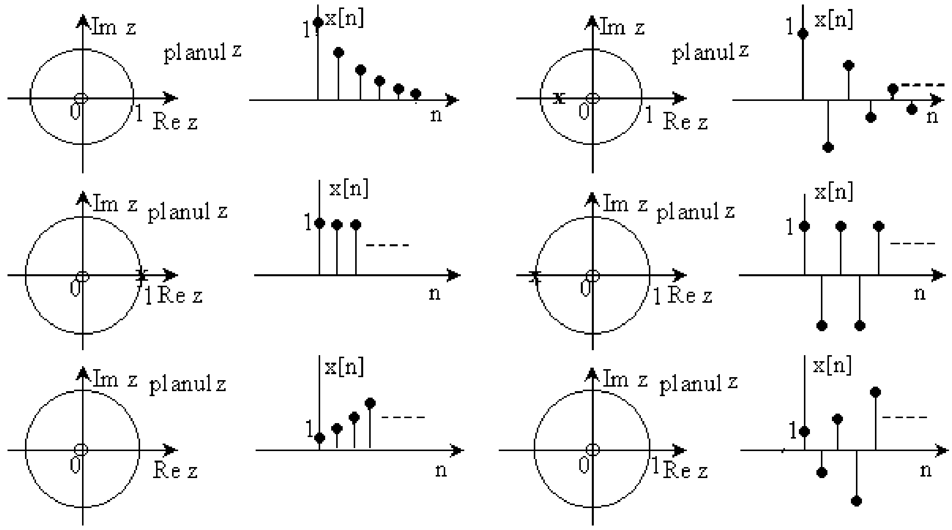

Figura 3.3. Comportarea în domeniul timp a unui semnal cauzal a cărui transformată Z are un singur pol real

Un semnal real a cărui transformată Z are un pol real dublu este de forma

$$x[n] = na^n u[n] \qquad (3.41)$$

şi comportarea sa este ilustrată în figura 3.4.

Se observă că un pol dublu pe cercul unitate are ca rezultat un semnal nelimitat.

În figura 3.5 este prezentat cazul unui semnal cauzal a cărui transformată Z are o pereche de poli complex conjugaţi (p şi p^*, $|p|=|p^*|=r$). Conform tabelului 3.1, aceştia au ca rezultat un semnal sinusoidal cu o înfăşurătoare exponenţială.

Distanţa r de la pol la origine determină anvelopa sinusoidei, iar unghiul pe care îl face polul cu axa reală determină frecvenţa sinusoidei. Se observă că amplitudinea semnalului este descrescătoare pentru $r < 1$, constantă pentru $r = 1$ şi crescătoare pentru $r > 1$.

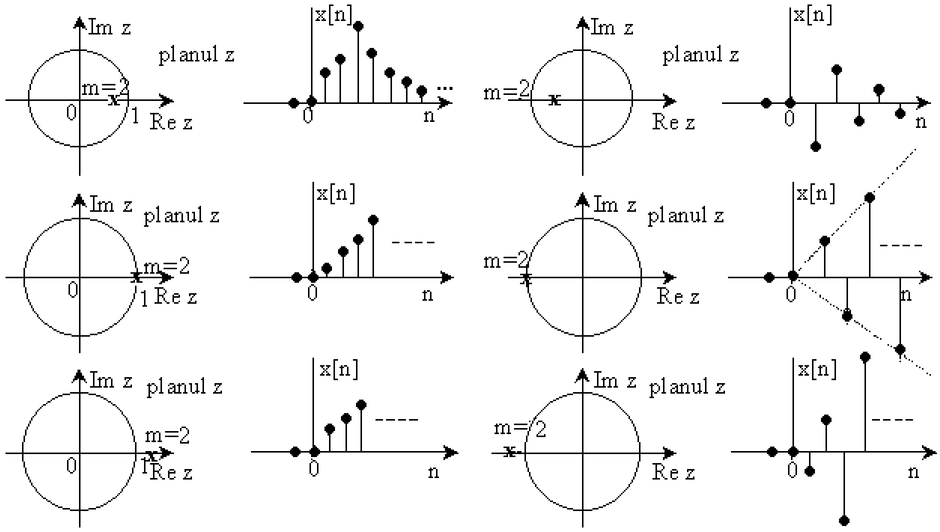

Figura 3.4. Comportarea în domeniul timp a unui semnal real cauzal a cărui transformată Z are un pol real dublu

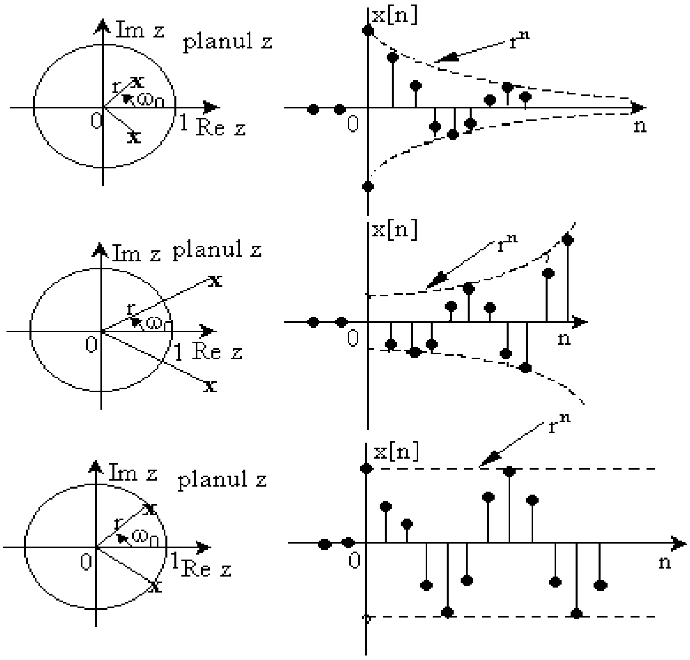

Figura 3.5. Comportarea oscilatorie în domeniul timp a unui semnal real cauzal a cărui transformată Z are o pereche de poli complex conjugați

Spre deosebire de cazul polului real dublu plasat pe cercul unitate, o pereche de poli complex conjugați plasați pe cercul unitate au ca rezultat un semnal real limitat. În figura 3.6 se prezintă alura unui semnal cauzal real a cărui transformată Z are o pereche de poli complex conjugați cu ordin de multiplicitate m=2 pe cercul unitate.

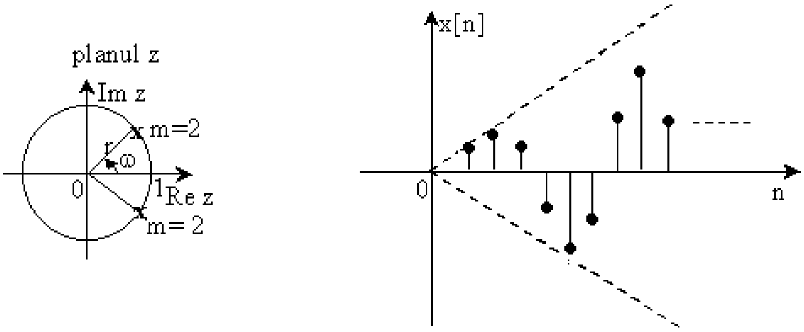

Figura 3.6. Semnal real cauzal a cărui transformată Z are o pereche dublă de poli complex conjugați pe cercul unitate.

În concluzie, semnalele reale cauzale ale căror transformate Z au poli reali simpli sau perechi simple de poli complex conjugați în interiorul sau pe cercul unitate sunt întotdeauna mărginite în amplitudine. Mai mult, semnalul cu un pol (sau o pereche de poli complex conjugați) plasați în apropierea originii descrește mult mai rapid decât cel pentru care aceștia sunt plasați în apropierea cercului unitate (dar, evident, în interiorul lui).

3.3.4. Funcția de transfer (sau de sistem) a unui sistem discret, liniar invariant în timp

În capitolul precedent s-a arătat că răspunsul unui sistem discret, liniar, invariant în timp la un semnal de intrare x[n] se poate obține efectuând convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului. Transformata Z a produsului de convoluție, prezentată în paragraful 3.2, permite scrierea

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \tag{3.42}$$

unde Y(z) este transformata Z a secvenței de ieșire,
X(z) este transformata Z a secvenței de intrare,
H(z) este transformata Z a răspunsului la impuls h[n].

Din (3.42) rezultă

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.43}$$

Mărimea H(z), care este transformata Z a răspunsului la impuls, caracterizează sistemul în domeniul z şi se numeşte *funcţie de transfer sau funcţie (de) sistem*.

Relaţia (3.43) este utilă pentru aflarea funcţiei de transfer pentru sisteme descrise de o ecuaţie cu diferenţe, de forma (2.114). Aplicând transformata Z acestei relaţii se obţine

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} \tag{3.44}$$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{3.44'}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{3.44''}$$

sau, echivalent

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{3.45}$$

Prin urmare, un SDLIT descris de o ecuaţie cu diferenţe are o funcţie de transfer raţională. Relaţia (3.45) este forma generală a funcţiei de transfer pentru un SDLIT, din care derivă două forme particulare.

Dacă $a_k=0$ pentru $1 \le k \le N$, (3.45) devine

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} \tag{3.46}$$

În acest caz H(z) conţine M zerouri ale căror valori sunt determinate de coeficienţii sistemului $\{b_k\}$ şi un pol banal de ordin de multiplicitate M în origine. Deoarece sistemul conţine numai poli banali (în z=0) şi M zerouri nebanale, el se numeşte *numai cu zerouri* (all-zero system). Un astfel de sistem este cu răspuns finit la impuls (FIR).

Pe de altă parte, dacă $b_k=0$ pentru $1 \le k \le M$, (3.45) devine

$$H(z)=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{N-k}} \quad , \quad a_0 \equiv 1 \qquad (3.47)$$

În acest caz H(z) are N poli a căror valoare este determinată de coeficienții $\{a_k\}$ şi un zerou banal de ordin de multiplicitate N în origine.

În general, nu se face referire la zerourile banale şi, în consecință, sistemul conține numai poli nebanali, acesta numindu-se sistem *numai cu poli* (all-pole system).

Forma generală (3.45) a funcției de transfer a unui SDLIT conține atât zerouri, cât şi poli, şi sistemul se numeşte *sistem poli-zerouri*, cu N poli şi M zerouri. Polii şi/sau zerourile de la z=0 şi z=∞ sunt impliciți şi nu se consideră.

3.4. Transformata Z inversă pentru funcții sistem raționale

În (3.1.2) s-a stabilit relația de inversiune a transformatei Z ca fiind

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz \qquad (3.48)$$

unde integrala se evaluează pe un contur închis c, care cuprinde originea şi se găseşte în regiunea de convergență a lui X(z).

În practică, evaluarea transformatei Z inverse se realizează prin următoarele trei metode:

1. Evaluarea directă a relației (3.48) folosind teorema reziduurilor;
2. Dezvoltarea în serie de puteri de variabilă z sau z^{-1};
3. Descompunerea în fracții simple şi folosirea tabelelor.

3.4.1. Evaluarea directă

Evaluarea directă a integralei pe contur (3.48) se poate efectua cu ajutorul teoremei reziduurilor a lui Cauchy care afirmă că dacă f(z) este o funcție de variabilă complexă, c un contur închis în domeniul z şi f(z) nu are poli în $z=z_0$, atunci

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\begin{cases} f(z_0) \text{ dacă } z_0 \text{ este in interiorul conturului c} \\ 0 \quad \text{ dacă } z_0 \text{ este in afara conturului c}\end{cases} \qquad (3.49)$$

Mai general, dacă în interiorul conturului c există poli multipli ai integrandului şi f(z) nu are poli în $z=z_0$, atunci

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{(k-1)!}\,\dfrac{d^{k-1}f(z)}{dz^{k-1}}\right|_{z=z_0} & \text{dacă } z_0 \text{ este în interiorul conturului c} \\ 0 & \text{dacă } z_0 \text{ este în afara conturului c} \end{cases} \qquad (3.50)$$

Valoarea membrului drept din relaţiile (3.49) şi (3.50) se numeşte *reziduul polului* la $z=z_0$.

Dacă se presupune că integrandul relaţiei (3.48) este de forma

$$P(z)=\frac{f(z)}{g(z)}, \qquad (3.51)$$

unde f(z) nu are poli în interiorul conturului c în punctele $z_1, z_2, \dots, z_n$ şi g(z) este un polinom cu rădăcini distincte simple $z_1, z_2, \dots, z_n$ în interiorul conturului c, atunci

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{f(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_c\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i(z)}{z-z_i}\right)dz = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{A_i(z)}{z-z_i}dz = \sum_{i=1}^{n}A_i(z_i) \qquad (3.52)$$

unde

$$A_i(z_i) = (z-z_i)\cdot P(z)\big|_{z=z_i} = \left.(z-z_i)\frac{f(z)}{g(z)}\right|_{z=z_i} \qquad (3.53)$$

Valorile $A_i(z_i)$ sunt reziduurile polilor corespunzători la $z = z_i$, i = 1,2,… . Cu alte cuvinte, valoarea integralei pe contur este egală cu suma reziduurilor tuturor polilor din interiorul conturului c.

Relaţia (3.52) s-a obţinut prin descompunerea în fracţii simple a integrandului şi aplicarea relaţiei (3.49). Dacă g(z) are rădăcini multiple în interiorul conturului c, se foloseşte relaţia (3.50) pentru evaluarea reziduurilor.

Cu ajutorul teoremei reziduurilor, x[n] din (3.48) se calculează ca fiind

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz = \sum_{\textit{toti polii din c}} \left.\textit{reziduurile lui } X(z)z^{n-1}\right|_{z=z_i} = \sum_i \left.(z-z_i)\cdot X(z)\cdot z^{n-1}\right|_{z=z_i} \qquad (3.54)$$

pentru cazul în care $\{z_i\}$ sunt poli simpli sau cu relația

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_{toti\ polii\ din\ c} reziduurile\ lui\ X(z)z^{n-1} \quad (3.54')$$

în cazul în care există şi poli multipli.

Dacă $X(z)\,z^{n-1}$ nu are poli în interiorul conturului c pentru una sau mai multe valori ale lui n, atunci x[n]=0 pentru aceste valori.

Exemplul 3.5.

Să se determine originalul lui $X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$, prin evaluarea integralei pe contur.

Soluție

$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z^n}{z-a}dz$, unde c este un cerc de rază mai mare decât $|a|$.

Integrandul este de forma (3.51), cu $f(z) = z^n$ şi $g(z) = z - a$. Există două cazuri:

a) $n \geq 0$, când f(z) are numai zerouri în origine şi, conform (3.49), rezultă $x[n]=z^n\big|_{z=a}=a^n$.

b) $n < 0$, $f(z) = z^n$ are un pol de ordinul n în z = 0.

Pentru n = -1, rezultă $x[-1]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1}{z(z-a)}dz=\frac{1}{z-a}\Big|_{z=0}+\frac{1}{z}\Big|_{z=a}=0$

Pentru n = -2, rezultă

$$x[-2]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1}{z^2(z-a)}dz=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right)\Big|_{z=0}+\frac{1}{z^2}\Big|_{z=a}=0$$

În general,

$$x[-n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1}{z^n(z-a)}dz=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{z-a}\right)\Big|_{z=0}+\frac{1}{z^n}\Big|_{z=a}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!}\frac{1}{(z-a)^n}\Big|_{z=0}+\frac{1}{a^n}=0\,.$$

În concluzie, $x[n] = a^n u[n]$.

Relația (3.48) este valabila pentru toți n, dar, pentru n negativ, aplicarea ei poate deveni greoaie, datorită polului multiplu care apare în z=0. Acest lucru poate fi evitat prin efectuarea schimbării de variabilă $z=p^{-1}$, astfel încât (3.48) devine [17]

$$x[n] = \frac{-1}{2\pi j} \oint_{c'} X(1/p) p^{-n+1} p^{-2} dp \qquad (3.55)$$

Conturul de integrare c' din (3.55) este parcurs în sens orar. Multiplicând cu -1 pentru a inversa sensul de parcurgere a conturului, schimbarea de variabilă anterioară conduce la expresia

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c'} X(1/p) p^{-n-1} dp = \sum_{toti\ polii\ din\ c'} \text{Reziduurile lui } X(1/p) p^{-n-1} \qquad (3.56)$$

Dacă conturul c din (3.48) este un cerc de rază r în planul z, conturul c' din (3.56) este un cerc de rază 1/r în planul p. Polii lui X(z) care erau în afara conturului c corespund acum polilor lui X(1/p) care sunt în interiorul conturului c', şi invers. Pentru exemplul 3.5, $x[n]$ poate fi exprimat sub forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c'} \frac{p^{-n-1}}{1-ap} dp \qquad (3.57)$$

Conturul de integrare c' este acum un cerc de rază mai mică decât 1/a. Pentru $n < 0$ nu există singularităţi în interiorul conturului, astfel încât $x[n] = 0$.

3.4.2. Transformata Z inversă obţinută prin descompunere în serie de puteri

Fiind dată o transformată Z, X(z), cu RC precizată, aceasta se poate descompune într-o serie de puteri de forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \qquad (3.58)$$

care este convergentă în RC.

Exemplul 3.6.

Să se determine transformata Z inversă pentru

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1{,}5 z^{-1} + 0{,}5 z^{-2}}$$

dacă

a) RC: $|z| > 1$

b) RC: $|z| < 0{,}5$

Soluție

a) Conform paragrafului 3.1.1, deoarece RC este exteriorul unui cerc, este de aşteptat ca x[n] să fie cauzal şi se va căuta o descompunere într-o serie de puteri negative ale lui z.

Prin împărțirea numărătorului la numitor, se obține

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \ldots$$

Comparând această relație cu (3.1), rezultă

$$x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16} \ldots \right\}$$

b) În acest caz RC este interiorul unui cerc şi, în consecință, semnalul x[n] este pur necauzal. Descompunerea se va face în puteri pozitive ale lui z, prin efectuarea împărțirii

$$\begin{array}{l|l}
1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\
\underline{-1 + 3z - 2z^2} & \\
/ \quad 3z - 2z^2 & 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \ldots \\
\quad \underline{-3z + 9z^2 - 6z^3} & \\
\quad / \quad 7z^2 - 6z^3 & \\
\quad\quad \underline{-7z^2 + 21z^3 - 14z^4} & \\
\quad\quad / \quad 15z^3 - 14z^4 & \\
\quad\quad\quad \underline{-15z^3 + 45z^4 - 30z^5} & \\
\quad\quad\quad / \quad 31z^4 - 30z^5 &
\end{array}$$

În acest caz x[n]=0 pentru n≥0. Comparând rezultatul cu (3.1), se obține

$$x[n] = \left\{ \ldots 62, 30, 14, 6, 2, 0, \underset{\uparrow}{0} \right\}$$

3.4.3. Transformata Z inversă obținută prin descompunerea în fracții simple şi folosirea tabelelor

În metoda folosirii tabelelor se urmăreşte exprimarea funcției X(z) ca o combinație liniară

$$X(z)=\alpha_1 X_1(z)+\alpha_2 X_2(z)+\ldots\alpha_k X_k(z) \tag{3.59}$$

unde $X_1(z)$, $X_2(z)$ … $X_k(z)$ sunt expresii ale căror transformate inverse $x_1[n]$, $x_2[n]$ … $x_k[n]$ se găsesc în tabelul 3.1 al perechilor semnal - transformată Z. Dacă este posibilă o astfel de descompunere, atunci x[n], transformata inversă a lui X(z), se obține folosind proprietatea de liniaritate a transformatei Z, rezultând

$$x[n]=\alpha_1 x_1[n]+\alpha_2 x_2[n]+\ldots\alpha_k x_k[n] \tag{3.60}$$

Descompunerea (3.59) este utilă în special dacă X(z) este o funcție rațională, ca în (3.29). Fără a pierde din generalitate, presupunem $a_0=1$, astfel încât (3.29) poate fi scrisă sub forma

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots a_N z^{-N}} \tag{3.61}$$

În cazul în care M≥N, X(z) poate fi întotdeauna scrisă ca suma dintre o funcție polinomială și una rațională proprie, adică

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=c_0+c_1 z^{-1}+\ldots+c_{N-M} z^{-(M-N)}+\frac{N_1(z)}{D(z)} \tag{3.62}$$

Transformata Z inversă a funcției polinomiale se poate determina simplu din definiția transformatei Z, de aceea se va considera numai cazul transformării unei funcții raționale proprii. Pentru a determina transformata Z inversă a unei funcții raționale proprii, întâi se va descompune aceasta în fracții simple, apoi se va inversa fiecare termen.

Fie X(z) o funcție rațională proprie, adică

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots a_N z^{-N}} \tag{3.63}$$

unde $a_N\neq 0$ și M<N.

Pentru simplificarea calculelor ulterioare se elimină puterile negative ale lui z prin multiplicarea numărătorului și numitorului expresiei (3.63) cu z^N, rezultând

$$X(z)=\frac{b_0 z^N+b_1 z^{N-1}+\ldots+b_M z^{N-M}}{z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots a_N} \tag{3.64}$$

Deoarece N>M, funcția

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b_0 z^{N-1}+b_1 z^{N-2}+\ldots+b_M z^{N-M-1}}{z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots a_N} \tag{3.65}$$

este, de asemenea, proprie.

Pentru a descompune în fracții simple (3.63) sau (3.65), întâi trebuie factorizat numitorul, în factori care conțin polii $p_1, p_2, \ldots p_N$ ai lui X(z).

Se disting două cazuri:

a) *Poli distincți*

Se presupune că polii $p_1, p_2, \ldots p_N$ sunt distincți şi (3.65) se descompune după cum urmează:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{A_N}{z-p_N} \tag{3.66}$$

Coeficienții A_k, $k = \overline{1,N}$ se determină din relația

$$A_k = \left.\frac{(z-p_k)X(z)}{z}\right|_{z=p_k} \tag{3.67}$$

Relațiile (3.66) şi (3.67) sunt adevărate atât pentru poli reali cât şi complecşi, cu condiția să fie distincți. Dacă coeficienții a_k, $k = \overline{1,N}$, sunt reali, în cazul în care numitorul are rădăcini complexe, acestea apar în perechi complex conjugate.

b) *Poli multipli*

Dacă X(z) are un pol de multiplicitate m, atunci numitorul conține factorul $(z-p_k)^m$ şi descompunerea în fracții simple va conține termenii

$$\frac{A_{1k}}{z-p_k} + \frac{A_{2k}}{(z-p_k)^2} + \ldots \frac{A_{mk}}{(z-p_k)^m} \tag{3.68}$$

unde

$$A_{ik} = \frac{1}{(m-i)!}\frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}}\left[\frac{(z-p_k)^m \cdot X(z)}{z}\right]_{z=p_k} \quad , \quad i = \overline{1,m} \tag{3.69}$$

După descompunerea în fracții simple, se inversează fiecare termen.

În cazul polilor distincți, relația (3.66) se scrie

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1-p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1-p_2 z^{-1}} + \ldots + A_N \frac{1}{1-p_N z^{-1}} \tag{3.70}$$

Transformata Z inversă, $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$ se obține prin inversarea fiecărui termen din (3.70) şi considerarea combinației liniare corespunzătoare. Din tabelul 3.1 rezultă

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u[n] & \text{dacă } RC: |z| > |p_k|, \text{ semnal cauzal} \\ -p_k^n u[-n-1] & \text{dacă } RC: |z| < |p_k|, \text{ semnal necauzal} \end{cases} \tag{3.71}$$

Dacă x[n] este cauzal, RC este $|z| > p_{\max}$, unde $p_{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \ldots |p_N|\}$.

În acest caz toţi termenii din (3.59) au ca rezultat componente de semnal cauzal şi semnalul x[n] este

$$x[n] = \left(A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \ldots A_N p_N^n\right) u[n] \tag{3.72}$$

Dacă toţi polii sunt distincţi, dar unii sunt complecşi, aceştia din urmă vor avea ca rezultat exponenţiale complexe. Dacă polinoamele ce reprezintă numărătorul, respectiv numitorul lui X(z) au coeficienţi reali şi dacă p_k este un pol complex atunci şi conjugatul său, p_k^*, este un pol. Coeficienţii corespunzători din dezvoltarea în fracţii simple sunt, de asemenea, complex conjugaţi, iar contribuţia acestei perechi de poli complex conjugaţi este

$$x_k[n] = [A_k (p_k)^n + A_k^* \left(p_k^*\right)^n]\, u[n]\,. \tag{3.73}$$

Mărimile A_k şi p_k pot fi exprimate în formă polară

$$A_k = |A_k| e^{j\alpha_k} \tag{3.74}$$

$$p_k = |p_k| e^{j\beta_k} \tag{3.75}$$

unde $|A_k|$ şi $|p_k|$ reprezintă modulele iar α_k şi β_k fazele componentelor A_k şi p_k.

Înlocuind (3.74) şi (3.75) în (3.73), se obţine

$$x_k[n] = |A_k| |p_k|^n \left(e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_n)}\right) u[n] \tag{3.76}$$

sau, echivalent

$$x_k[n] = 2|A_k| |p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u[n] \tag{3.77}$$

În concluzie,

$$Z^{-1}\left(\frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_k^*}{1 - p_k^* z^{-1}}\right) = 2|A_k| |p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k)\, u[n] \tag{3.78}$$

dacă RC: $|z| > |p_k|$. Fiecare pereche de poli complex conjugaţi va determina o componentă reală, armonică, cauzală, cu o anvelopă exponenţială (crescătoare pentru $|p_k| > 1$, descrescătoare pentru $|p_k| < 1$ şi constantă pentru $|p_k| = 1$). Unghiul dintre raza ce uneşte originea cu polul şi axa reală pozitivă va determina frecvenţa semnalului sinusoidal. Zerourile sau, echivalent, numărătorul lui X(z) influenţează indirect amplitudinea şi faza lui $x_k[n]$ prin coeficienţii A_k.

În cazul prezenței unui pol dublu, transformata este dată în tabelul 3.1.

$$Z^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{\left(1-pz^{-1}\right)^2}\right\}=np^n u[n]\,,\ \text{RC:}\ |z|>|p| \tag{3.79}$$

În cazul polilor multipli, reali sau complecşi, este necesară inversarea termenilor de forma $\dfrac{A}{\left(z-p_k\right)^m}$.

Pentru găsirea originalului în cazul polilor al căror ordin de multiplicitate este mai mare decât 2 se folosesc proprietățile transformatei Z.

Exemplul 3.7.

Să se determine semnalul cauzal x[n] care are transformata Z

$$X(z)=\frac{1}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2} \tag{3.80}$$

Soluție

Se descompune X(z) în fracții simple.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{A_1}{z+1}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{A_3}{(z-1)^2} \tag{3.81}$$

$$A_1=\left.\frac{(z+1)X(z)}{z}\right|_{z=-1}=\frac{1}{4} \tag{3.82}$$

$$A_3=\left.\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right|_{z=1}=\frac{1}{2} \tag{3.83}$$

$$A_2=\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right]_{z=1}=\frac{3}{4} \tag{3.84}$$

$$X(z)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \tag{3.85}$$

Se inversează fiecare termen al descompunerii, obținându-se

$$x[n]=\left[\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right]u[n] \tag{3.86}$$

Exemplul 3.8.

Să se determine transformata Z inversă a expresiei

$$X(z)=\frac{1}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}} \tag{3.87}$$

dacă

a) RC: $|z|>1$

b) RC: $|z|<0{,}5$

c) RC: $0{,}5<|z|<1$

Soluție

$$X(z)=\frac{1}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}}=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} \tag{3.88}$$

$p_1=1$

$p_2=0{,}5$.

a) În acest caz, dacă $|z|>1$ semnalul x[n] este cauzal

$$x[n]=2(1)^n\ u[n]-(0{,}5)^n u[n]=\left(2-0{,}5^n\right)u[n] \tag{3.89}$$

b) pentru $|z|<0{,}5$, semnalul x[n] este pur necauzal

$$x[n]=\left[-2+(0{,}5)^n\right]u[-n-1] \tag{3.90}$$

c) pentru $0{,}5<|z|<1$, RC este un inel circular, ceea ce implică un semnal bilateral, în care un termen corespunde unui semnal cauzal şi celălalt unui semnal necauzal. RC dată este suprapunerea regiunilor $|z|>0{,}5$ şi $|z|<1$ şi, deci, $p_2=0{,}5$ produce partea cauzală şi $p_1=1$ partea necauzală a semnalului.

$$x[n]=-2(1)^n u[-n-1]-(0{,}5)^n u[n] \tag{3.91}$$

3.5. Transformata Z unilaterală

În transformata Z bilaterală, semnalul era definit pentru întregul domeniu $-\infty<n<\infty$, ceea ce nu făcea posibilă evaluarea ieşirii sistemelor nerelaxate. Se reaminteşte că acestea erau descrise de ecuații cu diferențe cu condiții inițiale nenule. Pentru evaluarea răspunsului sistemelor discrete cu condiții inițiale nenule se foloseşte transformata Z unilaterală, după cum se va vedea în paragraful 3.6.2.

3.5.1. Definiţie şi proprietăţi

Transformata Z unilaterală a unui semnal x[n] este definită de relația

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{3.92}$$

Se foloseşte, de asemenea, notația $Z^+\{x[n]\}$ şi

$$x[n] \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

Transformata Z unilaterală diferă de cea bilaterală în limita inferioară a sumei, care este întotdeauna zero, indiferent dacă semnalul este sau nu, cauzal. Datorită acestei proprietăți, transformata Z unilaterală are următoarele caracteristici:

1. Nu conține informații despre semnalul x[n] pentru valori negative ale variabilei independente.
2. Este unică numai pentru semnale cauzale, deoarece numai acestea sunt zero pentru n<0.
3. Transformata Z unilaterală $X^+(z)$ a lui x[n] este identică cu cea bilaterală a semnalului x[n] u[n]. Deoarece x[n] u[n] este cauzal, RC a transformatei sale Z şi, deci, RC a lui $X^+(z)$ este întotdeauna exteriorul unui cerc. În concluzie, când se foloseşte transformata Z unilaterală, nu mai este necesar a se specifica RC.

Exemplul 3.9.

Să se determine transformata Z unilaterală a următoarelor semnale:

$$x_1[n] = \{1,2,5,7,0,1\} \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X_1^+(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2[n] = \{1,2,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\} \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X_2^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3[n] = \{\underset{\uparrow}{0},0,1,2,5,7,0,1\} \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X_3^+(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

$$x_4[n] = \delta[n] \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X_5^+(z) = 1$$

$$x_5[n] = \delta[n-k] \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X_5^+(z) = z^{-k}, k > 0$$

$$x_6[n] = \delta[n+k] \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} X_6^+(z) = 0,\ k > 0$$

Principala aplicație a transformatei Z unilaterale vizează analiza sistemelor discrete descrise de ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți cu condiții inițiale nenule. În general, astfel de sisteme au implementare recursivă şi se presupun cauzale. În aceste condiții ieşirea se calculează pentru $n \ge 0$, în condițiile inițiale prescrise. În aplicarea transformatei Z unilaterale la probleme de acest tip, proprietățile de liniaritate şi deplasare în timp sunt de importanță deosebită. Proprietatea de liniaritate pentru transformata Z unilaterală este identică cu proprietatea de liniaritate pentru transformata Z bilaterală, în schimb, cea de deplasare în timp este diferită.

Proprietatea de deplasare în timp

Caz I - întârziere

Dacă $x[n] \xleftrightarrow{Z^+} X^+(z)$

atunci

$$x[n-k] \xleftrightarrow{Z^+} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{n}\right], \quad k > 0, \tag{3.93}$$

şi, dacă x[n] este cauzal, atunci

$$x[n-k] \xleftrightarrow{Z^+} z^{-k}X^+(z) \tag{3.94}$$

Demonstrație

Aplicând definiția (3.92), se obține

$$Z^+\{x[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} x[m]z^{-(m+k)} =$$

$$= z^{-k}\left[\sum_{m=-k}^{-1} x[m]z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}\right] = z^{-k}\left[\sum_{m=-1}^{-k} x[m]z^{-m} + X^+(z)\right], \tag{3.95}$$

unde $m = n - k$

Dacă în (3.95) se înlocuieşte m cu -n, rezultă (3.93).

Caz II - anticipare

Dacă $x[n] \xleftrightarrow{Z^+} X^+(z)$

atunci $$x[n+k] \xleftrightarrow{Z^+} z^{k}\left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}\right], \quad k > 0 \tag{3.96}$$

Demonstrație

$$Z^+\{x[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n} = \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-(m-k)} =$$

$$= z^k\left[\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m}\right] = z^k\left[X^+(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m}\right], \quad (3.97)$$

unde $m = n + k$

Dacă în (3.97) se înlocuieşte m cu -n, rezultă (3.96).

Aplicații ale proprietății de deplasare în timp

Transformarea diferențelor

Diferența de ordinul întâi pentru o secvență se defineşte prin relația

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n] \quad (3.98)$$

Similar cu diferența de ordinul întâi, se defineşte diferența de ordinul al doilea, prin relația

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] \quad (3.98')$$

În general,

$$\Delta^k x[n] = \Delta^{k-1} x[n+1] - \Delta^{k-1} x[n] \quad (3.98'')$$

Dacă $X^+(z) = Z^+\{x[n]\}$ există, atunci există şi $Z^+\{\Delta^k x[n]\}$ şi aceasta este

$$Z^+\{\Delta^k x[n]\} = (z-1)^k X^+(z) - z\sum_{i=0}^{k-1}(z-1)^{k-i-1}\Delta^i x[0] \quad (3.99)$$

unde $\Delta^i x[0]$ este diferența de ordinul "i" pentru n=0 şi $\Delta^0 x[0] = x[0]$.

Aplicând transformata Z unilaterală relației (3.98), se obține

$$\begin{aligned} Z^+\{\Delta x[n]\} &= Z^+\{x[n+1]\} - Z^+\{x[n]\} = \\ &= z\left(X^+(z) - x[0]\right) - X^+(z) = (z-1)X^+(z) - zx[0] \end{aligned} \quad (3.100)$$

Relația (3.99) se obține prin aplicarea transformatei Z unilaterale relației (3.98''), exprimată în funcție de diferențele de ordin inferior. Relația (3.99) poate fi folosită pentru obținerea transformatei Z a secvențelor pentru care $\Delta^k x[n] = 0$ pentru un anumit $k \geq 1$. Din (3.99), X(z) se poate scrie sub forma

$$X^+(z) = \frac{z}{z-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\Delta^i x[0]}{(z-1)^i} + \frac{1}{(z-1)^k}Z^+\{\Delta^k x[n]\} \quad (3.101)$$

Exemplul 3.10.

Să se determine transformata Z pentru semnalele

a) $x_1[n] = C_n^1$

b) $x_2[n]=C_n^2$

Soluție

a) $x_1[n]=C_n^1=n$. Pentru această secvență, $\Delta x[n]=n+1-n=1$,

$\Delta^2 x[n]=\Delta x[n+1]-\Delta x[n]=0$. Toate diferențele de ordin mai mare decât 1 sunt, de asemenea, zero. Prin înlocuirea acestor valori în (3.101), se obține

$$Z\{n\}=\frac{z}{(z-1)^2} \tag{3.102}$$

b) $x_2[n]=C_n^2=\dfrac{(n-1)n}{2}$, pentru care

$\Delta x_2[n]=C_{n+1}^2-C_n^2=\dfrac{(n+1)n}{2}-\dfrac{n(n-1)}{2}=n,\ \Delta^2 x_2[n]=1$. Diferențele de ordin superior lui 2 sunt egale cu zero. Aplicând (3.101), se obține

$$Z\left\{C_n^2\right\}=\frac{z}{(z-1)^3} \tag{3.103}$$

Similar, se poate verifica relația generală $Z\left\{C_n^m\right\}=\dfrac{z}{(z-1)^{m+1}}$.

Transformarea sumelor parțiale

Fie suma parțială $\sum_{k=0}^{n-1}x[k]$, generată de semnalul $x[n]$. Dacă $Z^+\{x[n]\}=X(z)$ există pentru $|z|>r$, atunci transformata sumei parțiale de asemenea există și, pentru $|z|>\max\{r,1\}$, aceasta este

$$Z^+\left\{\sum_{k=0}^{n-1}x[k]\right\}=\frac{X(z)}{z-1} \tag{3.104}$$

Demonstrație

$\sum_{k=0}^{n-1}x[k]=\sum_{k=0}^{n}x[k]-x[n]$. Dacă se notează $\sum_{k=0}^{n}x[k]=y[n]$, rezultă $y[n]-y[n-1]=x[n]$. Aplicând transforma Z^+ ultimei relații și ținând cont că și $y[n]$ este cauzal, se obține $Y(z)=\dfrac{z}{z-1}X(z)$. Dar

$Y(z) = Z\left\{\sum_{k=0}^{n} x[k]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{n-1} x[k]\right\} + X(z)$. Înlocuind pe Y(z) în ultima relație, rezultă (3.104).

Exemplul 3.11.

Să se determine transformata Z^+ a secvenței $\Delta\sum_{k=0}^{n-1} x[k]$.

Soluție. $\Delta\sum_{k=0}^{n-1} x[k] = \sum_{k=0}^{n} x[k] - \sum_{k=0}^{n-1} x[k] = x[n]$. Aplicând transformata Z acestei expresii, rezultă $Z^+\left\{\Delta\sum_{k=0}^{n-1} x[k]\right\} = X(z)$.

Exemplul 3.12.

Să se determine transformata Z a sumei $\sum_{k=0}^{n-1} k$. Din relația (3.102) se știe că $Z\{n\} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$. Aplicarea directă a relației (3.104) conduce la rezultatul dorit $Z^+\left\{\sum_{k=0}^{n-1} k\right\} = \dfrac{z}{(z-1)^3}$. Se constată că s-a obținut același rezultat ca în (3.103), ceea ce, datorită unicității transformatei Z unilaterale pentru semnale cauzale, conduce la concluzia că și originalele sunt egale, adică $\sum_{k=0}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2$, relație, evident, adevărată.

Teorema valorii finale

Dacă $x[n] \xleftrightarrow{Z^+} X^+(z)$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X^+(z) \tag{3.105}$$

Această teoremă este utilă în stabilirea alurii asimptotice a semnalului x[n] când se cunoaşte numai transformata sa $X^+(z)$, iar inversarea acesteia este complicată.

Transformata diferenței x[n+1]-x[n] a unui semnal cauzal este

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(x[n+1]-x[n]\big)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}x[n+1]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty}x[m]z^{-(m-1)} -$$

$$- X^{+}(z) = z\left(\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m} - x[0]\right) - X^{+}(z) = (z-1)X^{+}(z) - zx[0]$$

Trecând la limită pentru z→1 se obține

$$\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\big(x[n+1]-x[n]\big)z^{-n} = \lim_{z\to 1}\big(z-1\big)X^{+}(z) - x[0] \qquad (3.106)$$

După trecerea la limită, membrul stâng al egalității devine

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\big(x[n+1]-x[n]\big)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\big(x[n+1]-x[n]\big) = \\ &\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\big(x[n+1]-x[n]\big) = \lim_{k\to\infty}\big(x[k+1]-x[0]\big) = x[\infty]-x[0]\end{aligned} \qquad (3.107)$$

Comparând (3.106) cu (3.107), rezultă

$$x[\infty] = \lim_{k\to\infty}x[k] = \lim_{z\to 1}\big(z-1\big)X^{+}(z)$$

numită şi *teorema valorii finale* a unui semnal cauzal. Dacă semnalul este cauzal, regiunea de convergență este exteriorul unui cerc. Dacă cercul unitate este în domeniul de convergență, $X^{+}(z)\big|_{|z|=1}$ are valoare finită şi, deci, $x[\infty]=0$.

3.6. Analiza SDLIT în domeniul z

În paragraful 3.3.3. s-a definit funcția de transfer sau de sistem a unui SDLIT şi s-a stabilit relația sa cu răspunsul la impuls şi ecuația cu diferențe care descrie sistemul, folosindu-se transformata Z bilaterală, caz în care indicarea regiunii de convergență este obligatorie. Dacă sistemul şi semnalul de intrare sunt cauzale, relația (3.42) se scrie corespunzător pentru transformate Z unilaterale. În continuare se va prezenta folosirea funcției de sistem în determinarea răspunsului sistemului la o excitație arbitrară. Analiza va avea drept obiect sisteme poli-zerouri reprezentate de ecuații cu diferențe cu coeficienți constanți cu condiții inițiale arbitrare.

3.6.1. Răspunsul sistemelor discrete descrise de funcții de transfer raționale în condiții inițiale nule

Fie un sistem poli-zerouri descris de ecuația cu diferențe (2.114) şi funcția de transfer corespunzătoare dată de (3.45). Funcția de sistem H(z) este raportul a două polinoame *B(z)/A(z).* Mai mult, se presupune că şi semnalul de intrare are o transformată Z exprimată printr-o funcție rațională, de forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \tag{3.108}$$

Această presupunere nu este foarte restrictivă, deoarece cele mai multe semnale de interes practic au transformata Z de această formă.

Dacă sistemul este relaxat, condițiile inițiale ale sistemului sunt nule, adică y[-1]= y[-2]=…= y[-N]=0 şi transformata Z a ieşirii este

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)\cdot N(z)}{A(z)\cdot Q(z)} \tag{3.109}$$

Se presupune că sistemul conține polii simpli p_1 p_2 … p_N şi transformata Z a semnalului de intrare are, de asemenea, polii simpli q_1 q_2 … q_L unde $p_k \neq q_m$ pentru toți k=1,2,… N şi m=1,2,… L. Dacă zerourile polinoamelor de la numărător B(z) şi N(z) nu coincid cu polii $\{p_k\}$ şi $\{q_k\}$, astfel încât nu există anulare poli zerouri, atunci, dezvoltarea în fracții simple a lui Y(z) este de forma

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}} \tag{3.110}$$

Transformarea Z inversă conduce la semnalul cauzal de ieşire

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u[n] + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u[n] \tag{3.111}$$

Se observă că ieşirea y[n] este compusă din două părți. Prima parte este funcție de polii $\{p_k\}$ ai sistemului şi se numeşte *răspuns natural* , $y_{nr}[n]$, al sistemului.

$$y_{nr}[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u[n] \tag{3.112}$$

Partea a doua a răspunsului y[n] este funcție de polii $\{q_k\}$ ai semnalului de intrare şi se numeşte *răspuns forțat,* $y_{fr}[n]$, al sistemului.

$$y_{fr}[n]=\sum_{k=1}^{L}Q_k(q_k)^n u[n] \tag{3.113}$$

Coeficienţii A_k şi Q_k sunt funcţii de ambele seturi de poli $\{p_k\}$ şi $\{q_k\}$. Condiţiile iniţiale fiind nule, relaţia (3.111) reprezintă răspunsul de stare zero al sistemului.

Dacă X(z) şi H(z) au unul sau mai mulţi poli în comun sau dacă X(z) şi/sau H(z) conţin poli multipli, atunci Y(z) va avea poli multipli şi, în consecinţă, dezvoltarea în fracţii simple a lui Y(z) va conţine termeni de forma $1/(1-p_i z^{-1})^k$, k=1,2,…m, unde m este ordinul polului p_i. Inversarea acestor factori va conduce la termeni de forma $n^{k-1}p_i^n$ în ieşirea y[n] [23].

3.6.2. Răspunsul sistemelor discrete descrise de funcţii de transfer raţionale în condiţii iniţiale nenule

În acest caz se presupune că semnalul de intrare x[n] se aplică sistemului poli-zerouri la n=0, adică semnalul de intrare s-a presupus cauzal. Se presupun, de asemenea, condiţiile iniţiale y[-1], y[-2] … y[-N] nenule pentru sistem.

Deoarece intrarea este un semnal cauzal şi deoarece se doreşte determinarea ieşirii y[n] pentru n≥0, se va folosi transformata Z unilaterală, care permite utilizarea condiţiilor iniţiale.

Conform relaţiei (3.93), transformata Z unilaterală a relaţiei (2.114) este

$$Y^+(z)=-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}\left[Y^+(z)+\sum_{n=1}^{k}y[-n]z^n\right]+\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}X^+(z) \tag{3.114}$$

Deoarece x[n] este cauzal, se poate înlocui $X^+(z)$ = X(z) şi (3.114) devine

$$Y^+(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}X(z)-\frac{\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}\sum_{n=1}^{k}y[-n]z^n}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}= \tag{3.115}$$

$$=H(z)\cdot X(z)+\frac{N_0(z)}{A(z)}$$

unde

$$N_0(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n \tag{3.116}$$

Din (3.115) se observă că transformata Z a ieşirii sistemului cu condiții inițiale nenule poate fi împărțită în două părți. Prima parte este transformata Z a răspunsului de stare zero al sistemului

$$Y_{zs}(z) = H(z) \cdot X(z) \tag{3.117}$$

iar a doua componentă este rezultatul condițiilor inițiale nenule şi reprezintă transformata Z a răspunsului când intrarea este nulă.

$$Y_{zi}^{+}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} \tag{3.118}$$

Transformata Z a răspunsului total este suma acestor două componente. Răspunsul sistemului în domeniul timp se obține prin determinarea transformatelor Z inverse pentru $Y_{zs}(z)$ şi $Y_{zi}^{+}(z)$ şi adunarea rezultatelor, adică

$$y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] \tag{3.119}$$

Deoarece numitorul lui $Y_{zi}^{+}(z)$ este A(z), polii săi sunt p_1 p_2 … p_N şi $Y_{zi}^{+}(z)$ se poate descompune în fracții simple, sub forma

$$Y_{zi}^{+}(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{D_k}{1 - p_k z^{-1}} \tag{3.120}$$

unde D_k sunt coeficienții descompunerii în fracții simple.
În consecință, răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u[n] \tag{3.121}$$

Acesta poate fi adăugat la (3.111) pentru a forma răspunsul total al sistemului şi se obține

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k^{'} (p_k)^n u[n] + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u[n] \tag{3.122}$$

unde

$$A_k^{'} = A_k + D_k \tag{3.123}$$

Cele prezentate anterior arată clar că efectul condițiilor inițiale este de modificare a răspunsului natural al sistemului prin modificarea coeficienților $\{A_k\}$. Acestea nu introduc noi poli şi nu influențează răspunsul forțat al sistemului. Analiza efectuată a luat în considerație numai cazul polilor simpli, indiferent dacă aceştia sunt reali şi/sau complex conjugați. Aceleaşi concluzii rezultă şi în cazul polilor multipli, reali şi/sau complex conjugați.

Exemplul 3.13.

Să se determine răspunsul la semnalul de intrare $x[n]=2^n u[n]$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe

$$y[n]=(5/6)y[n-1]-(1/6)y[n-2]+x[n]$$

în următoarele condiții inițiale:

a) y[-1] = y[-2] = 0
b) y[-1] =1; y[-2] = 2

Soluție. Funcția de transfer a sistemului este

$$H(z)=\frac{1}{1-(5/6)z^{-1}+(1/6)z^{-2}}$$

Sistemul are doi poli $p_1=1/2$ şi $p_2=1/3$.

Transformata Z a intrării este

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$Y_{ZS}(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{\left(1-(1/2)z^{-1}\right)\left(1-(1/3)z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}=$$

$$=\frac{-1}{1-(1/2)z^{-1}}+\frac{2/5}{1-(1/3)z^{-1}}+\frac{8/5}{1-2z^{-1}}$$

şi $y_{zs}[n]=[-(1/2)^n+(2/5)(1/3)^n+(8/5)2^n]u[n]$

a) deoarece condițiile inițiale sunt nule, în acest caz y[n] = y_{zs}[n].
b) pentru condițiile inițiale y[-1] =1 şi y[-2] = 2, în transformata Z apare componenta suplimentară

$$Y_{zi}(z)=\frac{N_0(z)}{A(z)}=\frac{(1/2)-(1/6)z^{-1}}{1-(5/6)z^{-1}+(1/6)1z^{-2}}=\frac{1/2}{1-(1/2)z^{-1}}+\frac{0}{1-(1/3)z^{-1}}$$

În consecință, răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n]=(1/2)(1/2)^n u[n]$$

iar răspunsul total are transformata Z

$$Y(z)=Y_{zs}(z)+Y_{zi}(z)=\frac{(-1/2)}{1-(1/2)z^{-1}}+\frac{2/5}{1-(1/3)z^{-1}}+\frac{8/5}{1-2z^{-1}}$$

Aplicând transformata Z inversă, rezultă

$$y[n]=[(-1/2)(1/2)^n+(2/5)(1/3)^n+(8/5)2^n]u[n].$$

3.6.3. Răspunsul tranzitoriu şi permanent al SDLIT

După cum s-a arătat în paragraful (3.6.1), răspunsul unui sistem la un semnal de intrare dat poate fi separat în două componente: răspunsul natural şi răspunsul forțat.

Răspunsul natural al unui sistem cauzal este dat de (3.112). Dacă $|p_k| < 1$ pentru toți k, atunci $y_{nr}[n]$ descreşte la zero pentru $n \to \infty$. În acest caz răspunsul natural este un *răspuns tranzitoriu*. Viteza cu care semnalul descrește la zero depinde de poziția polilor. Cu cât un pol este mai apropiat de origine, acesta determină o descreștere mai rapidă, iar dacă polul este plasat în apropierea cercului unitate (dar, evident, în interior), descreșterea este mai lentă și răspunsul tranzitoriu va persista mai mult timp.

Răspunsul forțat este dat de (3.113). Dacă toți polii semnalului de intrare sunt în interiorul cercului unitate, $y_{fr}[n]$ va descrește la zero pentru $n \to \infty$, ca în cazul răspunsului natural. Dacă, în schimb, semnalul de intrare este o sinusoidă cu polii pe cercul unitate, răspunsul forțat este, de asemenea, o sinusoidă care persistă pentru $n \geq 0$, caz în care răspunsul forțat se numește *răspuns permanent* al sistemului. Aşadar, pentru ca sistemul să prezinte un răspuns permanent pentru $n \geq 0$, intrarea trebuie să persiste pentru toți $n \geq 0$.

3.6.4. Cauzalitatea și stabilitatea SDLIT exprimate în funcție de funcția de sistem

Un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal este cel al cărui răspuns la impuls $h[n]$ satisface condiția

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \tag{3.124}$$

De asemenea, s-a arătat că RC pentru transformata Z a unui semnal cauzal este exteriorul unui cerc. În consecință, un SDLIT este cauzal, dacă și numai dacă RC a funcției sale de transfer este exteriorul unui cerc de rază $r < \infty$, incluzând punctul $z = \infty$.

Stabilitatea unui SDLIT poate fi exprimată în funcție de caracteristicile funcției de transfer. Se reaminteşte (paragraful 2.4.7) că o condiție necesară și suficientă pentru ca un SDLIT să fie stabil în sens MIME este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \qquad (3.125)$$

Această condiție implică faptul ca cercul unitate să fie conținut în RC a lui H(z). Într-adevăr, deoarece

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \qquad (3.126)$$

rezultă

$$|H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \left| z^{-n} \right| \qquad (3.127)$$

Prin evaluarea pe cercul unitate $(|z| = 1)$, se obține

$$|H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \qquad (3.128)$$

În concluzie, dacă un sistem este stabil în sens MIME, cercul unitate este inclus în RC a lui H(z). Se poate demonstra că reciproca este de asemenea adevarată și, prin urmare, un SDLIT este stabil MIME dacă și numai dacă RC a funcției de transfer include cercul unitate.

Condițiile pentru cauzalitate și stabilitate sunt diferite și unele nu le implică pe celelalte. De exemplu, un sistem cauzal poate fi stabil sau nu, așa cum și un sistem necauzal poate fi stabil sau nu. Similar, atât sistemele stabile cât și cele instabile pot fi cauzale sau nu.

Pentru un sistem cauzal se pot stabili condiții de stabilitate având în vedere că RC a funcției de transfer este exteriorul unui cerc de raza r. Pentru un sistem stabil, RC trebuie să conțină cercul unitate. În consecință, un sistem stabil și cauzal trebuie să aibă o funcție de sistem care converge pentru $|z| > r < 1$. Deoarece RC nu poate conține nici un pol al lui $H(z)$, rezultă că un SDLIT cauzal este stabil în sens MIME, dacă și numai dacă toți polii lui $H(z)$ sunt în interiorul cercului unitate.

Exemplul 3.14.

Un SDLIT este caracterizat de funcția de transfer

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3{,}5z^{-1} + 1{,}5z^{-2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

Să se specifice RC a lui $H(z)$ și să se determine $h[n]$ în următoarele condiții:

a) sistemul este stabil;

b) sistemul este cauzal;
c) sistemul este pur necauzal.

Soluție. Sistemul are polii la $z = \frac{1}{2}$ și $z = 3$.

a) Deoarece sistemul este stabil, RC trebuie să includă cercul unitate și, deci, $\frac{1}{2} < |z| < 3$. În consecință, $h[n]$ este necauzal și

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(3)^n u[-n-1].$$

b) Deoarece sistemul este cauzal, $|z| > 3$, caz în care

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2(3)^n u[n].$$

Acest sistem este instabil (conține pe $(3)^n u[n]$).

c) daca sistemul este pur necauzal, RC este $|z| < 0{,}5$, și deci

$$h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(3)^n\right] u[-n-1].$$

Acest sistem este instabil(conține pe $(1/2)^n \ u[-n-1]$).

3.6.5. Anulări poli zerouri

Dacă o transformată Z conține un pol în același loc pe care este plasat un zerou, polul este anulat de zero și, în consecință, termenul care conține polul respectiv dispare din transformata Z. Anulări poli-zerouri pot apărea fie în functia de transfer a sistemului, fie în produsul dintre aceasta și transformata Z a semnalului de intrare. În al doilea caz se spune că un pol al sistemului este anulat de un zero al semnalului de intrare sau invers. Aceasta înseamnă că, printr-o alegere potrivită a zerourilor semnalului de intrare, se pot anula unul sau mai mulți poli ai răspunsului sistemului, ceea ce ar putea fi folosit în practică pentru stabilizarea unui sistem.

Dacă zeroul este plasat foarte aproape de pol, dar nu exact în poziția polului, acesta va avea o contribuție în răspuns. În practică anulări neexacte poli-zerouri apar ca rezultat al preciziei numerice finite folosite în reprezentarea coeficienților sistemului. În consecință, dacă numărul de biți folosiți în reprezentarea mărimilor nu este suficient, nu se va încerca stabilizarea unui sistem instabil prin plasarea unui zerou în semnalul de intrare pe acea poziție.

3.6.6. Poli multipli și stabilitate

Din cele prezentate anterior, s-a observat că o condiție necesară și suficientă pentru ca un SDLIT cauzal să fie stabil în sens MIME este ca toți polii săi să fie conținuți în interiorul cercului unitate.

În continuare se va analiza stabilitatea sistemelor în funcție de poziția polilor sistemului și ai semnalului de intrare. Se disting următoarele cazuri:

1. Atât polii sistemului p_k cât și cei ai semnalului de intrare q_j sunt conținuți în interiorul cercului unitate, adică $|p_k|<1$, k=1...N, $|q_j|<1$, j=1...L.

Dacă toți polii p_k și q_j sunt distincți și $p_k \neq q_j$, atunci atât răspunsul natural, cât și cel forțat sunt limitate și sistemul este stabil. Dacă polii sistemului și ai semnalului nu sunt neapărat simpli sau semnalul de intrare conține unul sau mai mulți poli care coincid cu ai sistemului, atunci ieșirea sistemului va conține poli multipli, care vor avea ca rezultat secvențe de ieșire care conțin termeni de forma $A_k n^b p_k^n u[n]$ unde $0 \leq b \leq m-1$ și m este ordinul de multiplicitate a polului p_k. Dacă $|p_k|<1$, acești termeni descresc spre 0 pentru $n \to \infty$, deoarece p_k^n domină pe n^b. În consecință, nici un semnal de intrare limitat nu va produce o ieșire nelimitată, dacă polii sistemului sunt în interiorul cercului unitate.

2. Polii sistemului sunt strict în interiorul cercului unitate, $|p_k|<1$, iar semnalul de intrare are poli atât în interiorul cecului unitate, cât și pe cercul unitate, $|q_j| \leq 1$.

Dacă semnalul conține un pol real simplu (z=1 sau z=-1) sau doi poli reali distincți (z=1 și z=-1) sau o pereche de poli complex conjugați pe cercul unitate, restul fiind conținuți în interiorul acestuia, atât răspunsul natural, cât și cel forțat sunt limitate, cei doi poli complecși combinându-se într-o componentă sinusoidală de semnal în răspunsul forțat al sistemului. Evident, dacă semnalul are pe cercul unitate cel puțin un pol real dublu sau o pereche dublă de poli complex conjugați, răspunsul devine nelimitat și sistemul este instabil.

3. Polii semnalului de intrare sunt strict în interiorul cercului unitate $|q_j| < 1$, iar sistemul are poli atât în interiorul cecului unitate, cât și pe cercul unitate $|p_k| \le 1$.

Dacă pe cercul unitate există un singur pol real (z=1 sau z=-1) sau doi poli reali distincți (z=1 și z=-1) sau o pereche de poli complex conjugați ai sistemului, răspunsul natural este limitat și sistemul este stabil. Dacă sistemul are pe cercul unitate poli reali sau complex conjugați multipli, răspunsul său devine nelimitat și sistemul instabil.

4. Atât polii sistemului cât și ai semnalului de intrare se găsesc fie în interiorul cercului unitate, fie pe cercul unitate, adică $|p_k| \le 1$ și $|q_j| \le 1$.

Dacă polii sistemului și ai semnalului de intrare de pe cercul unitate sunt simpli și nu coincid, răspunsul sistemului este limitat și sistemul stabil. Dacă, însă, un pol al sistemului coincide cu un pol al semnalului de pe cercul unitate, în răspunsul sistemului va apărea o componentă de forma $A_k n p_k^n u[n]$, care este nelimitată. Cu atât mai mult, dacă polii sunt multipli, răspunsul va fi nelimitat, conținând termeni de forma $A_k n^b p_k^n u[n]$ unde $0 \le b \le m-1$ și m este ordinul de multiplicitate a polului p_k de pe cercul unitate.

Singurele sisteme de interes care au poli pe cercul unitate sunt oscilatoarele, despre care se spune că sunt *marginal stabile*.

Următorul exemplu ilustrează situșia din cazul 4.

Exemplul 3.15.

Să se determine răspunsul sistemului cauzal, descris de ecuația cu diferențe

$y[n] = y[n-1] + x[n]$, la treapta unitate.

Soluție. Funcția de sistem a sistemului este $H(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$, care conține polul $z=1$ pe cercul unitate. Transformata Z a semnalului de intrare $x[n] = u[n]$ este $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ care, de asemenea, conține un pol la $z=1$.

Transformata Z a semnalului de ieșire este

$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$, care conține un pol dublu la $z = 1$.

Transformata Z inversă a lui $Y(z)$ este

$$y[n] = Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})^2}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1-z^{-1}+z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right\} =$$

$$= Z^{-1}\left\{\frac{1-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right\} = u[n] + nu[n] = (n+1)u[n]$$

care, evident, este o secvență nelimitată și, în consecință, sistemul este instabil. Acest exemplu ilustrează faptul că stabilitatea MIME impune ca polii sistemului să se găsească strict în interiorul cercului unitate.

3.6.7. Stabilitatea sistemelor de ordinul II

Ecuațiile liniare cu diferențe sau funcțiile de sistem corespunzătoare ale sistemelor discrete au de obicei coeficienți reali, ceea ce determină ca polii sistemului să fie reali și/sau complex conjugați. Pentru a evita lucrul cu valori complexe, contribuția polilor complex conjugați se combină în expresii de ordinul al doilea cu coeficienți reali, motiv pentru care sistemele de ordinul doi formează blocurile constructive de bază folosite în realizarea sistemelor de ordin superior și vor fi analizate în detaliu.

Fie un sistem cauzal cu doi poli, descris de ecuația cu diferențe de ordinul doi

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] \tag{3.129}$$

Funcția de transfer este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{3.130}$$

și sistemul are două zerouri în origine $z_1 = z_2 = 0$ și doi poli

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^{\,2} - 4a_2}{4}} \tag{3.131}$$

Sistemul este stabil în sens MIME, dacă polii sunt în interiorul cercului unitate, adică dacă $|p_2| < 1$ și $|p_1| < 1$. Aceste condiții impun anumite relații între coeficienții a_1 și a_2, care vor fi determinate atât pentru cazul în care polii sunt complex conjugați, cât și reali.

Dacă $a_1^2 < 4a_2$, polii sunt complex conjugați $p_{1,2} = \rho e^{j\theta}$, și condiția de modul subunitar pentru aceștia conduce la

$$\rho = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}}{2} = \sqrt{a_2} < 1;\ a_1^2 < 4a_2 \qquad (3.132)$$

ceea ce este echivalent cu relația

$$|a_2| < 1, \quad a_2 > \frac{a_1^2}{4} \qquad (3.133)$$

Înlocuind (3.131) în condiția $\left|p_{1,2}\right| < 1$, în cazul polilor reali, se obține

$$-1 < -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1{}^2 - 4a_2}{4}} < 1 \qquad (3.134)$$

condiție ce echivalează cu patru inegalități ce trebuie îndeplinite simultan. Prin rezolvarea acestora rezultă a_2>-a_1-1 și a_2> a_1-1, relații ce pot fi reunite în

$$\left|a_1\right| < 1 + a_2 \qquad (3.135)$$

Cu alte cuvinte, un sistem cu doi poli este stabil, dacă și numai dacă coeficienții a_1 și a_2 satisfac condițiile (3.133) și (3.135). Aceste condiții definesc o regiune în planul coeficienților (a_1, a_2) în formă de triunghi, după cum este arătat în figura 3.7.

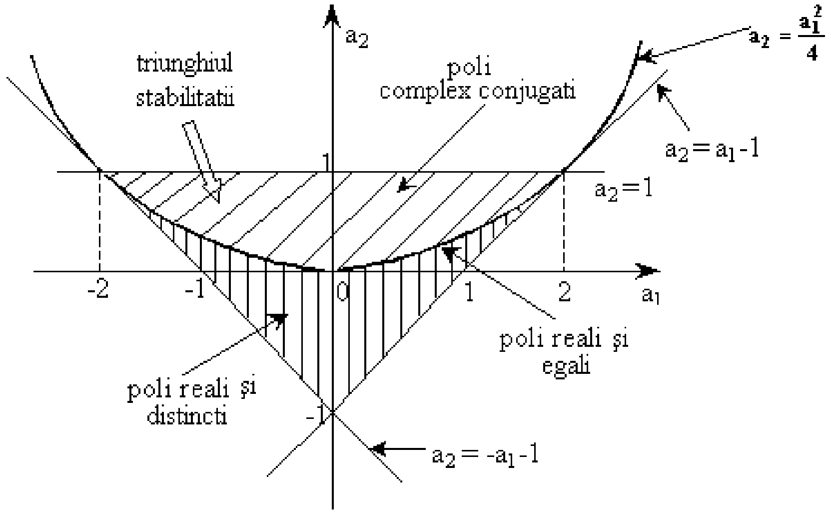

Figura 3.7. Regiunea de stabilitate în planul coeficienților (a_1, a_2) pentru un sistem de ordinul II

Sistemul este stabil dacă și numai dacă punctul de coordonate (a_1, a_2) este în interiorul triunghiului, numit triunghiul stabilității. Caracteristicile unui sistem cu doi poli depind de localizarea acestora sau de poziția punctului (a_1, a_2) în triunghiul stabilității. Polii sistemului pot fi reali sau complecși, după valoarea discriminantului $\Delta = a_1^2 - 4a_2$. Parabola $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$ împarte triunghiul stabilității în două regiuni. Regiunea de sub parabolă corespunde polilor distincți reali. Punctele de pe parabolă corespund polilor reali dubli și regiunea de deasupra parabolei corespunde polilor complex conjugați.

a) *poli reali și distincți* ($a_1^2 > 4a_2$)

Deoarece $p_1 \neq p_2$ și reali, funcția de transfer a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} \tag{3.136}$$

unde

$$A_1 = \frac{b_0 p_1}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = -\frac{b_0 p_2}{p_1 - p_2}, \tag{3.137}$$

răspunsul la impuls fiind

$$h[n] = \frac{b_0}{p_1 - p_2}(p_1^{n+1} - p_2^{n+1})u[n] \tag{3.138}$$

adică diferența a două exponențiale descrescătoare.

b) *poli reali și egali* ($a_1^2 = 4a_2$)

În acest caz $p_1 = p_2 = -\frac{a_1}{2}$ și funcția de transfer este

$$H(z) = \frac{b_0}{\left(1 - p z^{-1}\right)^2} \tag{3.139}$$

căreia îi corespunde răspunsul la impuls

$$h(n) = b_0 [n+1] p^n u[n] \tag{3.140}$$

adică produsul dintre un semnal rampă și o exponențială descrescătoare, care va avea o alură descrescătoare pentru un n suficient de mare.

c) *poli complex conjugați* ($a_1^2 < 4a_2$)

Deoarece polii sunt complex conjugați, funcția de transfer este

$$H(z)=\frac{A}{1-pz^{-1}}+\frac{A^*}{1-p^*z^{-1}}=\frac{A}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{A^*}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}} \tag{3.141}$$

unde $p=r\,e^{j\omega_0}$ cu $0\le\omega_0\le\pi$.

$$A=\frac{b_0 p}{p-p^*}=\frac{b_0 e^{j\omega_0}}{j\cdot 2\sin\omega_0},\ A^*=-\frac{b_0 p^*}{p-p^*}=-\frac{b_0 e^{-j\omega_0}}{j\cdot 2\sin\omega_0} \tag{3.142}$$

Răspunsul la impuls al sistemului cu poli complex conjugați este

$$h[n]=\frac{b_0 r^n}{\sin\omega_0}\sin(n+1)\omega_0 u[n] \tag{3.143}$$

Acesta are o comportare oscilatorie cu o anvelopă exponențială descrescătoare pentru $r<1$. Unghiul ω_0 determină frecvența de oscilație iar distanța față de origine a polului determină viteza de descreștere a exponențialei. Evident, cu cât r este mai aproape de cercul unitate, descreșterea este mai lentă, și cu cât r este mai apropiat de origine, descreșterea este mai rapidă.

3.7. Probleme propuse

3.1. Să se determine transformata $\boldsymbol{Z}$ a următoarelor semnale și să se indice regiunea de convergență.

a) $x_a[n]=[3, 0, 0, 0, 0, 6, \underset{\uparrow}{1}, -4]$;

b)

c) $x_b[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\ge 5\\ 0, & n<4\end{cases}$;

d) $x_c[n]=(n+1)u[n]$;

e) $x_d[n]=\left(a^n+a^{-n}\right)u[n]$, $a\in R$;

f) $x_e[n]=\left(n\,a^n\sin\omega_0 n\right)u[n]$;

g) $x_f[n]=\left(n\,a^n\cos\omega_0 n\right)u[n]$;

h) $x_g[n]=\frac{1}{2}\left(n^2+n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1]$;

i) $x_h[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n, & n\ge 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n<0\end{cases};$

j) $x_i[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n-2^n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases};$

k) $x_j[n]=x_h[n+4]$;

l) $x_k[n]=x_h[-n]$.

3.2. Să se determine transformata ***Z*** a semnalelor:

a) $x[n]=\alpha^{|n|}$, $|\alpha|<1$;

b) $x[n]=1$, $-\infty<n<\infty$;

3.3. Folosind metoda descompunerii în serii de puteri, să se determine transformata Z inversă pentru semnalul

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

dacă

a) $x[n]$ este cauzal;

b) $x[n]$ este necauzal.

3.4. Să se determine semnalul cauzal $x[n]$ a cărui transformată Z este $X(z)=\frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2}$.

3.5. Fie $x[n]$ un semnal care admite transformată Z. Să se determine, în funcție de X(z), transformata Z a următoarelor semnale:

a) $x_1[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{2}\right], \textit{pentru n par}\\ 0, \textit{in rest}\end{cases}$

b) $x_2[n] = x[2n]$.

3.6. Să se determine semnalul cauzal $x[n]$, dacă transformata sa Z este:

a) $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

b) $X(z) = \dfrac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$

c) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

d) $X(z) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)}$

e) X(z) este specificată de diagrama poli-zerouri

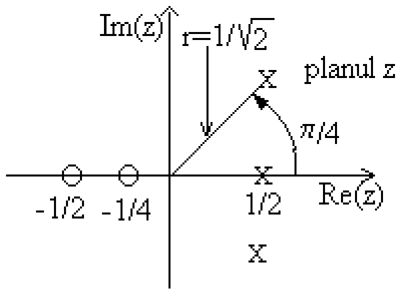

Figura p3.6

3.7. Să se determine toate semnalele posibile $x[n]$ care pot avea transformata Z

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(3-z^{-1}\right)}$$

3.8. Să se determine convoluția următoarelor perechi de semnale cu ajutorul transformatei Z:

a) $x_1[n] = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n u[n-1]$; $\qquad x_2[n] = \left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)u[n]$

b) $x_1[n] = u[n]$; $\qquad\qquad$ $x_2[n] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

c) $x_1[n] = nu[n]$; $\qquad\qquad$ $x_2[n] = 2^n u[n-1]$

3.9. Folosind proprietățile transformatei Z să se determine originalul pentru următoarele transformate:

a) X(z) = $\log(1-2z)$ $\qquad |z| < \frac{1}{2}$

b) X(z) = $\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$ $\qquad |z| > \frac{1}{2}$

3.10. Să se determine semnalul $x[n]$ a cărui transformată Z este

$$X(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} \qquad |z| \neq 0$$

3.11. Să se determine semnalul $x[n]$ cu transformata

$X(z) = \dfrac{3}{1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}}$, dacă X(z) converge pe cercul unitate.

3.12. Să se calculeze convoluția următoarelor perechi de semnale în domeniul timp și cu ajutorul transformatei Z unilaterale:

a) $x_1[n] = \{1,1,\underset{\uparrow}{1},1,1\}$ $\qquad$ $x_2[n] = \{1,\underset{\uparrow}{1},1\}$

b) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ $\qquad$ $x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

c) $x_1[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1\}$ $\qquad$ $x_2[n] = \{1,\underset{\uparrow}{1},1\}$

S–au obținut aceleași rezultate prin ambele metode? Explicați.

3.13. Să se determine răspunsul $y[n]$, $n \geq 0$ al sistemelor descrise de următoarele ecuații cu diferențe, cu ajutorul transformatei Z unilaterale:

a) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{4}y[n-2]=0$; $y[-1]=y[-2]=1$.

b) $y[n]-1{,}5y[n-1]+0{,}5y[n-2]=0$; $y[-1]=y[-2]=0$.

c) $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$

$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$; $y[-1]=1$;

d) $y[n]=\frac{1}{4}y[n-2]+x[n]$

$x[n]=u[n]$; $y[-1]=0, y[-2]=1$.

3.14. Să se calculeze răspunsul de stare zero al următoarelor sisteme:

a) $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$; $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)u[n]$

b) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$; $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]$

c) $y[n]=-0.1y[n-1]+0{,}2y[n-2]+x[n]+x[n-1]$; $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

d) $y[n]=-y[n-2]+10x[n]$; $x[n]=10\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$

e) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$; $x[n]=(-1)^n \quad -\infty<n<\infty$

3.15. Se consideră sistemul

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)};\qquad \text{RC: } 0.5<|z|<1$$

a) Să se reprezinte diagrama poli-zerouri a sistemului. Este acesta stabil?
b) Să se determine răspunsul la impuls.

3.16. Să se determine răspunsul sistemului

$y[n]=0.7y[n-1]-0.12y[n-2]+x[n-1]+x[n-2]$

la intrarea $x[n]=nu[n]$. Este sistemul stabil?

3.17. Să se determine răspunsul la impuls, $h[n]$, al sistemului din figură.

$h_1[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$; $h_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$; $h_3[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

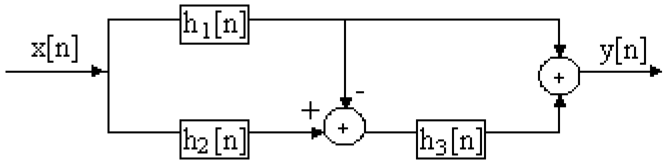

Figura p3.17

3.18. Se consideră interconectarea sistemului din figură, unde $h[n]=a^n u[n]$, $-1<a<1$.

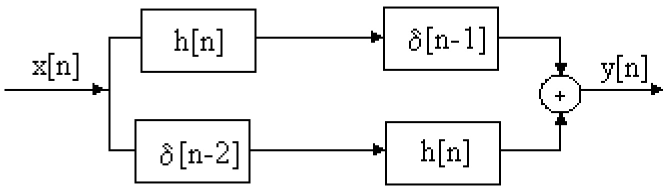

Figura p3.18

a) Să se determine răspunsul la impuls al sistemului și să se stabilească dacă este cauzal și stabil.
b) Să se implementeze sistemul cu un număr minim de sumatoare, multiplicatoare și elemente de întârziere.

3.19. Se consideră sistemul $H(z)=\dfrac{z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{3}{5}z^{-1}+\frac{2}{25}z^{-2}}$

Să se determine:
a) răspunsul la impuls;
b) răspunsul de stare zero la intrarea $x[n]=u[n]$;
c) răspunsul total la intrarea $x[n]=u[n]$ dacă $y[-1]=1$; $y[-2]=2$.

3.20. Fie sistemul cauzal descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

Să se determine:

a) răspunsul la impuls;

b) răspunsul de stare zero la treapta unitate;

c) răspunsul la treapta unitate dacă $y[-1] = A \neq 0$;

d) răspunsul la intrarea $x[n] = \cos\omega_0 n$, $\quad 0 \leq n < \infty$.

3.21. Să se determine răspunsul de stare zero al sistemului

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + 4x[n] + 3x[n-1]$$

la intrarea $x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$.

Care este răspunsul de regim permanent al sistemului?