

CAPITOLUL 3

PROIECTAREA FILTRELOR DIGITALE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Filtrele digitale cu răspuns infinit la impuls (RII), ce vor fi denumite în continuare filtre IIR (*Infinite Impulse Response*), constituie blocuri importante în multe sisteme de prelucrare numerică a semnalelor. Ele sunt recomandate în situațiile în care trebuie realizate benzi de tranziție foarte înguste, precum și atunci când sunt necesare atenuări foarte mari în banda de oprire. Deoarece prezintă reacție, filtrele IIR necesită mai puține celule de întârziere, prețul plătit fiind neliniaritatea fazei și eventuale probleme de stabilitate.

3.1. Introducere

Un filtru IIR poate fi caracterizat în domeniul timp prin *ecuația cu diferențe*

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.1)$$

Aplicând transformată Z ecuației (3.1), rezultă

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (3.2)$$

Funcția de transfer a filtrului este

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.3)$$

Impunând în relația (3.1) intrarea $x[n] = \delta[n]$, se obține răspunsul la impuls al filtrului IIR cauzal

$$h[n] = \begin{cases} b_n - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], & n \in \overline{[0, M]} \\ - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], & n > M \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

În continuare filtrele vor fi considerate stabile, adică răspunsul lor la impuls este absolut sumabil [63]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (3.5)$$

condiție care, în planul Z conduce la necesitatea ca cercul unitate să fie inclus în domeniul de convergență. Dacă se impune și condiția de cauzalitate pentru filtru, care, în domeniul Z conduce la necesitatea ca regiunea de convergență să fie exteriorul unui cerc, rezultă că toți poliul filtrului cauzal și stabil se situează în interiorul cercului unitate.

Răspunsul la impuls al filtrului poate fi calculat și ca transformata Z inversă a funcției de sistem [63]

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{n-1} dz \quad (3.6)$$

unde C este un contur închis în planul complex, parcurs în sens orar, care conține originea.

Prin evaluarea funcției de transfer $H(z)$ pe cercul unitate, se obține răspunsul în frecvență al filtrului

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-jk\omega}} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.7)$$

Răspunsul de modul al filtrului este

$$|H(\omega)| = \frac{|B(\omega)|}{|A(\omega)|}, \quad a_0 = 1 \quad (3.8)$$

Așa cum a fost prezentat în Capitolul 1, poliul funcției de transfer vor determina maxime ale răspunsului în frecvență, cu atât mai pronunțate, cu cât se află mai aproape de cercul unitate, iar zerourile vor determina minime, eventual anulări ale răspunsului în frecvență, dacă se află pe

cercul unitate. Ca urmare, filtrele IIR permit realizarea unor maxime ascuțite, benzi de trecere foarte înguste și, la fel, benzi de tranziție foarte înguste. Asemenea performanțe s-ar putea realiza și cu filtre FIR, dar cu prețul unor lungimi foarte mari.

Un dezavantaj al filtrelor IIR îl constituie faptul că aceste filtre nu pot avea faza perfect liniară. Caracteristica de fază a filtrului poate fi scrisă ca

$$\theta(\omega) = \theta_B(\omega) - \theta_A(\omega) \quad (3.9)$$

unde $\theta_A(\omega)$ și $\theta_B(\omega)$ reprezintă argumentele funcțiilor $A(\omega)$ și $B(\omega)$.

În capitolul precedent s-a arătat că funcția de sistem a unui filtru de fază liniară prezintă o formă de simetrie a zerourilor sale, în sensul că aceasta are zerourile în perechi reciproce, z_i și z_i^{-1} . Dacă zerourile numărătorului funcției de transfer prezintă o astfel de simetrie, faza acestuia este perfect liniară. Pentru ca filtrul să aibă faza liniară, ar trebui ca și faza numitorului să fie liniară, dar acest lucru nu este posibil, deoarece prezența rădăcinilor reciproce la numitor nu mai asigură stabilitatea filtrului cauzal.

Metodele de proiectare ale filtrelor IIR sunt de două feluri:

- *Metode indirecte*, în care un filtru analogic prototip este transformat în echivalentul lui numeric;
- *Metode directe*, în care coeficienții filtrului se determină pe baza minimizării unui criteriu de eroare.

În Capitolul 1 s-a arătat necesitatea îndeplinirii condiției $M \leq N$, unde M este gradul numărătorului, iar N , gradul numitorului. Dacă $M > N$, filtrul poate fi considerat ca fiind format prin conectarea în cascadă a unui filtru IIR de ordin N cu un filtru FIR de ordin $M - N$. Toate tehnicile de proiectare a filtrelor IIR pornesc de la premiza $M \leq N$, ordinul filtrului fiind, deci, egal cu numărul de poli ai funcției de sistem $H(z)$.

3.2. Proiectarea indirectă a filtrelor IIR

3.2.1. Specificarea performanțelor

Procedura cel mai frecvent utilizată pentru proiectarea unui filtru digital IIR constă în transformarea unui filtru analogic într-unul digital, cu performanțe echivalente. Această abordare prezintă avantajul utilizării cunoștințelor și metodelor folosite în proiectarea filtrelor analogice.

Metoda indirectă se bazează pe existența unor transformări care conservă proprietățile selective ale modelului analogic, transformând un filtru optimal analogic într-altul optimal digital. Pornind de la specificațiile referitoare la performanțele filtrului digital, proiectarea acestuia necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Transformarea specificațiilor dorite a fi realizate de către filtrul digital în specificațiile impuse filtrului analogic prototip;
2. Obținerea funcției de transfer a filtrului analogic prototip astfel încât să fie satisfăcute specificațiile impuse filtrului digital;
3. Transformarea funcției de transfer a filtrului analogic în funcția de transfer echivalentă a filtrului digital.

La proiectarea filtrelor digitale de tip FIR sau IIR specificarea performanțelor se referă la abaterile maxime ale caracteristicii de modul în benzile de trecere (B.T.) și oprire (B.O.), precum și frecvențele limită ale acestor benzi. La proiectarea clasică a filtrelor analogice, unii dintre acești parametri de performanță sunt definiți puțin diferit. Astfel, în mod uzual, la filtrele analogice, prin convenție, se consideră că în zona de trecere efectivă caracteristica de modul variază între valoarea maximă 1 și valoarea minimă $1 - \Delta_p$, în timp ce în zona de oprire, variază între 0 și Δ_s , ca în figura 3.1a.

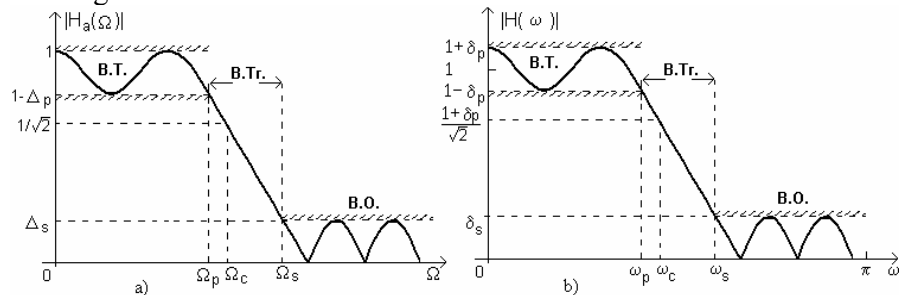


Figura 3.1. Specificarea performanțelor pe caracteristica de modul a funcției de transfer a filtrului trece jos (a) analogic și (b) digital

Pentru filtrele digitale FIR sau IIR se notează cu δ_p , respectiv δ_s , abaterile caracteristicii de modul a funcției de transfer de la valorile sale nominale (1 în B.T., 0 în B.O.) astfel că acest răspuns în frecvență oscilează între $1 + \delta_p$ și $1 - \delta_p$, în B.T. respectiv între 0 și δ_s în B.O., ca în figura 3.1b.

Frecvențele menționate în figura 3.1a au următoarele semnificații: Ω_p , Ω_s , Ω_c reprezintă, în ordine, frecvența de trecere efectivă, frecvența de

oprire efectivă și frecvența de tăiere pentru filtrul analogic, exprimate în radiani/s. Frecvențele unghiulare ω_p , ω_s , ω_c din figura 3.1.b au aceeași semnificații pentru filtrul digital (doar că sunt normate în raport cu frecvența de eșantionare F_s). Relația între frecvențe din domeniul analogic și digital este dată de [63]

$$\omega = \Omega T; \quad f = \frac{F}{F_s}; \quad T = \frac{1}{F_s} \quad (3.10)$$

ceea ce implică

$$F \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2} \right] \Leftrightarrow f \in [-0,5; 0,5] \Leftrightarrow \omega \in [-\pi, \pi] \quad (3.11)$$

Parametrii din figura 3.1a pot fi exprimați în funcție de cei din figura 3.1b, și invers. Relația dintre frecvențele analogice, Ω , și discrete, ω , depinde de corespondența dintre planele s și Z , pe când convertirea valorilor de pe ordonată presupune normarea celor din fig.3.1b cu $1+\delta_p$, și apoi identificarea cu cele din figura 3.1a (sau multiplicarea cu $1+\delta_p$, a celor din figura 3.1a). Rezultă astfel

$$\Delta_p = \frac{2\delta_p}{1+\delta_p}; \quad \Delta_s = \frac{\delta_s}{1+\delta_p} \quad (3.12)$$

respectiv

$$\delta_p = \frac{\Delta_p}{2-\Delta_p}; \quad \delta_s = \frac{2\Delta_s}{2-\Delta_p} \quad (3.13)$$

De obicei, aceste performanțe sunt date în dB, sub forma variației maxime a atenuării în banda de trecere efectivă și a atenuării minime în banda de oprire efectivă,

$$\Delta A_p = 20 \lg \frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} = -20 \lg(1-\Delta_p) \quad (3.14)$$

$$\Delta A_s = -20 \lg \delta_s = -20 \lg \frac{2\Delta_s}{2-\Delta_p} \cong -20 \lg \Delta_s$$

Prezentarea pe scurt a filtrelor trece jos analogice de tip Butterworth, Bessel, Cebîșev și eliptice este dată în Anexa 3a.

Funcția de transfer de ordinul N a unui filtru analogic este [12]

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^N \alpha_i s^i}; \quad N > M \quad (3.15)$$

în care α_i, β_i sunt coeficienții funcției de transfer. Aceasta este legată de răspunsul la impuls prin transformata Laplace

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (3.16)$$

Filtrul analogic poate fi descris și de ecuația diferențială cu coeficienți constanți

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^M \beta_i \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.17)$$

Răspunsul în frecvență, $H_a(j\Omega)$, se obține prin evaluarea funcției de transfer pe axa imaginară a planului s .

Proiectarea unui filtru analogic constă în determinarea coeficienților α_i, β_i care conduc la minimizarea unui criteriu de eroare dintre funcția dorită și cea realizată sau, altfel spus, între *funcția de aproximat* și *funcția dorită*. De obicei, se lucrează cu $|H_a(j\Omega)|^2$ (și nu cu $|H_a(j\Omega)|$) pentru că prima are coeficienți reali.

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{E(-s^2)}{G(-s^2)} \quad (3.18)$$

Din (3.18) se observă că singularitățile lui $H_a(s)H_a(-s)$ în planul s sunt simetrice față de axa $j\Omega$.

Funcția de transfer a filtrului analogic, $H_a(s)$, se determină astfel:

-polii lui $H_a(s)$ sunt zerourile lui $G(-s^2)$, localizate în semiplanul stâng, restricție impusă de stabilitatea filtrului;

-zerourile lui $H_a(s)$ se obțin din zerourile lui $E(-s^2)$ prin distribuirea acestora din urmă în mod egal între $B(s)$ și $B(-s)$, fără a separa perechile de zerouri complex conjugate, pentru a obține $H_a(s)$ cu coeficienți reali. Determinarea lui $B(s)$ nu este unică. Dacă pentru zerourile lui $B(s)$ se aplică aceeași regulă de alocare ca și în cazul polilor, funcția de transfer obținută este *de fază minimă*. Spre deosebire de poli, zerourile pot fi localizate și pe axa $j\Omega$.

Fiecare din aceste trei caracterizări echivalente ale unui filtru analogic conduce la metode diferite de conversie a filtrului analogic în unul digital. Pentru ca tehnicile de conversie să fie eficiente, acestea trebuie să îndeplinească următoarele cerințe:

1. Axa $j\Omega$ a planului s să fie transformată în conturul cercului unitate în planul Z , ceea ce va determina o relație directă între frecvențele variabile în cele două domenii.
2. Semiplanul stâng al planului s să fie transformat în interiorul cercului unitate al planul Z , astfel încât filtrele analogice stabile să le corespundă filtre digitale stabile.

3.2.2. Metoda transformării ecuației diferențiale

Una din cele mai simple căi de transformare a unui filtru analogic în unul digital constă în înlocuirea diferențialelor din expresia (3.17) prin diferențe finite [28], obținând astfel *ecuația cu diferențe finite* care aproximează ecuația diferențială dată.

$$y[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta^{(k)} \{y[n]\} = \sum_{k=0}^M \beta_k \Delta^{(k)} \{x[n]\} \quad (3.19)$$

unde $x[n]$ și $y[n]$ reprezintă secvențele de intrare și ieșire ale filtrului digital, iar $\Delta^{(k)} \{x[n]\}$, $\Delta^{(k)} \{y[n]\}$ reprezintă *diferențele de ordinul k* [63] ale acestora, obținute prin substituțiile următoare:

$$y_a(t)|_{t=nT} \Leftrightarrow y[n], \frac{d^{(k)} y_a(t)}{dt^k} \Big|_{t=nT} \Leftrightarrow \Delta^{(k)} \{y[n]\} \quad (3.20)$$

unde $y_a(t)$ este răspunsul filtrului analogic, T este perioada de eșantionare, iar $\frac{d^{(k)} y_a(t)}{dt^k}$ este derivata de ordinul (k) a răspunsului filtrului analogic în raport cu timpul.

Diferențele înapoi de ordinul 1, respectiv k , sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} \{y[n]\} &= \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \\ \Delta^{(k)} \{y[n]\} &= \Delta^{(1)} \{\Delta^{(k-1)} \{y[n]\}\} = \frac{\Delta^{(k-1)} \{y[n]\} - \Delta^{(k-1)} \{y[n-1]\}}{T}, k = 2, \overline{N} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicând transformata Z relațiilor (3.21), se poate scrie

$$\begin{aligned}
Z\{\Delta^{(1)}\{y[n]\}\} &= \frac{1-z^{-1}}{T} Y(z) \\
Z\{\Delta^{(k)}\{y[n]\}\} &= \frac{1-z^{-1}}{T} Z\{\Delta^{(k-1)}\{y[n]\}\} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k Y(z)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Aplicând transformata Z ambilor membri ai ecuației cu diferențe (3.19) și utilizând transformatele Z ale diferențelor date de (3.22), se obține funcția de transfer a filtrului digital de forma

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^i}{1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^i} \tag{3.23}$$

Expresia (3.23) arată că obținerea lui $H(z)$ din $H_a(s)$ se face prin substituția

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \tag{3.24}$$

Diferențiatorul analogic cu ieșirea $\frac{dy_a(t)}{dt}$ are funcția de transfer $H(s) = s$, în timp ce sistemul digital care produce ieșirea $\frac{y[n]-y[n-1]}{T}$ are funcția de sistem $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}$. Corespondența dintre cele două domenii, s și Z , este dată de relația (3.24).

Diferențele $\Delta^{(k)}\{y[n]\}$ evaluate cu relațiile (3.21) poartă denumirea de *diferențe înapoi*. Dacă, în schimb, diferențele $\Delta^{(k)}\{y[n]\}$ se evaluează cu relațiile

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)}\{y[n]\} &= \frac{y[n+1]-y[n]}{T} \\
\text{și } \Delta^{(k)}\{y[n]\} &= \frac{\Delta^{(k-1)}\{y[n+1]\}-\Delta^{(k-1)}\{y[n]\}}{T}, \text{ pentru } k = \overline{2, N},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

acestea poartă denumirea de *diferențe înainte*.

Repetând procedura de trecere de la ecuațiile cu diferențe finite la funcția $H(z)$ utilizând diferențele înainte, rezultă că aceasta se obține din $H_a(s)$ prin substituția

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (3.26)$$

Pentru a examina modul în care se transformă planul Z în planul s , și invers, prin transformările (3.24) și (3.26) și dacă sunt satisfăcute cerințele 1 și 2, se înlocuiește în prima relație $s = \sigma + j\Omega$. Pentru $\sigma = 0$ se obține transformarea axei $\{j\Omega\}$

$$z = \frac{1}{1-sT} \Big|_{\sigma=0} = \frac{1}{1-j\Omega T} = \frac{1}{1+\Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1+\Omega^2 T^2} = \text{Re}(z) + j \text{Im}(z) \quad (3.27)$$

Eliminând ΩT din $\text{Re}(z)$ și $\text{Im}(z)$ se obține relația

$$\text{Re}^2(z) - \text{Re}(z) + \text{Im}^2(z) = 0 \Leftrightarrow (\text{Re}(z) - \frac{1}{2})^2 + \text{Im}^2(z) = (\frac{1}{2})^2 \quad (3.28)$$

sau, echivalent

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

Astfel, axa $\{j\Omega\}$ a planului s se transformă în cercul cu centrul în $C(1/2, 0)$, de rază $1/2$, descris de (3.29) și reprezentat în figura 3.2.

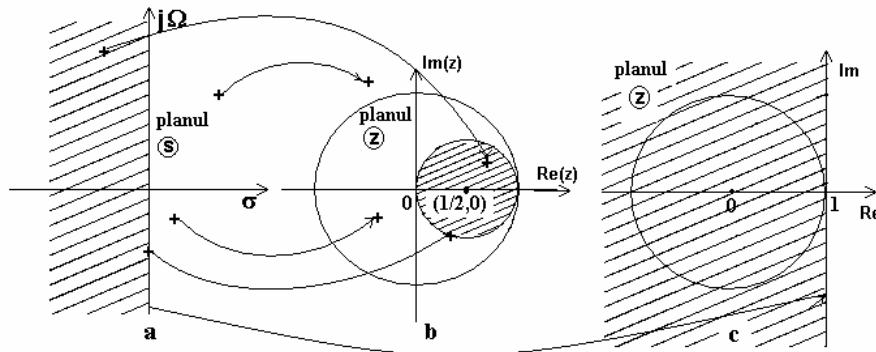


Figura 3.2. Transformarea planului s (a) în planul Z prin utilizarea diferenței înapoi (b), respectiv diferenței înainte (c) în aproximarea ecuației diferențiale

Pentru a stabili corespondența dintre planul s și planul Z , se înlocuiește $s = \sigma + j\Omega$ în ecuația cercului (3.29), rezultând

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1+sT}{1-sT} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1+\sigma T)^2 + (\Omega T)^2}{(1-\sigma T)^2 + (\Omega T)^2}} \quad (3.30)$$

$$\text{Dacă } \sigma < 0 \Rightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

Relațiile (3.30) evidențiază faptul că semiplanul stâng al planului s trece în interiorul cercului de rază $1/2$ iar semiplanul drept în exteriorul acestui cerc. Cum acest cerc este localizat în interiorul cercului unitate, rezultă că transformarea (3.24) conservă condiția de stabilitate a filtrului analogic. Transformarea prezentată nu asigură îndeplinirea cerinței de transformare a axei imaginare a planului s în conturul cercului unitate, însă pentru valori foarte mici ale lui T , o zonă a axei $\{j\Omega\}$ (pentru care $|\Omega T|$ este foarte mic) va fi transformată în arcul de cerc situat în jurul lui $z=1$, care corespunde, în domeniul frecvențelor discrete, lui $\omega = \Omega T = 0$. Astfel, răspunsul în frecvență al filtrului analogic se conservă la frecvențe joase, pe o zonă de frecvență cu atât mai întinsă cu cât perioada de eșantionare este mai mică. Ca atare, transformarea dă rezultate relativ bune la discretizarea unui filtru analogic trece jos și nesatisfăcătoare pentru alte tipuri de filtre.

Pentru transformarea (3.26) se poate scrie

$$z = 1 + sT; \operatorname{Re}(z) = 1 + \sigma T; \operatorname{Im}(z) = \Omega T; |z|^2 = (1 + \sigma T)^2 + (\Omega T)^2, \quad (3.31)$$

Aceste relații evidențiază faptul că axa $\{j\Omega\}$ se transformă în dreapta $\operatorname{Re}(z) = 1$ ce separă semiplanele $\operatorname{Re}(z) < 1$ și $\operatorname{Re}(z) > 1$ care reprezintă imaginile semiplanelor stâng ($\sigma < 0$), respectiv drept ($\sigma > 0$) ale planului s , ca în figura 3.2c. Din (3.31) se observă că este posibil ca filtre analogice stabile, cu polii $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ cu $\sigma_k < 0$, să nu se transforme în filtre digitale stabile, dacă

$$(1 + \sigma_k T)^2 + (\Omega_k T)^2 > 1 \quad (3.32)$$

Prin urmare, transformarea (3.26) nu satisface cerințele 1 și 2, nefiind o metodă generală bună pentru convertirea unui filtru analogic în unul digital. Ca și în cazul transformării (3.24), caracteristicile de selectivitate sunt conservate doar la $|\Omega T|$ foarte mic (porțiunea din dreapta $\operatorname{Re}(z) = 1$ din vecinătatea punctului de tangență cu cercul unitate).

3.2.3. Metoda invarianței răspunsului la impuls

În această metodă se urmărește a se proiecta un filtru digital IIR al cărui răspuns la impuls $h[n]$, este versiunea eșantionată, cu perioada T , a răspunsului la impuls al filtrului analogic, $h_a(t)$.

$$h[n] = h_a(nT) \quad (3.33)$$

Se reamintește [63] că dacă un semnal continuu $x_a(t)$ cu spectrul $X_a(F)$ este eșantionat periodic cu frecvența $F_s = 1/T$ eșantioane pe secundă, spectrul semnalului eșantionat este repetarea periodică a spectrului scalat $F_s X_a(F)$ cu perioada F_s , adică

$$X(f) = F_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a[(f - k)F_s] \quad (3.34)$$

unde $f = F/F_s$ este frecvența normalizată. Eroarea alias apare dacă frecvența de eșantionare F_s este mai mică decât dublul celei mai mari frecvențe, F_B , din spectrul $X_a(F)$.

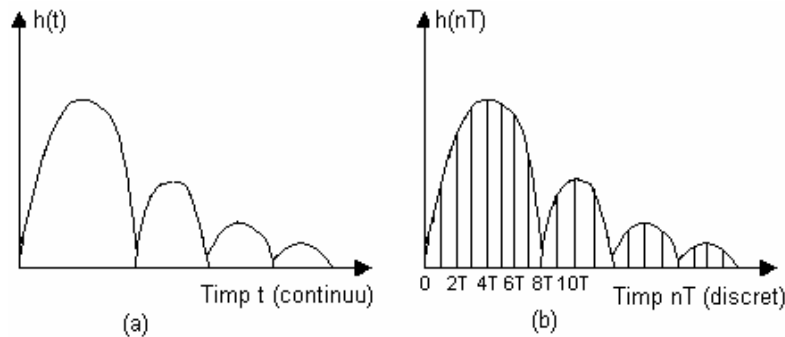


Figura 3.3 Comparație între răspunsul la impuls al a) filtrului analogic și b) filtrului digital echivalent

Particularizând (3.34) pentru eșantionarea răspunsului la impuls al filtrului analogic cu răspunsul în frecvență $H_a(F)$, filtrul digital care îndeplinește relația (3.33) are răspunsul în frecvență

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f - k)F_s] \quad (3.35)$$

sau, echivalent

$$H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(\omega - 2\pi k)F_s] \quad (3.36)$$

cu $\omega = \Omega T$, sau

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad \text{cu } \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.37)$$

În figura 3.4 se arată schematic răspunsul în frecvență al unui filtru analogic trece jos și răspunsul filtrului digital corespunzător. Se observă că răspunsul filtrului digital se apropie de cel al filtrului analogic, dacă perioada de eșantionare T este suficient de mică pentru a evita sau minimiza eroarea alias. Se observă, de asemenea, că metoda invarianței răspunsului la impuls nu este potrivită pentru proiectarea de filtre trece sus, din cauza erorii alias ce apare în spectru în urma eșantionării.

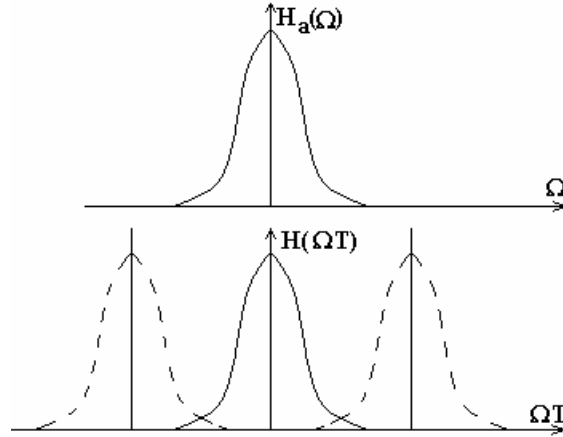


Figura 3.4 Răspunsul în frecvență $H_a(\Omega)$ al filtrului analogic și cel al filtrului digital corespunzător cu eroare alias

Observație. Dacă $H_a(\Omega)$ este de bandă limitată și satisface condiția

$$H_a(\Omega) = 0 \quad \text{pentru } |\Omega| \geq \Omega_B \quad (3.38)$$

atunci, prin alegerea unei frecvențe de eșantionare $F_s \geq 2F_B$, în relația (3.37) nu există suprapuneri ale repetărilor adiacente și, ca atare, se poate scrie

$$TH(\omega) = H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad \text{pentru } |\omega| \leq \pi, \quad (3.39)$$

adică, nesuprapunerea repetărilor periodice (garantată de condiția (3.38)) asigură că filtrul digital obținut prin metoda invariației răspunsului la impuls va avea exact același răspuns în frecvență ca și filtrul analogic prototip. În realitate funcțiile de transfer ale filtrelor analogice nu satisfac decât cu aproximație condiția (3.38), replici ale spectrului din domeniul fundamental existând pe toată axa frecvențelor, ceea ce conduce la fenomenul alias, astfel că relația (3.39) va fi adevărată cu o anumită aproximație.

Unul din dezavantajele majore ale acestei metode de discretizare a răspunsului la impuls al filtrului analogic prototip constă în faptul că ea se aplică numai pentru filtrele al căror răspuns la impuls satisface (chiar cu o anumită aproximație) condiția de semnal de bandă limitată (3.38), putând fi aplicată la proiectarea filtrelor trece jos și trece bandă, nu și la proiectarea celor trece sus, oprește bandă și trece tot.

În proiectarea filtrelor digitale prin metoda invarianței răspunsului la impuls cerințele filtrului discret sunt transformate în specificații ale filtrului analogic din relația (3.39), în ipoteza unei erori alias neglijabile, prin aplicarea relației

$$\Omega = \omega / T \quad (3.40)$$

După obținerea unui filtru analogic potrivit specificațiilor, acesta este transformat în unul digital cu funcția de sistem $H(z)$, după o procedură care necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Se descompune $H_a(s)$ în fracții simple

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k} \quad (3.41)$$

2. Se determină $h_a(t)$ ca transformata Laplace inversă a lui $H_a(s)$

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N c_k L^{-1} \left\{ \frac{1}{s - p_k} \right\} = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t} \sigma(t) \quad (3.42)$$

$\sigma(t)$ fiind semnalul treaptă unitate.

3. Se determină funcția pondere a filtrului digital prin eșantionarea periodică a lui $h_a(t)$

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k nT} u[n] \quad \text{cu } u[n] = \sigma(nT) \quad (3.43)$$

4. Se calculează funcția de transfer $H(z)$ ca transformata Z a secvenței $h[n]$.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k n T} \right) z^{-n} = \\
 &= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

Efectuând calculele, se obțin coeficienții $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ ai filtrului digital. Comparând (3.41) cu (3.44) se poate spune că $H(z)$ se obține din $H_a(s)$ exprimată ca sumă de fracții elementare prin substituția

$$\frac{c_k}{s - p_k} \rightarrow \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}
 \tag{3.45}$$

Pentru $H_a(s)$ cu coeficienți reali, poliile complecși apar în perechi conjugate: $s_{k1,2} = -\alpha_k \pm j\Omega_k$. Comoditatea lucrului cu valori reale implică descompunerea în fracții elementare de ordinul 2 (prin combinarea fracțiilor de ordinul 1 care conțin poli conjugăți) și apoi substituirea acestora în $H(z)$.

Între transformata Z a secvenței $h[n]$ și transformata Laplace a semnalului eșantionat există relația

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT)e^{-snT} \Big|_{e^{sT} = z} = L\{h_a(nT)\} \Big|_{e^{sT} = z}.
 \tag{3.46}$$

Prin urmare, corespondența între planele s și Z în cazul metodei invarianței răspunsului la impuls este realizată de transformarea

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}
 \tag{3.47}$$

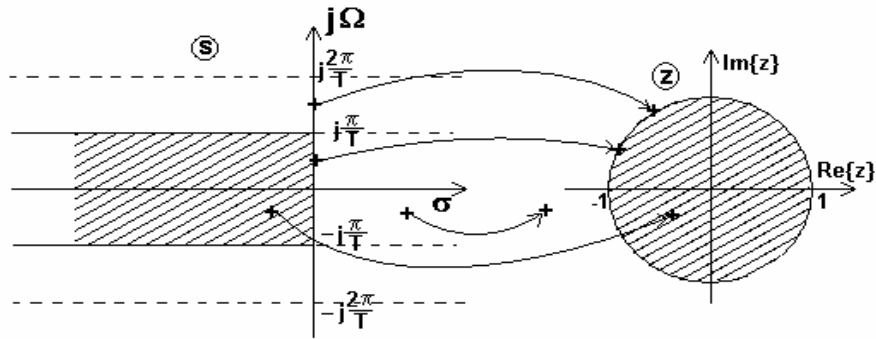


Figura 3.5. Transformarea planului s în planul Z prin metoda invarianței răspunsului la impuls.

Particularitățile acestei transformări, evidențiate în figura 3.5, sunt următoarele:

1. Unui punct $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ din planul Z îi corespunde în planul s o infinitate de puncte $s_k = \frac{1}{T} \ln r_1 + j \left(\frac{\varphi_1}{T} + \frac{2k\pi}{T} \right)$, $k \in Z$, situate pe paralela la ordonată $\sigma = (1/T) \ln r_1$. Aceasta înseamnă că fiecare fâșie a planului s , de lățime $2\pi/T$, acoperă în întregime planul Z .

2. Partea din semiplanul stâng a fiecărei fâșii se transformă în interiorul cercului unitate din planul Z , iar cea din semiplanul drept în exteriorul acestuia.

3. Fiecare interval de pe axa $\{j\Omega\}$ de forma

$$(2k-1)\frac{\pi}{T} \leq \Omega < (2k+1)\frac{\pi}{T}, k \in Z \quad (3.48)$$

se transformă în conturul cercului unitate $z = e^{j\omega}$ cu $\omega \in [-\pi, \pi)$.

Comparând ecuația (3.41) cu (3.44), se observă că polul $s = p_k$ din planul s se transformă în polul $e^{p_k T}$ din planul Z , iar coeficienții dezvoltării în fracții simple ai lui $H_a(s)$ și $H(z)$ sunt egali. Dacă filtrul analogic este stabil, adică $\text{Re}\{p_k\} < 0$ atunci $|e^{p_k T}| < 1$, deci polul corespunzător din filtrul numeric este în interiorul cercului unitate și filtrul numeric va fi stabil.

În timp ce polii din planul s se transformă în alți poli în planul Z , conform relației $z_k = e^{p_k T}$, este important de subliniat că procedeul invarianței răspunsului la impuls nu corespunde unei simple transformări a planului s în planul Z . În particular, zerourile funcției de transfer a filtrului digital sunt funcție de polii și coeficienții c_k ai dezvoltării în fracții simple și, în general, ele nu se transformă în același mod ca polii. Metoda invarianței răspunsului la impuls dă rezultate pentru filtrele T.J. și T.B. de tip Butterworth, Bessel și Cebîșev, prezentând avantajul că menține caracteristica de atenuare și fază ale filtrului analogic.

Observație. Uneori, pentru a transforma filtrul analogic ce urmează a fi proiectat într-un sistem de bandă limitată prin reducerea erorii alias, se utilizează un *filtru de gardă* în cascadă cu cel dorit (acesta fiind un F.T.J. cu atenuare foarte mare în zona de oprire și constantă în zona de trecere).

Metoda invariației răspunsului la impuls îndeplinește cerințele 1 și 2, în măsura în care eroarea alias poate fi neglijată.

Exemplul 3.1.

Să se transforme un filtru analogic cu funcția de transfer

$$H_a(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 9}$$

într-unul digital IIR, prin metoda invarianței răspunsului la impuls.

Soluție. Filtrul are un zero la $s=-0,1$ și o pereche de poli complex conjugăți $p_{1,2} = -0,1 \pm j3$, poziționați ca în figura 3.6.

Pentru proiectarea filtrului IIR nu trebuie determinat răspunsul la impuls $h_a(t)$, ci se determină direct $H(z)$ din descompunerea în fracții simple a lui $H_a(s)$.

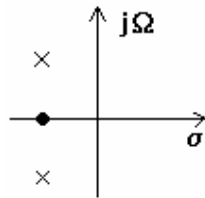


Figura 3.6. Localizarea polilor și a zeroului

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s + 0,1 - j3} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 0,1 + j3};$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0,1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0,1T} e^{-j3T} z^{-1}}$$

Cei doi poli complex conjugăți pot fi combinați pentru a forma un filtru cu doi poli, cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1}}{1 - (2e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1} + e^{-0,2T} z^{-1}}$$

Modulul caracteristicii de frecvență a acestui filtru este dată în figura 3.7a pentru $T=0,1$ și $T=0,5$. Pentru comparație, în figura 3.7b se prezintă răspunsul în frecvență al filtrului analogic.

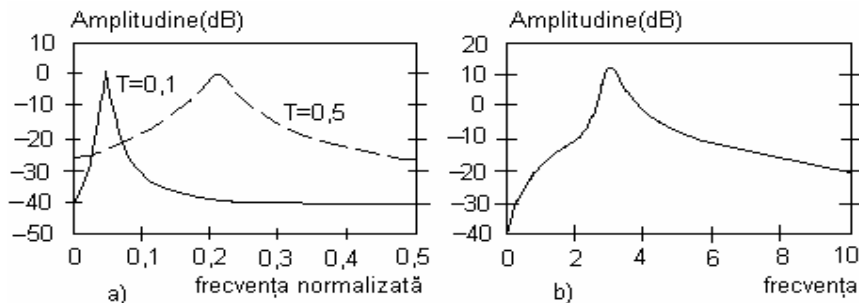


Figura 3.7 Răspunsul în frecvență pentru a) filtrul digital b) filtrul analogic din exemplul 3.1

Se observă că eroarea alias este mai semnificativă la $T=0,5$ decât la $T=0,1$. De asemenea, se observă deplasarea frecvenței de rezonanță cu schimbarea lui T și micșorarea erorii alias pentru valori mici ale lui T .

Concluzii cu privire la metoda invarianței răspunsului la impuls

1. Răspunsul la impuls al filtrului numeric $h[n]$ este identic cu cel al filtrului analogic, $h(t)$, la momentele discrete $t = nT$, $n = 0, 1, \dots$, conform figurii 3.3.

2. Eșantionarea în timp afectează răspunsul în frecvență al filtrului numeric obținut prin această metodă.

3. Spectrul filtrului numeric, caracterizat de funcția de sistem $H(z)$, va fi același cu al filtrului analogic original, caracterizat de funcția de transfer $H(s)$, dar acesta se repetă la multipli ai frecvenței de eșantionare. Oricum, dacă se iau suficiente eșantioane din răspunsul la impuls al filtrului original analogic și dacă acesta este de bandă limitată înainte de aplicarea metodei invarianței răspunsului la impuls, eroarea de tip alias va fi mică. Metoda poate fi folosită pentru F.T.J. cu tăiere foarte abruptă, cu alias mic, dacă frecvența de eșantionare este suficient de mare, dar nu este potrivit pentru F.T.S. sau F.T.B., fără folosirea filtrului de gardă (anti – alias).

3.2.4. Metoda transformării biliniare

Metoda transformării biliniare este în prezent unul dintre cele mai eficiente procedee de proiectare a filtrelor IIR în raport cu următoarele două criterii: răspunsul în frecvență să aproximeze cât mai fidel filtrul analogic de referință și să se mențină simplitatea în proiectare.

Metoda se bazează pe integrarea ecuațiilor diferențiale și folosirea aproximării numerice. Se consideră, sub formă generală, funcția de transfer a sistemului

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} \quad (3.49)$$

unde $X_a(s), Y_a(s)$ sunt transformatele Laplace ale semnalelor de intrare, $x_a(t)$, și, respectiv, de ieșire, $y_a(t)$. Funcția de transfer a filtrului analogic poate fi descompusă în fracții simple, motiv pentru care, în continuare, analiza se efectuează pentru un filtru liniar analogic cu funcția de transfer

$$H_a(s) = \frac{b}{s+a} \quad (3.50)$$

Ecuția diferențială care caracterizează filtrul liniar analogic este atunci de forma

$$\frac{dy_a(t)}{dt} + ay_a(t) = bx_a(t) \quad (3.51)$$

Răspunsul $y_a(t)$ se poate determina cu relația

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y_a'(\tau) d\tau + y_a(t_0) \quad (3.52)$$

unde $y_a'(t)$ este derivata răspunsului $y_a(t)$. Din aproximarea integralei (3.52) prin metoda trapezelor, rezultă pentru $t=nT$ și $t_0=nT-T$

$$y_a(nT) = \frac{T}{2}[y_a'(nT) + y_a'(nT-T)] + y_a(nT-T) \quad (3.53)$$

Relația (3.51), evaluată la $t=nT$, este

$$y_a'(nT) = -ay_a(nT) + bx_a(nT) \quad (3.54)$$

Din înlocuirea relației (3.54) în (3.53) rezultă

$$y_a(nT) = \frac{T}{2}[-ay_a(nT) + bx_a(nT) - ay_a(nT-T) + bx_a(nT-T)] + y_a(nT-T) \quad (3.55)$$

cu notațiile $y[n]=y_a(nT)$, $x[n]=x_a(nT)$, $y[n-1]=y_a(nT-T)$, $x[n-1]=x_a(nT-T)$, relația (3.55) devine

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y[n] - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y[n-1] = \frac{bT}{2}(x[n] + x[n-1]) \quad (3.56)$$

Transformata Z a acestei ecuații cu diferențe este

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)Y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2}(1 + z^{-1})X(z) \quad (3.57)$$

Funcția de transfer a filtrului digital echivalent este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1 + z^{-1})}{1 + aT/2 - (1 - aT/2)z^{-1}} \quad (3.58)$$

sau

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + a} \quad (3.59)$$

Se observă că $H(z)$ se poate obține din $H_a(s)$, folosind substituția

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (3.60)$$

adică

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (3.61)$$

Transformarea inversabilă din relația (3.60) se numește *transformare biliniară*.

Deși obținerea transformării biliniare s-a efectuat pentru o ecuație diferențială de ordinul 1, relația (3.61) este adevărată indiferent de ordinul N al ecuației diferențiale sau, echivalent, al sistemului analogic, întrucât acesta este echivalent cu conectarea în paralel a N sisteme de ordinul 1.

Rezolvând (3.60) în raport cu z , rezultă

$$z = \left(1 + \frac{T}{2}s\right) / \left(1 - \frac{T}{2}s\right) \quad (3.62)$$

Când $s = j\Omega$ relația (3.62) devine

$$z = \left(\frac{2}{T} + j\Omega\right) / \left(\frac{2}{T} - j\Omega\right) \quad (3.63)$$

Din această ecuație rezultă că $|z|=1$. Pentru $\Omega=0$, rezultă $z=1$, iar pentru $\Omega=\infty$, $z=-1$. Dacă în (3.62), se înlocuiește $s=\sigma+j\Omega$ se obține

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega} \quad (3.64)$$

astfel încât, dacă $\sigma < 0$ (semiplanul stâng) se obține $|z| < 1$, iar dacă $\sigma > 0$ (semiplanul drept), se obține $|z| > 1$.

Analog, dacă se scrie variabila z în formă polară, $z = re^{j\omega}$, și apoi se înlocuiește în (3.60), rezultă

$$s = \frac{2z-1}{Tz+1} = \frac{2re^{j\omega}-1}{Tre^{j\omega}+1} = \frac{2}{T} \left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} + j \frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega} \right) = \sigma + j\Omega \quad (3.65)$$

Prin identificare, se obține

$$\sigma = \frac{2}{T} \frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \quad (3.66)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega} \quad (3.67)$$

Pentru $r < 1$, rezultă $\sigma < 0$ și dacă $r > 1$, rezultă $\sigma > 0$, deci semiplanul stâng se transformă în interiorul cercului unitate, și semiplanul drept în exteriorul cercului unitate. Pentru $r=1$, rezultă $\sigma=0$ și

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{\sin\omega}{1+\cos\omega} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (3.68)$$

sau, echivalent

$$\omega = 2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{\Omega T}{2} \quad (3.69)$$

În figura 3.8 se arată corespondența dintre planul s și planul Z prin transformarea biliniară. Întreaga axă $j\Omega$ a planului s se transformă în conturul cercului unitate; semiplanul stâng al planului s se transformă în interiorul cercului unitate iar semiplanul drept în exteriorul cercului unitate.

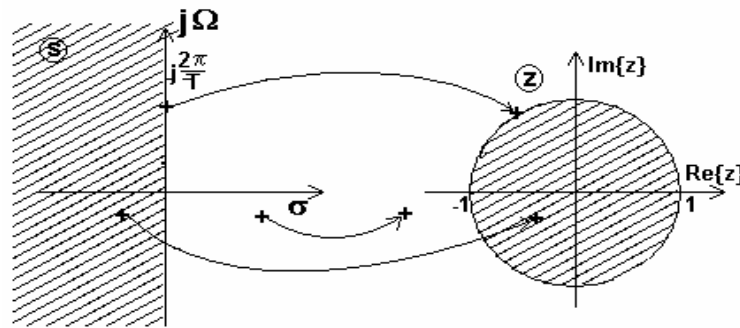


Figura 3.8. Corespondența dintre planul s și planul Z prin transformarea biliniară

Se observă că utilizarea transformării biliniare oferă posibilitatea proiectării de filtre numerice stabile, plecând de la filtre analogice stabile. Alt avantaj este acela că se înlătură suprapunerea spectrală întâlnită la utilizarea metodei invarianței răspunsului la impuls, deoarece transformă întreaga axă imaginară a planului s în conturul cercului unitate. Prețul plătit este introducerea unor distorsiuni pe axa frecvențelor, datorită faptului că axa infinită $j\Omega$ se comprimă în conturul cercului unitate. Relația neliniară dintre frecvențele variabile din cele două domenii, exprimată prin relația (3.69), este reprezentată în figura 3.9. Această metodă se folosește numai în aplicații care tolerează asemenea distorsiuni sau atunci când ele pot fi compensate. Există o largă clasă de filtre pentru care se poate compensa neliniaritatea pronunțată dată de relația (3.69). Se observă că relația între frecvența analogică Ω și frecvența discretă ω este aproape liniară pentru valori mici ale lui ω , dar devine neliniară pentru valori mari ale lui ω , conducând la distorsiuni în răspunsul în frecvență al filtrului digital.

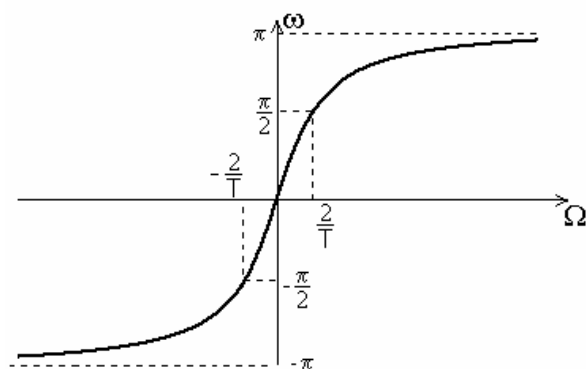


Figura 3.9. Relația între frecvența analogică și cea digitală în transformarea biliniară

De asemenea, este interesant de observat că, prin transformarea biliniară, punctului $s=\infty$ îi corespunde $z=-1$. În consecință, un FTJ analogic cu un singur zero la $s=\infty$ are ca rezultat un filtru digital care are un zero la $z=-1$.

Pași folosiți în aplicarea metodei transformării biliniare

1. Se definesc, conform aplicației, frecvențele caracteristice ale filtrului numeric.

2. Se calculează frecvența sau frecvențele corespunzătoare filtrului analogic, cu relația $\Omega_k = (2/T)\text{tg}(\omega_k T/2)$.

3. Se proiectează filtrul analogic cu funcția de transfer $H_a(s)$ care îndeplinește specificațiile de frecvență $\{\Omega_k\}$, de la punctul 2.

4. Se determină apoi funcția de transfer $H(z)$ a filtrului numeric dorit.

Exemplul 3.2.

Să se transforme un filtru analogic cu funcția de transfer

$$H_a(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 16}$$

într-un filtru digital IIR prin transformarea biliniară. Filtrul digital trebuie să aibă frecvența de rezonanță la $\omega_r = \pi/2$.

Soluție. Frecvența de rezonanță a filtrului analogic este $\Omega_r = 4$. Această frecvență trebuie să fie transformată în $\omega_r = \pi/2$ prin selectarea valorii parametrului T din relația (3.69). Rezultă $T=1/2$ și, deci, conform relației (3.60), se poate scrie

$$s = 4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Filtrul digital rezultat are funcția de transfer

$$H(z) = \frac{0,128 + 0,006z^{-1} - 0,122z^{-2}}{1 + 0,0006z^{-1} + 0,975z^{-2}}$$

Ținând cont că termenul $0,0006z^{-1}$ e foarte mic în comparație cu ceilalți termeni, acesta se neglijează și rezultă că $H(z)$ are polii $p_{1,2} = 0,987e^{\pm j\pi/2}$ și zerouri la $z_1 = -1, z_2 = 0,95$. În acest exemplu parametrul T a fost ales astfel încât frecvența de rezonanță a filtrului analogic să corespundă cu frecvența de rezonanță a filtrului digital.

De obicei, proiectarea filtrului începe cu specificațiile în domeniul digital. Aceste specificații în frecvență sunt transformate în domeniul analogic, prin relația (3.68). Filtrul analogic este proiectat pentru aceste specificații și convertit într-un filtru digital prin transformarea biliniară (3.60). În această procedură parametrul T dispăre din expresia lui $H(z)$, astfel încât poate avea o valoare arbitrară (fie $T=1$). Următorul exemplu ilustrează acest lucru.

Exemplul 3.3.

Să se proiecteze un FTJ cu un singur pol, cu lăţimea de bandă de $0,2\pi$ la 3dB, prin transformarea biliniară aplicată filtrului analogic $H(s)=\Omega_c/(s+\Omega_c)$, unde Ω_c este lăţimea de bandă a filtrului analogic la 3dB.

Soluţie. Filtrul digital are câştigul de -3dB la $\omega_c = 0,2\pi$. În domeniul frecvenţelor filtrului analogic, $\omega_c = 0,2\pi$ corespunde frecvenţei $\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(0,1\pi) = 0,65/T$, rezultând funcţia de transfer a filtrului

analogic
$$H(s) = \frac{0,65/T}{s + 0,65/T}$$

Aplicând transformarea biliniară pentru a converti filtrul analogic în filtrul digital dorit, rezultă

$$H(z) = \frac{0,245(1 + z^{-1})}{1 - 0,509z^{-1}}$$

Răspunsul în frecvenţă al filtrului digital este

$$H(\omega) = \frac{0,245(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0,509e^{-j\omega}}$$

La $\omega=0$, $H(0)=1$ şi la $\omega=0,2\pi$, $|H(0,2\pi)|=0,707$, care este răspunsul dorit.

3.2.5. Metoda transformării în Z adaptate

Această metodă se bazează pe exprimarea funcţiei de transfer a filtrului analogic $H_a(s)$ în formă factorizată şi constă în transformarea directă a polilor şi zerourilor din planul s în planul Z. Metoda transformării în Z adaptate transformă un pol $s_k = p_k$ din planul s în polul $z_{p_k} = e^{p_k T}$ în planul z, adică transformă factorul s- p_k în factorul $1 - z^{-1} e^{p_k T}$. Similar, un zero $s_k = z_k$ se transformă în $z_{z_k} = e^{z_k T}$.

Presupunând funcţia de transfer a filtrului analogic factorizată în forma

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (3.70)$$

unde z_k și p_k sunt zerourile și, respectiv, poliul filtrului analogic, funcția de sistem a filtrului digital este

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - e^{z_k T} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{p_k T} z^{-1})} \quad (3.71)$$

unde T este perioada de eșantionare.

Pentru o pereche de poli complex conjugați transformarea factorilor devine

$$\begin{aligned} (s + \alpha + j\Omega_0)(s + \alpha - j\Omega_0) &= (s + \alpha)^2 + \Omega_0^2 \\ \rightarrow 1 - 2z^{-1}e^{-\alpha T} \cos(\Omega_0 T) + e^{-2\alpha T} z^{-2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Poliul funcției de transfer $H(z)$ a filtrului digital astfel obținut sunt identici cu cei obținuți prin metoda invarianței răspunsului la impuls, în schimb zerourile sunt diferite. Deși foarte comodă, metoda nu este folosită datorită faptului că erorile de tip alias sunt mult mai puternice decât la metoda invarianței răspunsului la impuls.

3.2.6. Proiectarea FTS, FTB, FOB prin transformări de frecvență

Până acum s-a insistat în principal asupra proiectării FTJ, IIR. Dacă se dorește proiectarea unui FTS, FTB, FOB, aceasta se face cu un model de FTJ, căruia i se aplică o transformare de frecvență. O posibilitate este de a realiza transformarea de frecvență în domeniul analogic și apoi să se convertească filtrul analogic într-un filtru digital, făcând corespondența dintre planul s și planul Z . O altă cale este de a transforma întâi filtrul TJ analogic într-un FTJ digital și apoi de a transforma FTJ digital în filtrul dorit printr-o transformare de frecvență direct în domeniul discret. În general aceste metode produc rezultate diferite, cu excepția transformării biliniare, când proiectările sunt identice.

3.2.6.1. Transformări de frecvență în domeniul analogic

Transformările de frecvență în domeniul analogic sunt transformări generale care permit obținerea filtrelor trece sus, trece bandă

și oprește bandă pornind de la un filtru trece jos proiectat. Ele realizează schimbarea caracteristicilor de selectivitate printr-o simplă substituire a variabilei s în expresia funcției de transfer $H_a(s)$. Se notează cu s și s' variabilele frecvență complexă pentru filtrul trece jos și cel derivat din acesta.

a) Se presupune că este proiectat un FTJ cu frecvență tăiere Ω_c și se dorește convertirea sa în altul, tot trece jos, cu frecvența de tăiere Ω'_c . Transformarea care realizează acest lucru este [48]

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c}{\Omega'_c} s \quad (\text{TJ în TJ}) \quad (3.73)$$

Funcția de transfer a FTJ obținut este

$$H_l(s) = H_p[(\Omega_c / \Omega'_c)s], \quad (3.74)$$

unde $H_p(s)$ este funcția de transfer a filtrului prototip, cu frecvența de tăiere Ω_c .

b) Dacă se dorește conversia unui FTJ în unul TS cu frecvența de tăiere Ω'_p transformarea necesară este [48]

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c \Omega'_c}{s} \quad (\text{TJ în TS}) \quad (3.75)$$

Funcția de transfer a FTS este $H_h(s) = H_p(\Omega_c \Omega'_c / s)$

c) Transformarea unui FTJ analogic cu frecvența tăiere Ω_c în banda de trecere a filtrului, în unul TB cu frecvența de tăiere inferioară Ω_{cl} și cea superioară Ω_{cu} , poate fi realizată întâi prin transformarea FTJ în alt FTJ cu frecvența de tăiere $\Omega'_c = 1$ și apoi realizând transformarea [48]

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{cu}}{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})} \quad (\text{TJ în TB}) \quad (3.76)$$

Echivalent, se poate obține același rezultat într-un singur pas, prin transformarea [48]

$$s \rightarrow \Omega_c \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{cu}}{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})} \quad (\text{TJ în TB}) \quad (3.77)$$

Se obține astfel

$$H_b(s) = H_p \left(\Omega_c \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{cu}}{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})} \right). \quad (3.78)$$

d) Transformarea unui FTJ analogic cu frecvența de tăiere Ω_c într-un FOB se face prin transformarea inversă a relației (3.76), cu factorul Ω_c servind la normalizarea frecvenței de tăiere a FTJ. Astfel, transformarea este [48]

$$s \rightarrow \Omega_c \frac{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})}{s^2 + \Omega_{cu} \Omega_{cl}} \quad (\text{TJ în OB}) \quad (3.79)$$

ceea ce conduce la

$$H_{bs}(s) = H_p \left(\Omega_c \frac{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})}{s^2 + \Omega_{cu} \Omega_{cl}} \right) \quad (3.80)$$

Programele de proiectare a filtrelor analogice utilizează transformarea bipătratică generală [48]

$$s \rightarrow \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2} \quad (3.81)$$

care, prin particularizarea coeficienților c_i , d_i , permite realizarea tuturor transformărilor anterioare.

3.2.6.2. Transformări de frecvență în domeniul digital

Ca și în domeniul analogic, transformările de frecvență pot fi aplicate și unui FTJ digital pentru a-l transforma într-un FTB, FOB, FTS. Transformarea implică înlocuirea variabilei z^{-1} cu o funcție rațională $g(z^{-1})$, care trebuie să satisfacă următoarele proprietăți [48]:

1. Corespondența $z^{-1} \rightarrow g(z^{-1})$ trebuie să transpună punctele din interiorul cercului unitate din planul z , în el însuși.
 2. Cercului unitate trebuie să-i corespundă tot cercul unitate.
- Condiția (2) implică faptul că pentru $r=1$,

$$e^{-j\omega} = g(e^{-j\omega}) \equiv g(\omega) = |g(\omega)| e^{j \arg[g(\omega)]} \quad (3.82)$$

Rezultă, deci, că trebuie ca $|g(\omega)|=1$ pentru toți ω . Corespondența este de tipul trece tot, adică de forma

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \quad (3.83)$$

unde $|a_k| < 1$, pentru a asigura faptul că un filtru stabil este transformat în alt filtru stabil. Din relația generală (3.83) se obține setul de transformări digitale pentru transformarea unui FTJ digital, cu frecvența de tăiere ω_c , în alt FTJ, în unul TB, OB sau TS.

Astfel, transformarea TJ→TJ este dată de corespondența [48]

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (3.84)$$

cu: $a = \frac{\sin[(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\sin[(\omega_c + \omega'_c)/2]}$, ω'_c - frecvența de tăiere a noului filtru.

$$\text{Transformarea TJ→TS [48]} \quad z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \quad (3.85)$$

cu: $a = -\frac{\cos[(\omega_c + \omega'_c)/2]}{\cos[(\omega_c - \omega'_c)/2]}$, ω'_c - frecvența de tăiere a noului filtru.

$$\text{Transformarea TJ→TB [48]} \quad z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1} \quad (3.86)$$

cu: $a_1 = 2\alpha K / (K + 1)$; $a_2 = (K - 1) / (K + 1)$, $\alpha = \frac{\cos[(\omega_{cu} + \omega_{cl})/2]}{\cos[(\omega_{cu} - \omega_{cl})/2]}$,

$K = ctg \frac{(\omega_{cu} - \omega_{cl})}{2} tg \frac{\omega_c}{2}$, ω_{cl} - frecvența inferioară de tăiere a filtrului dorit, ω_{cu} - frecvența superioară de tăiere a filtrului dorit.

$$\text{Transformarea TJ→OB [48]} \quad z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-1} - a_1 z^{-1} + 1} \quad (3.87)$$

Cu $a_1 = 2\alpha / (K + 1)$; $a_2 = (1 - K) / (K + 1)$, $\alpha = \frac{\cos[(\omega_{cu} + \omega_{cl})/2]}{\cos[(\omega_{cu} - \omega_{cl})/2]}$,

$K = tg \frac{(\omega_{cu} - \omega_{cl})}{2} tg \frac{\omega_c}{2}$, ω_{cl} - frecvența inferioară de tăiere a filtrului dorit, ω_{cu} - frecvența superioară de tăiere a filtrului dorit.

În realizarea transformărilor de frecvență trebuie avut grijă de tipul filtrului care trebuie să fie proiectat.

S-a arătat că metoda invarianței răspunsului la impuls nu este adecvată pentru proiectarea FTS și a multor FTB, datorită efectului de aliere spectrală. În consecință, nu se va efectua o transformare de frecvență analogică, urmată de o conversie a rezultatului în domeniul digital, folosind această corespondență. În schimb, este mai bine să se realizeze conversia dintr-un FTJ analogic în unul digital prin metoda invarianței răspunsului la impuls și abia apoi să se realizeze transformarea de frecvență în domeniul digital. Astfel se evită problema erorii alias.

În cazul transformării biliniare, unde aliasingul nu este o problemă, nu contează când are loc transformarea de frecvență, în domeniul analogic sau în cel digital, în acest caz rezultatele fiind identice.

3.3. Tehnici directe de proiectare a filtrelor digitale IIR

Ca o alternativă la tehnica transformării unui filtru analogic în unul digital există metoda proiectării filtrelor IIR digitale direct în domeniul timp sau Z , fără a face referire la cele analogice.

Metodele de proiectare din această categorie se bazează pe optimizare numerică și, în principiu, permit obținerea de filtre digitale ce aproximează orice tip de răspuns în domeniul timp sau frecvență.

Proiectarea directă a filtrelor IIR presupune următoarele etape:

1) Considerarea unei funcții raționale $H(z)$ de forma (3.3) cu ordinele M și N ale polinoamelor $B(z)$ și $A(z)$ fixate;

2) Alegerea unui criteriu de minimizare a erorii adecvat aplicației concrete. Eroarea se poate referi fie la modulul funcției de transfer, fie la faza acesteia, fie simultan la cele două caracteristici, în cazul aproximării în domeniul frecvență, sau la răspunsul la impuls $h[n]$, în cazul aproximării în domeniul timp.

3) Utilizarea unui algoritm, în general iterativ, pentru determinarea coeficienților $\{a_k\}, \{b_k\}$ ai lui $H(z)$ sau a secvenței $h[n]$, astfel încât eroarea dintre răspunsul dorit și cel realizat să fie minimizată.

În continuare vor fi prezentate câteva metode de proiectare directă a filtrelor IIR, în care specificațiile și proiectarea sunt în domeniul timp.

3.3.1. Metoda de aproximare Padé

În această metodă se presupune că răspunsul la impuls dorit $h_d[n]$ este specificat pentru $n \geq 0$. Filtrul ce urmează a fi proiectat are funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (3.88)$$

unde $h[n]$ este răspunsul la impuls. Filtrul are $L = M + N + 1$ parametri, și anume, coeficienții $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$, ce pot fi aleși astfel încât să minimizeze un criteriu de eroare.

Criteriul celor mai mici pătrate este adesea folosit în problemele de optimizare. În acest caz se minimizează suma pătratelor erorilor

$$E = \sum_{n=0}^U [h_d[n] - h[n]]^2 \quad (3.89)$$

în raport cu parametrii $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ ai filtrului, unde U este o limită superioară prestabilită pentru sumare, aleasă astfel încât eroarea de aproximare a a funcției de transfer sau a răspunsului la impuls să fie în limitele impuse de datele de proiectare.

În general, $h[n]$ este o funcție neliniară de parametrii filtrului și minimizarea lui E implică rezolvarea unui sistem de ecuații neliniare. Dacă limita superioară se selectează ca fiind $U = L - 1$, este posibil a adapta perfect răspunsul dorit $h_d[n]$ pentru $0 \leq n \leq M + N$. Aceasta se poate realiza în felul următor: filtrul ce urmează a fi proiectat este descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \quad (3.90)$$

Dacă intrarea în filtru este impulsul unitate, adică $x[n] = \delta[n]$, rezultă că $y[n] = h[n]$, adică

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \dots + b_M \delta[n-M] \quad (3.91)$$

Deoarece $\delta[n-k] = 0$ pentru $n \neq k$, relația (3.91) devine

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.92)$$

Pentru $n > M$, relația (3.91) devine

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] \quad (3.93)$$

Ecuțiile (3.92) și (3.93) pot fi folosite în determinarea coeficienților filtrului $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$. Se impune $h[n] = h_d[n]$ pentru $0 \leq n \leq M + N$ și se folosește sistemul de ecuații (3.93) pentru a determina $\{a_k\}$. Apoi, aceștia se introduc în (3.92), pentru a determina coeficienții $\{b_k\}$. Astfel, se obține o potrivire perfectă între $h[n]$ și $h_d[n]$ pentru primele L valori ale răspunsului la impuls. Această tehnică se numește, de obicei, *aproximarea Padé* [49].

Măsura în care această metodă permite obținerea de filtre acceptabile depinde, în parte, de numărul de coeficienți selectați. Evident, cu cât acesta este mai mare, cu atât va fi mai bună aproximarea. Acesta este un dezavantaj important al metodei, și anume, filtrul rezultat va avea mulți poli și multe zerouri, motiv pentru care folosirea sa în practică este limitată.

Exemplul 3.4.

Se presupune că răspunsul la impuls dorit este $h_d[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Să se determine parametrii filtrului cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \text{ folosind aproximarea Padé.}$$

Soluție. În acest exemplu simplu $H(z)$ se poate potrivi perfect cu $H_d(z)$ selectând $b_0 = 2$, $b_1 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$. Același lucru se poate obține și cu aproximarea Padé, după cum este ilustrat în continuare.

Cu intrarea $\delta[n]$, se obține

$$h[n] = -a_1 h[n-1] + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1]$$

pentru $n > 1$, $h[n] = -a_1 h[n-1]$ sau, impunând $h[n] = h_d[n-1]$,

$$h_d[n] = -a_1 h_d[n-1].$$

Înlocuind $h_d[n]$ în ultima relație, se obține

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = -a_1 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Pentru a determina b_0 și b_1 se folosește relația (3.92), de asemenea, cu condiția $h[n]=h_d[n]$.

$$\text{Se obține } h_d[n] = \frac{1}{2}h_d[n-1] + b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1].$$

Pentru $n=0 \rightarrow 2=b_0$, $n=1 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}2 + b_1 \rightarrow b_1 = 0$, deci $H(z)=H_d(z)$.

Acest exemplu arată că aproximarea Padé are ca rezultat o potrivire perfectă cu $H_d(z)$, când funcția de sistem dorită este o funcție rațională și se cunoaște numărul de poli și zerouri din funcția de sistem. Acesta nu este, în general, cazul în practică, deoarece $h_d[n]$ se determină din specificațiile răspunsului dorit în frecvență, $H_d(\omega)$. O soluție de a obține o aproximare bună a filtrului dorit cu metoda Padé este de a încerca diverse valori pentru M și N până când răspunsul în frecvență al filtrului rezultat converge la răspunsul în frecvență dorit cu o eroare de aproximare acceptabil de mică.

3.3.2. Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

În această metodă se adoptă un model pentru sistem și se determină parametrii modelului care minimizează în sensul celor mai mici pătrate eroarea dintre răspunsul sistemului real și răspunsul dorit.

Se presupune din nou că $h_d[n]$ este specificat pentru $n \geq 0$. Se începe cu cazul simplu, în care filtrul numeric ce urmează a fi proiectat conține numai poli, adică

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.94)$$

Fie conectarea în cascadă a filtrului dorit $H_d(z)$ cu filtrul invers $\frac{1}{H(z)}$, care este un filtru numai cu zerouri, ca în figura 3.10. Se

presupune că la intrarea cascadei din figura 3.10 se aplică excitația $\delta[n]$, astfel încât intrarea în sistemul invers este $h_d[n]$ și ieșirea $y[n]$. Ideal, ieșirea dorită este $y_d[n] = \delta[n]$. Ieșirea reală, $y[n]$, se obține astfel:

$$Y(z) = H_d(z) \cdot \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{b_0} H_d(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) \quad (3.95)$$

sau, în domeniul timp

$$y[n] = \frac{1}{b_0} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right) \quad (3.96)$$

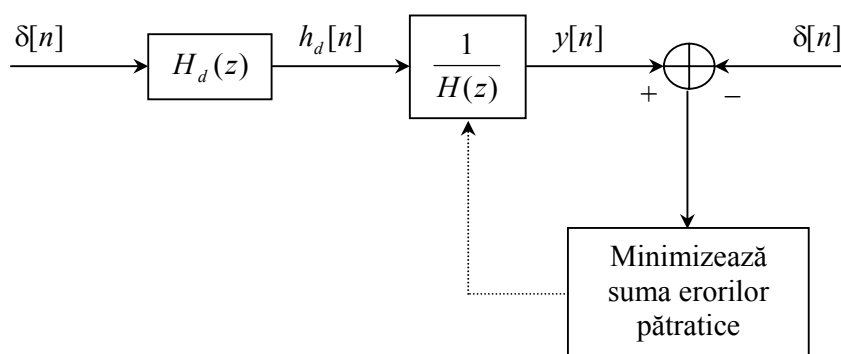


Figura 3.10 Proiectarea filtrului invers prin metoda celor mai mici pătrate

Condiția $y_d[0] = y[0] = 1$ este satisfăcută prin alegerea $b_0 = h_d[0]$. Pentru $n > 0$, $y[n]$ reprezintă eroarea dintre ieșirea dorită $y_d[n] = 0$ și ieșirea reală. Parametrii $\{a_k\}$ vor fi selectați astfel încât să minimizeze suma pătratelor secvenței de eroare:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} y^2[n] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2}{h_d^2[0]} \quad (3.97)$$

Minimumul acestei mărimi se obține pentru coeficienții $\{a_k\}$ rezultați din egalarea cu zero a derivatei lui E în raport cu $\{a_k\}$, de unde se obține un sistem de ecuații liniare.

$$E' = \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d^2[n] + 2h_d[n] \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \sum_{l=1}^N a_l h_d[n-l] \right) \right)}{h_d^2[0]} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2h_d[n] h_d[n-k] + \sum_{l=1}^N a_l h_d[n-k] h_d[n-l] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] h_d[n-l] \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r_{dd}[k,0] + \sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = -r_{dd}[k], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.98)$$

unde $r_{dd}[k,l]$ este secvența de autocorelație a lui $\{h_d[n]\}$, definită ca

$$r_{dd}[k,l] = \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-l] \quad (3.99)$$

Pentru secvențe staționare

$$r_{dd}[k,l] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] h_d[n+k-l] = r_{dd}[k-l] \quad (3.99')$$

$$r_{dd}[k,0] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] h_d[n-k] = r_{dd}[k] \quad (3.99'')$$

Sistemul de ecuații (3.98) poate fi scris matriceal

$$[R_{dd}][a] = [r_{dd}] \quad (3.100)$$

unde $[R_{dd}]$ este matricea de corelație, cu elementele $\{r_{dd}[k-l]\}$, de dimensiune $N \times N$, $[a]$ este vectorul $N \times 1$ al coeficienților filtrului și $[r_{dd}]$ este un vector $N \times 1$ cu elementele $\{-r_{dd}[k]\}$. Dacă există $[R_{dd}]^{-1}$, din (3.100) rezultă

$$[a] = [R_{dd}]^{-1} [r_{dd}] \quad (3.101)$$

Metoda descrisă se numește *metoda celor mai mici pătrate de proiectare a filtrului invers*.

Pentru o problemă de proiectare particulară, răspunsul la impuls dorit $h_d[n]$ este specificat pentru un număr finit de puncte; fie acesta $0 \leq n \leq L$, cu $L \gg N$. Într-un astfel de caz, secvența de corelație $r_{dd}[k]$ se poate calcula din secvența finită $h_d[n]$ cu relația

$$\hat{r}_{dd}[k-l] = \sum_{n=0}^{L-|k-l|} h_d[n] h_d[n+k-l], \quad 0 \leq k-l \leq N \quad (3.102)$$

aceste valori putând fi folosite pentru a forma pe $[R_{dd}]$ și $[r_{dd}]$. Astfel, sistemul de ecuații liniare (3.100) devine

$$[\hat{R}_{dd}][a] = [\hat{r}_{dd}] \quad (3.103)$$

$$[a] = [\hat{R}_{dd}]^{-1} [\hat{r}_{dd}] \quad (3.104)$$

O metodă alternativă de rezolvare a problemei de aproximare a filtrului numai cu poli se bazează pe conceptul de *predicție liniară* pe baza minimizării erorii în sensul celor mai mici pătrate [49]. După cum se arată în Figura 3.11, ieșirea filtrului numai cu poli la un impuls $\delta[n]$ este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + b_0 \delta[n] \quad (3.105)$$

sau, echivalent

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + b_0 \delta[n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.106)$$

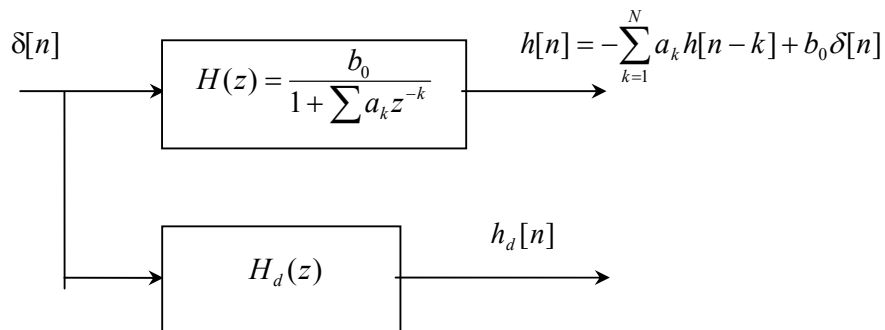


Figura 3.11. Proiectarea filtrului prin metoda celor mai mici pătrate bazată pe predicția liniară

Răspunsul dorit este $h_d[n]$. Dacă și acesta ar fi furnizat de un filtru numai cu poli, atunci

$$h_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] + b_0 \delta[n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.106')$$

Deoarece $h[0] = b_0$, se impune $b_0 = h_d[0]$. Pentru $n \geq 1$, (3.106) devine

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] \quad (3.107)$$

cu condiția inițială $h[n] = 0$ pentru $n < 0$.

În ipoteza că $H_d(z)$ este un filtru numai cu poli, atunci

$$h_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n \geq 1 \quad (3.108)$$

dar aceasta nu se întâmplă de obicei. Combinația liniară din membrul drept al relației (3.108) poate fi considerată ca un estimat al lui $h_d[n]$, adică

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n \geq 1 \quad (3.109)$$

$\hat{h}_d[n]$ se numește *valoarea predicției liniare* a lui $h_d[n]$. Suma pătratelor erorii de predicție dintre $h_d[n]$ și $\hat{h}_d[n]$ este

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (h_d[n] - \hat{h}_d[n])^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2 \quad (3.110)$$

Expresia din relația (3.110) este chiar aceeași funcție de eroare rezultată din setul de ecuații (3.98), ceea ce înseamnă că predicția liniară pe baza metodei celor mai mici pătrate conduce la același rezultat ca metoda celor mai mici pătrate de proiectare a filtrului invers.

3.3.3. Metoda Prony

Metoda predicției pe baza celor mai mici pătrate poate fi extinsă la o aproximare a lui $H_d(z)$ care conține poli și zerouri. Dacă filtrul $H(z)$ care aproximează $H_d(z)$ are atât poli cât și zerouri, atunci răspunsul său la un impuls $\delta[n]$ devine

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k], \quad n \geq 0 \quad (3.111)$$

sau, echivalent,

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.112)$$

și

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k], \quad n > M \quad (3.113)$$

Dacă $H_d(z)$ este un filtru cu poli și zerouri, răspunsul său la $\delta[n]$ ar trebui să satisfacă aceleași ecuații (3.111) ÷ (3.113), lucru care în general nu se întâmplă. Pe baza relației (3.113) se definește valoarea de predicție liniară a lui $h_d[n]$, ca fiind

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n > M \quad (3.114)$$

Ca și în cazul filtrului numai cu poli, suma pătratelor erorii de predicție este

$$E_1 = \sum_{n=M+1}^{\infty} (h_d[n] - \hat{h}_d[n])^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2 \quad (3.115)$$

Minimizarea lui E_1 în raport cu coeficienții $\{a_k\}$ conduce la sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k, l] = -r_{dd}[k, 0], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.116)$$

unde

$$r_{dd}[k, l] = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-l] \quad (3.117)$$

Ecuațiile (3.116), care dau estimării coeficienților $\{a_k\}$, notați $\{\hat{a}_k\}$, se reduc la aproximarea filtrului numai cu poli, când M se impune a fi zero. Parametrii $\{b_k\}$ ce determină zerourile filtrului se obțin din relația (3.112), unde $h[n] = h_d[n]$, prin înlocuirea valorilor $\{\hat{a}_k\}$ obținute din (3.116).

$$b_n = h_d[n] + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k h_d[n-k], \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.118)$$

În concluzie, parametrii $\{\hat{a}_k\}$ ce determină polii se obțin prin metoda celor mai mici pătrate, în timp ce parametrii $\{b_k\}$, care determină zerourile, se obțin ca în metoda de aproximare Padé. Această tehnică pentru determinarea polilor și zerourilor lui $H(z)$ se numește *metoda Prony*.

Metoda celor mai mici pătrate furnizează estimări buni pentru parametrii polilor. Metoda Prony poate să nu fie eficace pentru estimarea parametrilor $\{b_k\}$, deoarece aceștia nu rezultă din aplicarea unui criteriu de minimizare a erorii.

3.3.4. Metoda Shanks

O altă metodă, în care ambele seturi de parametri, $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$, se determină pe baza minimizării erorii de aproximare în sensul celor mai mici pătrate a fost propusă de *Shanks* (1967) [61]. Parametrii $\{a_k\}$ sunt calculați prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate, ca în relația (3.116), prezentată anterior. Aceasta produce estimări $\{\hat{a}_k\}$ ce permit sintetizarea filtrului numai cu poli

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}} \quad (3.119)$$

Răspunsul acestui filtru la $\delta[n]$ este

$$v[n] = -\sum_{k=1}^N \hat{a}_k v[n-k] + \delta[n], \quad n \geq 0 \quad (3.120)$$

Secvența $\{v[n]\}$ este folosită pentru a excita un filtru numai cu zerouri, cu funcția de sistem

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (3.121)$$

După cum se arată în figura 3.12, răspunsul acestuia este

$$\hat{h}_d[n] = \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \quad (3.122)$$

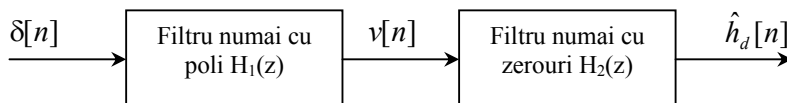


Figura 3.12. Folosirea metodei celor mai mici pătrate pentru determinarea polilor și zerourilor unui filtru

Se poate defini o secvență de eroare

$$e[n] = h_d[n] - \hat{h}_d[n] = h_d[n] - \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \quad (3.123)$$

și, în consecință, parametrii $\{b_k\}$ pot fi, de asemenea, determinați cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, și anume, prin minimizarea relației

$$E_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_d[n] - \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \right)^2 \quad (3.124)$$

în raport cu $\{b_k\}$. Astfel, se obține un sistem de ecuații liniare pentru parametrii $\{b_k\}$, în forma

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{vv}[k, l] = r_{hv}[l, 0], \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (3.125)$$

unde

$$r_{vv}[k, l] = \sum_{n=0}^{\infty} v[n-k]v[n-l] \quad (3.126)$$

$$r_{hv}[l, 0] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n]v[n-l] \quad (3.127)$$

3.3.5. Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

Până acum, criteriul de minimizare a erorii în sensul celor mai mici pătrate s-a folosit în proiectarea filtrelor cu poli și zerouri. O abordare similară va fi folosită pentru a determina filtrul invers FIR, pe baza metodei celor mai mici pătrate pentru un filtru dorit.

Sistemul invers al unui SDLIT, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$ și funcția de sistem $H(z)$, se definește ca fiind sistemul al cărui răspuns la impuls, $h_I[n]$, și funcție de sistem, $H_I(z)$, satisfac relațiile

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \quad (3.128)$$

$$H(z) \cdot H_I(z) = 1 \quad (3.129)$$

În general $H_I(z)$ este cu răspuns infinit la impuls, cu excepția cazului când $H(z)$ are numai poli, și $H_I(z)$ este cu răspuns finit la impuls. În multe aplicații practice este de dorit a restricționa filtrul invers să fie FIR și o metodă simplă de a obține acest lucru este de a trunchia $h_I[n]$, caz în care eroarea pătratică totală de aproximare devine

$$E_t = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_I^2[n] \quad (3.130)$$

unde $M + 1$ este lungimea filtrului trunchiat și E_t este energia “cozii” răspunsului la impuls $h_l[n]$.

Criteriul de minimizare a erorii de aproximare în sensul celor mai mici pătrate poate fi folosit la optimizarea celor $M + 1$ coeficienți ai filtrului FIR. Fie $d[n]$ secvența de ieșire dorită a filtrului de lungime $M + 1$ și fie $h[n]$ secvența de intrare. Atunci, dacă $y[n]$ este secvența de ieșire din filtrul invers, cum se arată în figura 3.13, secvența de eroare dintre secvența dorită și cea reală este

$$e[n] = d[n] - \sum_{k=0}^M b_k h[n-k] \quad (3.131)$$

unde b_k sunt coeficienții filtrului.

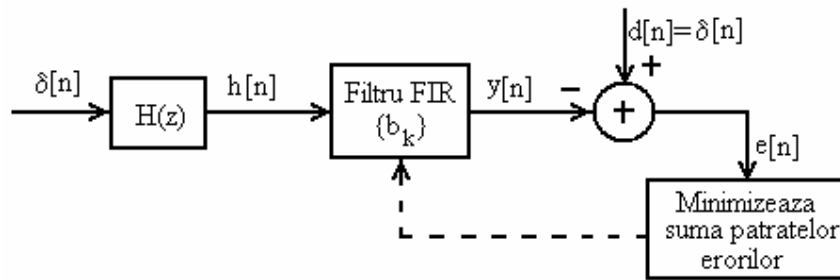


Figura 3.13. Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

Suma pătratelor secvenței de eroare este

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \left[d[n] - \sum_{k=0}^M b_k h[n-k] \right]^2 \quad (3.132)$$

Prin minimizarea lui E în raport cu coeficienții filtrului, rezultă sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}[k-l] = r_{dh}[l], \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (3.133)$$

unde $r_{hh}[l]$ este funcția de autocorelație a lui $h[n]$, presupus staționar, definită ca

$$r_{hh}[l] = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]h[n-l] \quad (3.134)$$

și $r_{dh}[l]$ este secvența de corelație dintre răspunsul dorit $d[n]$, de asemenea presupus staționar, și secvența de intrare $h[n]$, definită ca

$$r_{dh}[l] = \sum_{n=0}^{\infty} d[n]h[n-l] \quad (3.135)$$

Filtrul FIR optim în sensul celor mai mici pătrate, care satisface ecuațiile liniare (3.133) se numește *filtru Wiener*. Cum filtrul FIR optim în sensul celor mai mici pătrate, urmează să aproximeze filtrul invers, răspunsul dorit este $d[n] = \delta[n]$, caz în care corelația dintre $d[n]$ și $h[n]$ este

$$r_{dh}[l] = \begin{cases} h[0], l = 0 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases} \quad (3.136)$$

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR obținut cu metoda celor mai mici pătrate se obțin din soluția ecuației liniare (3.133), care se scrie matriceal

$$\begin{bmatrix} r_{hh}[0] & r_{hh}[1] & \dots & r_{hh}[M] \\ r_{hh}[1] & r_{hh}[0] & \dots & r_{hh}[M-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{hh}[M] & & & r_{hh}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Matricea este simetrică și are elementele de pe fiecare diagonală egale, adică este Toeplitz, caz în care poate fi inversată eficient cu algoritmul Levison - Durbin care necesită un număr de operații proportional cu M^2 în loc de M^3 , cum rezultă de obicei [49].

Înlocuind (3.133) în (3.132), rezultă valoarea minimă a sumei pătratelor erorilor obținută cu filtrul FIR optim

$$E_{\min} = \sum_{n=0}^{\infty} d^2[n] - \sum_{k=0}^M b_k r_{dh}[k] \quad (3.138)$$

În cazul când filtrul FIR este filtrul invers obținut pe baza metodei celor mai mici pătrate, $d[n] = \delta[n]$ și $r_{dh}[n] = h[0]\delta[n]$. Prin urmare,

$$E_{\min} = 1 - h[0] b_0 \quad (3.139)$$

Exemplul 3.5.

Să se determine filtrul FIR invers, de lungime 2, folosind metoda celor mai mici pătrate, al sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ -\alpha, n = 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

unde $|\alpha| < 1$. Să se compare soluția obținută folosind metoda celor mai mici pătrate cu inversul aproximativ prin trunchierea lui $h_I[n]$.

Soluție. Deoarece sistemul are funcția de sistem $H(z) = 1 - \alpha z^{-1}$, filtrul invers este IIR și $H_I(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ sau, echivalent, $h_I[n] = \alpha^n u[n]$. Dacă acesta este trunchiat după n termeni, energia reziduală este

$$E_t = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{2k} = \alpha^{2n} (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{\alpha^{2n}}{1 - \alpha^2}$$

Din (3.137) rezultă că filtrul FIR obținut prin metoda celor mai mici pătrate, de lungime 2, satisface ecuațiile

$$\begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cu soluția $b_0 = \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$, $b_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$. Pentru comparație, filtrul invers trunchiat de lungime 2 are coeficienții $b_0 = 1$, $b_1 = \alpha$.

Eroarea obținută prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate este $E_{\min} = \frac{\alpha^4}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$, față de $E_t = \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^2}$, pentru filtrul invers aproximativ prin trunchiere. Se observă că $E_t > E_{\min}$, astfel încât filtrul FIR invers obținut cu metoda celor mai mici pătrate are performanțe superioare.

În acest exemplu răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului este de fază minimă. Într-un astfel de caz, se selectează răspunsul dorit $d[0]=1$ și $d[n]=0$ pentru $n \geq 1$. Dacă sistemul nu este de fază minimă, ar trebui introdusă o întârziere în răspunsul dorit pentru a obține un filtru bun, care să aproximeze cât mai fidel răspunsul dorit. Valoarea întârzierii potrivite depinde de caracteristica lui $h[n]$. În acest caz se poate calcula eroarea filtrului obținut prin metoda celor mai mici pătrate pentru diferite întârzieri și apoi se selectează filtrul care produce cea mai mică eroare, ca în exemplul 3.6.

Exemplul 3.6.

Să se determine filtrul FIR invers, de lungime 2, folosind metoda celor mai mici pătrate, al sistemului cu răspunsul la impuls

$$h[n] = \begin{cases} -\alpha, n = 0 \\ 1, n = 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases} \quad \text{unde } |\alpha| < 1.$$

Soluție. Acesta este un sistem de faza maximă. Dacă se selectează $d[n] = [1 \ 0]$ se obține aceeași soluție ca în exemplul 3.5, cu eroarea minimă obținută prin metoda celor mai mici pătrate egală cu

$$E_{\min} = 1 - h[0]b_0 = 1 + \alpha \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$$

Dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $E_{\min} > 1$, care reprezintă un filtru invers neperformant. Dacă $-1 < \alpha < 0$ atunci $E_{\min} < 1$.

În particular, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, $E_{\min} = 1,57$, iar pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$E_{\min} = 0,81$, care este totuși o valoare foarte mare pentru eroarea pătratică.

Dacă se presupune că răspunsul dorit este $d[n] = \delta[n-1]$, coeficienții filtrului obținuți din (3.137) sunt

$$\begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(1) \\ b(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$b_0 = \frac{1}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}, \quad b_1 = \frac{-\alpha^3}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}.$$

Valoarea minimă a erorii obținute prin metoda celor mai mici pătrate, dată de relația (3.138), este

$$E_{\min} = 1 - b_0 r_{dh}[0] - b_1 r_{dh}[1] = 1 - b_0 h[1] - b_1 h[0] = \\ 1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 + \alpha^4} + \frac{\alpha^4}{1 + \alpha^2 + \alpha^4} = 1 - \frac{1 - \alpha^4}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$$

În particular, dacă se presupune $\alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow E_{\min} = 0,21$. În

consecință, răspunsul dorit $d[n] = \delta[n-1]$ are ca rezultat un filtru invers mult mai bun. Îmbunătățiri suplimentare se obțin prin creșterea lungimii filtrului invers.

În general, când răspunsul dorit este prevăzut să conțină o întârziere D , atunci secvența de corelație este

$$\begin{aligned} r_{dh}[l] &= \sum_{n=0}^{\infty} d[n]h[n-l] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-D]h[n-l] = \\ &= h[D-l], l = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (3.140)$$

În acest caz, ecuațiile liniare (10.137) devin

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}[k-l] = h[D-l] \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (3.141)$$

Expresia erorii, în cazul minimizării acesteia în sensul celor mai mici pătrate, dată în general de (3.138), devine

$$E_{\min} = 1 - \sum_{k=0}^M b_k h[D-k] \quad (3.142)$$

și este cea mai mică în comparație cu erorile rezultate din alte metode de aproximare.

3.4. Alegerea între filtrele FIR și IIR

Alegerea dintre cele două tipuri de filtre depinde de avantajele oferite de fiecare dintre ele și cerințele de proiectare.

1. Filtrul FIR poate avea răspunsul de fază perfect liniar, deci filtrul nu introduce nici o distorsiune de fază. Această cerință este importantă în transmisiile de date, biomedicină, procesare de imagini. Caracteristica fază - frecvență a filtrelor IIR este neliniară, mai ales la capetele benzii de trecere.
2. Filtrele FIR pot fi realizate totdeauna nerecursiv [63], fapt care le asigură stabilitatea. Stabilitatea filtrelor IIR nu e garantată întotdeauna.
3. Efectele folosirii unui număr limitat de biți în zgomotul de rotunjire și în eroarea de cuantizare a coeficienților sunt mai puțin severe pentru filtrele FIR decât pentru filtrele IIR și nu le afectează stabilitatea [21].
4. Filtrele FIR necesită mai mulți coeficienți pentru o bandă de tranziție la fel de îngustă ca a filtrelor IIR, deci, pentru o specificare a răspunsului în amplitudine, timpul necesar unui filtru FIR pentru procesare și stocare este mai mare.

5. Filtrele analogice pot fi transformate în echivalente digitale IIR, respectând specificații similare. Aceasta nu este posibil pentru un filtru FIR, acesta neavând corespondent analogic.
6. Filtrele FIR *cu fază liniară* prezintă un dezavantaj major constând în faptul că, în anumite aplicații, lungimea M a filtrului ce satisface cerințele de proiectare este mare. Aceasta implică în mod evident o întârziere de grup normală mare, egală cu $(M-1)/2$, ceea ce poate fi un impediment în acele aplicații din telecomunicații pentru care ecourile semnalelor transmise nu pot fi tolerate. De asemenea, în sistemele de control cu reacție, o întârziere mare în bucla de reacție este în general inacceptabilă.

În concluzie,

- Se folosesc filtre IIR, când se cere numai o caracteristică cu tăiere abruptă, în special folosind caracteristici eliptice, astfel rezultând mai puțini coeficienți decât în cazul filtrelor FIR.

- Se folosesc filtre FIR, când numărul de coeficienți nu este prea mare și nu sunt tolerate distorsiuni de fază.

Filtre analogice clasice folosite în proiectarea filtrelor IIR digitale

În continuare vor fi prezentate succint câteva filtre analogice prototip întâlnite mai frecvent în aplicații. Se va face referire numai la FTJ, trecerea la celelalte tipuri de filtre efectuându-se prin transformări de frecvență. După cum se știe, filtrul trece jos ideal nu este realizabil fizic [14], [26], [66], de aceea, caracteristica sa se poate doar aproxima. Există mai multe posibilități de aproximare [9]:

- Aproximare de tip maxim plat a caracteristicii amplitudine – frecvență, care conduce la o familie de filtre din care fac parte filtrele Butterworth.
- Aproximarea de tip maxim plat a timpului de întârziere de grup, care conduce la o familie de filtre din care fac parte filtrele Bessel.
- Aproximarea cu ripluri egale în banda de trecere și comportare monotonă în banda de oprire (filtre de tip Cebîșev I).
- Aproximarea cu ripluri egale în banda de oprire și comportare monotonă în banda de trecere (filtre de tip Cebîșev II).
- Aproximarea cu ripluri egale atât în banda de trecere, cât și în banda de oprire (filtre Caier sau eliptice).

3a.1. Filtre Butterworth

Filtrele Butterworth [66] sunt FTJ caracterizate de funcția de transfer care conține numai poli:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}} \quad (3a.1)$$

unde Ω_c este frecvența de tăiere (frecvența la -3dB), N – ordinul filtrului,

Ω_p marginea benzii de trecere, iar $(1 - \Delta_p)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ este

valoarea lui $|H(\Omega)|^2$ la capătul benzii de trecere.

Deoarece $H(s)H(-s)$ evaluat la $s = j\Omega$ este chiar $|H(\Omega)|^2$, rezultă

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2 / \Omega_c^2)^N} \quad (3a.2)$$

Polii lui $H(s)H(-s)$ sunt plasați pe un cerc de rază Ω_c , în puncte egal distanțate.

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/2N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.3)$$

Figura 3a.1 ilustrează poziția polilor unui filtru Butterworth pentru $N=4$ și $N=5$.

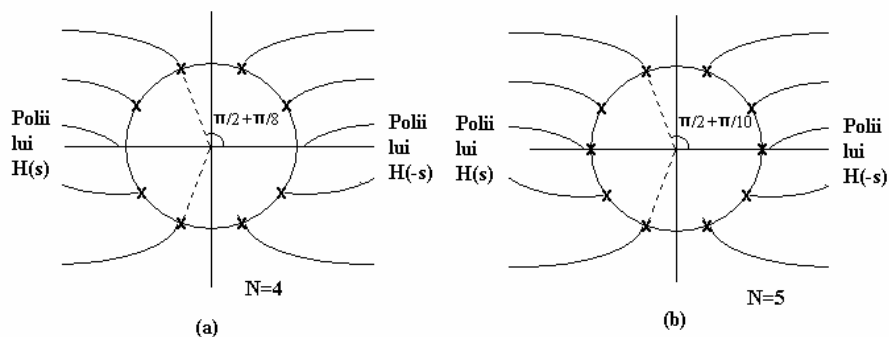


Figura 3a.1 Pozițiile polilor unui filtru Butterworth, $N=4$, $N=5$.

Filtrul Butterworth realizează o caracteristică de tip maxim plat la $\Omega=0$ în sensul că primele $2N-1$ derivate sunt nule la $\Omega=0$ [28].

În figura (3a.2) este reprezentat răspunsul de amplitudine pentru câteva valori ale ordinului N al funcției de transfer. Se observă caracterul monoton al caracteristicii atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire.

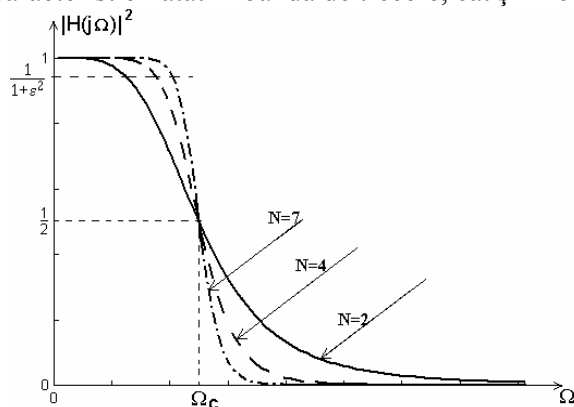


Figura 3a.2. Pătratul modulului normalizat al funcției de transfer a unui FTJ de tip Butterworth, pentru diverse valori ale ordinului filtrului

Se remarcă următoarele particularități:

- La $\Omega = \Omega_c$, indiferent de ordinul N , pătratul modului normalizat este $1/2$;
- Creșterea lui N atrage după sine:
 - îngustarea zonei de tranziție;
 - aproximarea mai bună a cerințelor FTJ ideal în sensul că $|H(\Omega)| \approx 0$, respectiv $|H(\Omega)| \approx 1$ într-o porțiune mai mare din B.O., respectiv din B.T.;
- Caracteristica $|H(\Omega)|^2$ realizează o aproximare de tip maxim plat și la $\Omega \rightarrow \infty$, pentru această frecvență toate derivatele fiind nule;
 Determinarea ordinului N care îndeplinește cerința de atenuare Δ_s la o frecvență specificată Ω_s , arătată în figura 3a.3, se face cu ajutorul relației (3a.1). Astfel, la $\Omega = \Omega_s$

$$\Delta_s^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)^{2N}} \quad (3a.4)$$

de unde rezultă

$$N = \frac{\lg[(1/\Delta_s^2) - 1]}{2 \lg(\Omega_s / \Omega_c)} = \frac{\lg(\delta / \varepsilon)}{\lg(\Omega_s / \Omega_p)} \quad (3a.5)$$

unde, prin definiție $\Delta_s = 1/\sqrt{1 + \delta^2}$. Astfel, filtrul Butterworth este complet caracterizat de parametrii N , Δ_s , ε și raportul Ω_s / Ω_p .

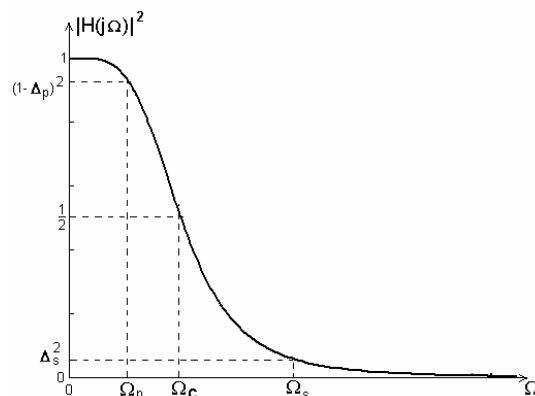


Figura 3a.3. Specificarea restricțiilor la proiectarea FTJ analogic de tip Butterworth

3a.2. Filtre Bessel

Ca și filtrele Butterworth, filtrele Bessel au funcția de transfer de tipul numai cu poli, adică:

$$H(s) = \frac{K}{B_N(s)} \quad (3a.6)$$

unde $B_N(s)$ este polinomul Bessel de ordinul N [1]. Acesta poate fi exprimat în forma

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k \quad (3a.7)$$

unde coeficienții $\{a_k\}$ sunt dați de expresia

$$a_k = \frac{(2N-k)!}{2^{N-k} k!(N-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3a.8)$$

Polinoamele Bessel pot fi generate recursiv cu ajutorul relației [49]

$$B_N(s) = (2N-1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s) \quad (3a.9)$$

cu inițializarea:

$$B_0(s) = 1, B_1(s) = s + 1 \quad (3a.10)$$

O caracteristică importantă a filtrelor Bessel este aceea că au răspunsul de fază liniar în banda de trecere a filtrului. În figura 3a.4 se prezintă, comparativ, caracteristicile amplitudine – frecvență și fază - frecvență pentru filtrele Butterworth și Bessel de ordinul 4. Banda de tranziție a filtrului Bessel este mare, comparativ cu alte tipuri de filtre. Din păcate, metodele de transformare ale filtrelor analogice în filtre digitale, nu conservă caracteristica de fază liniară a filtrelor Bessel analogice.

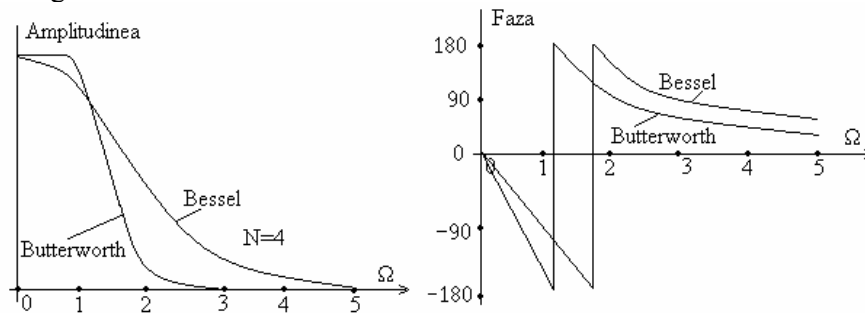


Figura 3a.4. Răspunsul de modul și de fază pentru filtrele Butterworth și Bessel de ordinul $N=4$.

3a.3 Filtre Cebîșev de tipul I

Filtrele Cebîșev de tipul I sunt filtre numai cu poli, a căror caracteristică de modul prezintă ripluri egale în banda de trecere, iar în banda de oprire caracteristica este monoton descrescătoare. Filtrele Cebîșev sunt filtre optimale, în sensul că, pentru o bandă de trecere dată și o atenuare specificată în banda de oprire, au cea mai mică regiune de tranziție, $\Omega_s - \Omega_p$, dintre toate filtrele care au numai poli finiți.

Pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)} \quad (3a.11)$$

unde ε este un parametru al filtrului ce depinde de riplul din banda de trecere, iar $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordinul N definit cu relația

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & \text{pentru } |x| > 1 \end{cases} \quad (3a.12)$$

Polinoamele Cebîșev pot fi generate cu relația recursivă

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x), \quad N > 1, \text{ cu } C_0(x) = 1, C_1(x) = x \quad (3a.13)$$

Din definiția (3a.12) se observă că

1. $|C_N(x)| \leq 1$, $|x| \leq 1$ și toți N .
 2. $|C_N(x)| > 1$, $|x| > 1$ și toți N .
 3. $|C_N(\pm 1)| = 1$.
 4. Toate rădăcinile polinomului $C_N(x)$ sunt în intervalul $-1 \leq x \leq 1$.
- $C_N^2(1) = 1$, iar $C_N^2(0)$ este 0 sau 1, după cum N este impar, respectiv par.

În consecință,

$$|H(\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{și} \quad |H(0)|^2 = \begin{cases} 1, & \text{pentru } N \text{ impar} \\ \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, & \text{pentru } N \text{ par} \end{cases} \quad (3a.14)$$

Ținând cont de relațiile (3a.12) și (3a.14) rezultă reprezentările grafice pentru $|H(\Omega)|$ din figurile 3a.5a pentru N impar, respectiv 3a.5b pentru N par, ambele oscilând între 1 și $1/(1 + \varepsilon^2)^{1/2}$ în banda de trecere.

În banda de oprire, caracteristica monoton descrescătoare a modului funcției de transfer realizează o aproximare de tip maxim plat a valorii ideale zero, deoarece toate derivatele sale se anulează pentru $\Omega \rightarrow \infty$. Panta de cădere a caracteristicii este cu atât mai mare cu cât ordinul filtrului este mai mare, iar pentru două filtre de același ordin panta este mai abruptă pentru cel cu ripluri mai mari în banda de trecere.

Performanțele filtrului sunt complet determinate de parametrul ε ce fixează mărimea riplului în banda de trecere și de ordinul N ce determină lățimea benzii de tranziție.

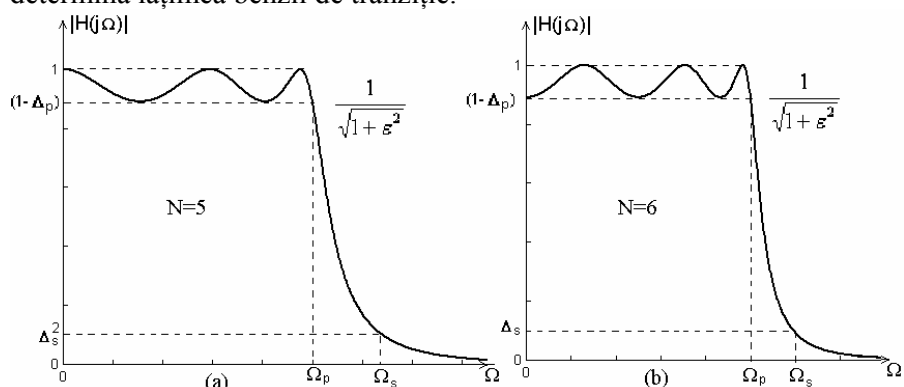


Figura 3a.5 Modulul funcției de transfer pentru filtrul analogic TJ Cebîșev de tipul I (a) pentru $N=5$ și (b) pentru $N=6$

Parametrul ε se determină din riplul Δ_p impus la proiectare, astfel:

$$(1 - \Delta_p)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{1}{(1 - \Delta_p)^2} - 1 \quad (3a.15)$$

Pentru găsierea ordinului N se impune condiția ca la frecvența limită a benzii de oprire (Ω_s), modulul funcției de transfer să ia valoarea Δ_s .

$$\begin{aligned} |H(\Omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega_s / \Omega_p)} = \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \{\cosh[N \cosh^{-1}(\Omega_s / \Omega_p)]\}^2} = \Delta_s^2 \end{aligned} \quad (3a.16)$$

Din relația de mai sus rezultă

$$N = \frac{\cosh^{-1}[(\sqrt{1/\Delta_s^2 - 1})/\varepsilon]}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\cosh^{-1}(\delta/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} \quad (3a.17)$$

unde, prin definiție $\Delta_s = 1/\sqrt{1 + \delta^2}$.

Polii filtrului Cebîșev de tip I se află pe o elipsă în planul s , cu axa mare

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \quad (3a.18)$$

și axa mică

$$r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \quad (3a.19)$$

unde

$$\beta = \left[\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1}{\varepsilon} \right]^{1/N} \quad (3a.20)$$

Pentru un filtru de ordin N , poziția polilor se determină mai ușor, localizând întâi polii pentru un filtru echivalent Butterworth de ordinul N pe un cerc de rază r_1 sau r_2 ca în figura 3a.6.

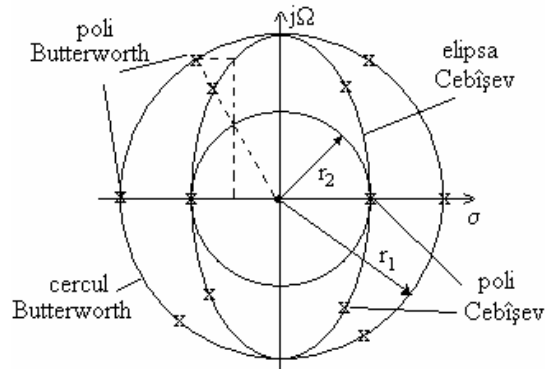


Figura 3a.6 Determinarea poziției polilor pentru un filtru Cebîșev de ordin $N=3$

Dacă se notează unghiul polilor filtrului Butterworth cu

$$\phi_k = \pi/2 + (2k + 1)\pi/2N \quad (3a.21)$$

atunci polii filtrului Cebîșev se află pe o elipsă de coordonate (x_k, y_k) , $k=0,1,\dots,N-1$, unde

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos \phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_k &= r_1 \sin \phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3a.22)$$

3a.4. Filtre Cebîșev de tipul II

Funcția de transfer a filtrului Cebîșev II conține atât poli cât și zerouri și caracteristica sa amplitudine – frecvență are o comportare monotonă în banda de trecere și prezintă ripluri egale în banda de oprire. Zerourile sunt pe axa imaginară a planului s .

Pătratulul modulului funcției de transfer pentru filtrul trece jos Cebîșev de tipul II este

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{C_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}{C_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega}\right)} \right]} \quad (3a.23),$$

unde $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordin N și Ω_s este frecvența începutului benzii de oprire.

Caracteristica amplitudine frecvență a filtrului Cebîșev II este reprezentată în figura 3a.7a pentru $N=5$ și în 3a.7b pentru $N=6$.

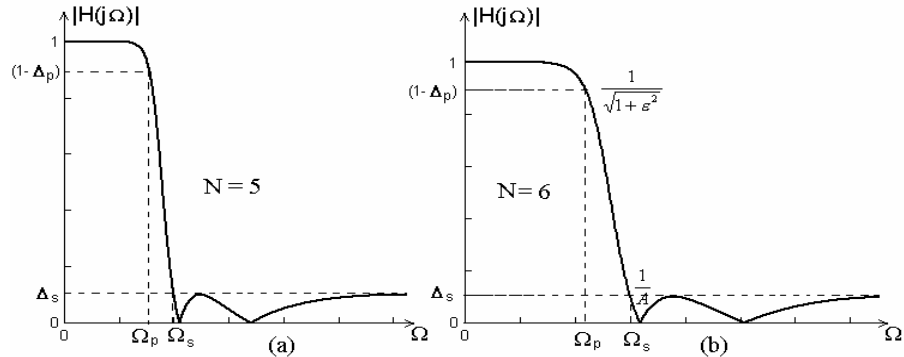


Figura 3a.7 Modulul funcției de transfer pentru filtrul analogic TJ Cebîșev de tipul II (a) pentru $N=5$ și (b) pentru $N=6$

Zerourile filtrului sunt localizate pe axa imaginară la

$$s_k = j \frac{\Omega_s}{\sin \phi_k}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.24)$$

Polii sunt localizați în puncte de coordonate (v_k, w_k) , unde

$$v_k = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.25)$$

$$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.26)$$

unde coordonatele $\{x_k\}$ și $\{y_k\}$ sunt definite de relațiile (3a.22), cu β dat de relația

$$\beta = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \Delta_s^2}}{\Delta_s} \right]^{1/N} \quad (3a.27)$$

Δ_s fiind riplul din banda de oprire.

Din cele prezentate până acum se observă că filtrele Cebîșev sunt complet caracterizate de parametrii N , Δ_s , ε și raportul Ω_s / Ω_p . Date fiind specificațiile ε , Δ_s și raportul Ω_s / Ω_p , ordinul filtrului se determină din condiția $|H(j\Omega_s)| = \Delta_s$.

$$N = \frac{\lg[(\sqrt{1 - \Delta_s^2} + \sqrt{1 - \Delta_s^2(1 + \varepsilon^2)}) / \varepsilon \Delta_s]}{\lg[(\Omega_s / \Omega_p) + \sqrt{(\Omega_s / \Omega_p)^2 - 1}]} = \frac{\cosh^{-1}(\delta / \varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s / \Omega_p)} \quad (3a.28)$$

Observație. La aceleași specificații de proiectare, filtrele Cebîșev rezultă cu număr de poli mai mic decât filtrele Butterworth. Dacă, însă, se compară un filtru Butterworth cu unul Cebîșev, având același număr de poli și aceleași specificații în B.T. (Banda de Trecere) și B.O. (Banda de Oprire), filtrul Cebîșev are o bandă de tranziție mai mică.

3a.5. Filtre eliptice

Filtrele eliptice (denumite și *filtre Cauer*) au o caracteristică de modul cu ripluri egale în ambele benzi, de trecere și oprire, motiv pentru care li se mai spune și *filtre echiriplu*. Aproximarea în sens Cebîșev a cerințelor filtrului trece jos ideal este extinsă la ambele benzi.

Pătratul modulului funcției de transfer are forma

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_N^2(\Omega)} \quad (3a.29)$$

unde $F_N(\Omega)$ este funcția rațională Cebîșev sau funcția eliptică iacobiană, introdusă pentru prima dată de Cauer în teoria circuitelor liniare, și tabulată de Zverev (1967) [69] iar ε este un parametru ce depinde de riplul din banda de trecere. Funcția $F_N(\Omega)$ se exprimă astfel:

$$F_N(\Omega) = \begin{cases} C_1 \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \Omega_0^4/\Omega_i^2} & \text{pentru } N \text{ par} \\ C_2 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \Omega_0^4/\Omega_i^2} \Omega & \text{pentru } N \text{ impar} \end{cases} \quad (3a.30)$$

Din relația precedentă se observă că funcția $F_N(\Omega)$ are polii și zerourile nebanale în număr egal, polii fiind plasați simetric față de zero în raport cu frecvența Ω_0 , definită ca medie geometrică a frecvențelor limită ale benzilor de trecere și oprire

$$\Omega_0^2 = \Omega_p \Omega_s \quad (3a.31)$$

Zerourile filtrului eliptic se găsesc pe axa $j\Omega$ a planului s .

În figura 3a.8 este reprezentat pătratul modulului funcției de transfer pentru un filtru eliptic de ordinul $N=4$ și $N=5$.

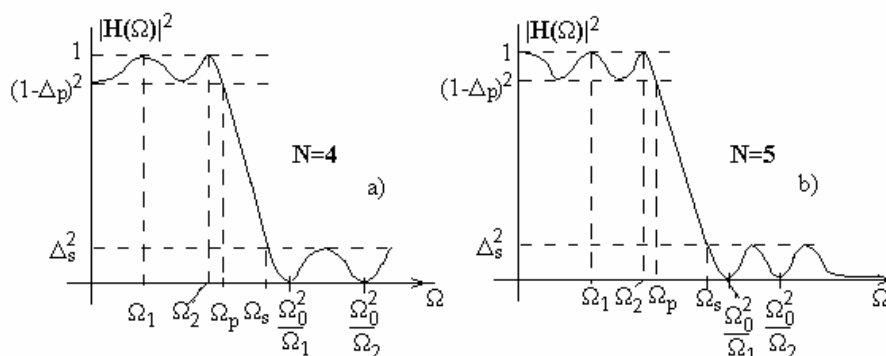


Figura 3a.8. Caracteristicile de modul ale filtrelor eliptice trece jos analogice : a) $N=4$, b) $N=5$

Din relațiile (3a.29) și (3a.30) se observă că

$$F_N(\Omega) = 0 \Rightarrow |H(\Omega)|^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega_i, N \text{ par} \\ \Omega = 0 \text{ și } \Omega = \Omega_i, N \text{ impar} \end{cases}$$

$$F_N(\Omega) \rightarrow \infty \Rightarrow |H(\Omega)|^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega_0^2/\Omega_i, N \text{ par} \\ \Omega = \Omega_0^2/\Omega_i \text{ și } \Omega \rightarrow \infty, N \text{ impar} \end{cases} \quad (3a.32)$$

Aceste relații conduc la următoarele observații:

a) pentru N par $|H(\Omega)|^2$ prezintă $N/2$ maxime (de valoare 1) în banda de trecere și $N/2$ minime (de valoare 0) în banda de oprire; pentru N impar sunt $(N-1)/2+1=(N+1)/2$ maxime în B.T. și tot $(N+1)/2$ minime în B.O.

b) numărul total al extremelor locale (minime și maxime) este $2N$ pentru $\Omega \in [0, \infty]$, N extreme în B.T. și tot N extreme în B.O.

Egalitatea numărului de extreme din cele două benzi este un dezavantaj al filtrelor eliptice în sensul că din punct de vedere al minimizării erorii maxime (la aproximarea Cebîșev) ar fi de dorit ca distribuția extremelor erorii între cele două benzi să se facă proporțional cu ponderile benzilor în intervalul de aproximare considerat.

Ordinul filtrului necesar îndeplinirii specificațiilor referitoare la riplul din banda de trecere, Δ_p , riplul din banda de oprire, Δ_s și raportul Ω_c / Ω_s este dat de relația [58]:

$$N = \frac{K(\Omega_p / \Omega_s) K\left(\sqrt{1 - \Delta_s^2(1 + \varepsilon^2)} / \sqrt{1 - \Delta_s^2}\right)}{K(\varepsilon \Delta_s / \sqrt{1 - \Delta_s^2}) K\left(\sqrt{1 - (\Omega_p / \Omega_s)^2}\right)} = \frac{K(\Omega_p / \Omega_s) K\left(\sqrt{1 - (\varepsilon / \delta)^2}\right)}{K(\varepsilon / \delta) K\left(\sqrt{1 - (\Omega_p / \Omega_s)^2}\right)} \quad (3a.33)$$

unde $K(\circ)$ este *integrala eliptică complexă* de prima speță, definită ca

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{(1 - x^2 \sin^2 \Phi)^{1/2}} \quad (3a.34)$$

Proiectarea cea mai eficientă se produce când eroarea de aproximare este întinsă în mod egal peste bandă de trecere și banda de oprire. Filtrele eliptice întrunesc aceste condiții și, în comparație cu celelalte tipuri de filtre, pentru aceleași specificații date, rezultă cu ordinul cel mai mic. Echivalent, pentru un set de specificații și un ordin dat, filtrele eliptice au cea mai mică bandă de tranziție. Filtrele eliptice sunt considerate optime (întocmai ca filtrele FIR proiectate cu metoda de schimb Remez), în sensul că, pentru un același ordin N și aceleași frecvențe limită Ω_p, Ω_s , realizează cele mai mici ripluri Δ_p, Δ_s , comparativ cu toate celelalte tipuri de filtre.

Răspunsul în fază al filtrelor eliptice este puternic neliniar în banda de trecere, în special spre capetele acesteia, în comparație cu celelalte tipuri de filtre, motiv pentru care filtrele Butterworth și Cebîșev se preferă în aplicații care necesită o bună caracteristică de fază.