

## CAPITOLUL 1

### CARACTERIZAREA SISTEMELOR DISCRETE, LINIARE, INVARIANTE ÎN TIMP ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

Obiectul capitolului de față îl constituie caracterizarea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp (SDLIT) în domeniul frecvență. Se va arăta că un astfel de sistem este caracterizat în domeniul frecvență de transformata Fourier a răspunsului său la impuls. Această caracterizare conduce la opinia conform căreia un SDLIT acționează ca un filtru asupra diferitelor componente de frecvență ale intrării. În acest demers, semnalele de excitație sunt exponențialele complexe și semnalele armonice.

Caracterizarea SDLIT în domeniul frecvență este realizată cu ajutorul unei funcții de variabilă  $\omega$ , notată  $H(\omega)$  și numită răspuns în frecvență, care este în legătură cu funcția de sistem  $H(z)$  și răspunsul la impuls  $h[n]$  al sistemului [63].

Răspunsul în frecvență caracterizează complet SDLIT și permite determinarea răspunsului sistemului la semnale de intrare care pot fi exprimate cu ajutorul semnalelor exponențiale complexe și armonice.

#### 1.1. Răspunsul SDLIT la semnale exponențiale complexe și armonice

Răspunsul oricărui SDLIT la un semnal de intrare arbitrar  $x[n]$  este dat de suma de convoluție [63]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (1.1)$$

În această relație sistemul este caracterizat în domeniul timp de răspunsul la impuls  $\{h[n], n \in Z\}$ .

Se presupune că sistemul este excitat de semnalul exponențial complex

$$x[n] = A e^{j\omega_0 n}, \quad n \in Z \quad (1.2)$$

unde  $A$  este amplitudinea și  $\omega_0$ , frecvența unghiulară a semnalului discret de intrare din intervalul fundamental  $[-\pi, \pi]$ . Înlocuind (1.2) în (1.1), se obține

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] [A e^{j\omega_0(n-k)}] = A \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right] e^{j\omega_0 n} \quad (1.3)$$

Termenul din paranteză din relația (1.3) este transformata Fourier  $H(\omega)$  a răspunsului la impuls  $h[k]$  al sistemului

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \quad (1.4)$$

evaluată la frecvența unghiulară  $\omega_0$ , a semnalului de intrare, adică

$$H(\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \quad (1.4')$$

Funcția  $H(\omega)$  există dacă sistemul este stabil în sens MIMÉ (Mărginit la Intrare Mărginit la ieșire) [63], adică dacă  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ .

Mărimea  $H(\omega)$  poate fi, de asemenea, văzută ca transformata  $Z$  a răspunsului la impuls  $h[n]$  evaluată pe cercul unitate, dacă aceasta nu are poli pe cercul unitate [63].

Cu (1.4'), răspunsul sistemului la o exponențială complexă este

$$y[n] = A H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} \quad (1.5)$$

Din (1.5) se observă că răspunsul este, de asemenea, o exponențială complexă, de aceeași frecvență cu a intrării, dar diferită față de semnalul de intrare printr-un factor de multiplicare,  $H(\omega_0)$ . Ca urmare a acestei caracteristici, semnalul de intrare (1.2) se numește *funcție proprie* a sistemului. Cu alte cuvinte, o *funcție proprie* a unui sistem este un semnal de intrare care produce o ieșire ce diferă de intrare printr-un factor de multiplicare constant. Factorul de multiplicare se numește *valoare proprie* a sistemului. În acest caz, un semnal exponențial complex de forma (1.2) este o funcție proprie a unui SDLIT și  $H(\omega)$  evaluată la frecvența semnalului de intrare este valoarea proprie corespunzătoare.

### **Exemplul 1.1.**

Să se determine secvența de ieșire a sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (1.6)$$

dacă semnalul de intrare este  $x[n] = A e^{j\pi n/2}$ ,  $n \in Z$ .

*Soluție.*

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \quad (1.7)$$

La  $\omega = \pi/2$ , (1.7) devine

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,6^\circ}$$

și secvența de ieșire este

$$y[n] = A \left( \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,6^\circ} \right) e^{j\pi n/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} A e^{j(\pi n/2 - 26,6^\circ)}, \quad n \in Z \quad (1.8)$$

Se observă că singurul efect al sistemului asupra semnalului de intrare constă în scalarea amplitudinii cu  $2/\sqrt{5}$  și defazarea cu  $-26,6^\circ$ . Semnalul de ieșire este, deci, o exponențială complexă de frecvență  $\pi/2$ , aceeași cu a semnalului de intrare, amplitudine  $2A/\sqrt{5}$  și fază  $-26,6^\circ$ .

Dacă se modifică frecvența semnalului de intrare, se schimbă efectul sistemului asupra intrării și, implicit, ieșirea. De exemplu, dacă semnalul de intrare este o exponențială complexă de frecvență  $\pi$ , adică

$$x[n] = A e^{j\pi n} \quad (1.9)$$

atunci, la  $\omega = \pi$ ,

$$H(\pi) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\pi}} = \frac{2}{3}$$

și ieșirea este

$$y[n] = \frac{2}{3} A e^{j\pi n}, \quad n \in Z \quad (1.10)$$

Se observă că  $H(\pi)$  este real, deci ieșirea este intrarea scalată cu  $H(\pi) = 2/3$  și nedefazată.

În general,  $H(\omega)$  este o funcție complexă de variabilă  $\omega$ , care poate fi exprimată în coordonate polare, sub forma

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (1.11)$$

Trecerile prin zero ale funcției de transfer conduc la salturi de fază de  $\pi$  radiani, așa încât  $\theta(\omega)$  are discontinuități în acele puncte. Din acest motiv, răspunsul în frecvență se mai exprimă sub forma

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} = H_R(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \angle H_R(\omega) + \varphi(\omega) \quad (1.11')$$

Deoarece  $H(\omega)$  caracterizează răspunsul sistemului în domeniul frecvență, acesta se numește *răspunsul în frecvență* al sistemului.

Mărimea  $|H(\omega)|$  se numește *răspunsul de amplitudine* sau de *modul* și este modulul transformatei Fourier a răspunsului la impuls, iar  $\theta(\omega) = \angle H(\omega)$  se numește *răspuns de fază* și este faza asociată transformatei Fourier  $H(\omega)$  a răspunsului la impuls.

Uneori, transformata Fourier mai este cunoscută sub numele de *spectru Fourier* sau, mai simplu, *spectru*, motiv pentru care se mai întâlnește terminologia de *spectru de amplitudine* sau de *modul* pentru a face referire la  $|H(\omega)|$  și *spectru de fază* pentru  $\theta(\omega)$ .

Uneori modulul este reprezentat logaritmically sub forma

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 10 \log_{10} |H(\omega)|^2 \quad (1.12)$$

Faza  $\theta(\omega)$  din relația (1.11) nu este unic determinată, deoarece prin adăugarea oricărui multiplu întreg de  $2\pi$  la  $\theta(\omega)$ , valoarea exponențialei complexe nu se modifică. Se definește *valoarea principală* a lui  $\theta(\omega)$ , notată cu  $\text{ARG}[H(\omega)]$ , cea cuprinsă în domeniul fundamental de valori  $[-\pi, \pi]$ . Dacă faza depășește acest interval, datorită periodicității de  $2\pi$  a acesteia, este necesar un salt de  $\pm 2\pi$  pentru a o aduce înapoi în intervalul fundamental. În unele situații este însă util a considera faza ca o funcție continuă de  $\omega$ , numită *funcție totală de fază*, pentru  $0 \leq \omega < \pi$  și se va nota cu  $\text{Arg}[H(\omega)]$ . Aceasta se poate determina din valoarea principală, prin adăugarea sau scăderea valorii de  $2\pi$  radiani în punctele de discontinuitate, după cum se arată în figura 1.1. Această procedură se numește de *desfășurare a fazei*.

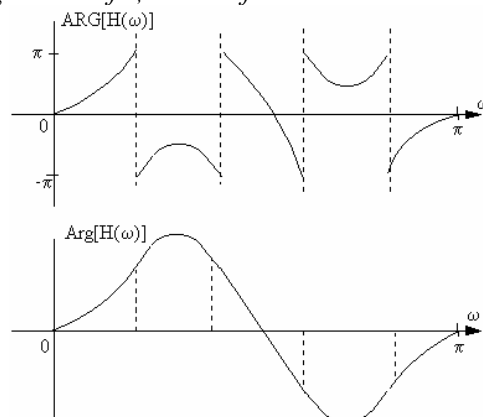


Figura 1.1. (a) Valoarea principală a fazei unui sistem, (b) Funcția totală de fază

$$-\pi \leq \text{ARG}[H(\omega)] \leq \pi \quad (1.13)$$

$$\text{Arg}(\omega) = \text{ARG}[H(\omega)] + 2\pi r(\omega) \quad (1.14)$$

unde  $r(\omega)$  este un întreg care poate fi diferit la diverse valori ale lui  $\omega$ .

Dacă în calculul răspunsului de fază se folosește valoarea principală, atunci aceasta va fi o funcție discontinuă. Discontinuitățile introduse de considerarea valorii principale vor consta în salturi de  $2\pi$  radiani.

O proprietate importantă a lui  $H(\omega)$  este că această funcție este periodică, de perioadă  $2\pi$ , ceea ce se observă din relația (1.4).

$$H(\omega + 2\pi m) = H(\omega),$$

unde  $m$  este întreg oarecare. Relația (1.4) este dezvoltarea în serie Fourier a lui  $H(\omega)$ ,  $h[k]$  fiind coeficienții dezvoltării. În consecință, răspunsul la impuls  $h[k]$  se obține cu relația [63]

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (1.15)$$

în care integrarea s-a efectuat pe intervalul fundamental pentru frecvența unghiulară discretă  $[-\pi, \pi]$ .

Pentru un SDLIT al cărui răspuns la impuls este real, modulul și faza lui  $H(\omega)$  au proprietăți de simetrie, după cum urmează:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \omega k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sin \omega k = \\ &= H_R(\omega) + j H_I(\omega) = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} e^{j \arctg[H_I(\omega)/H_R(\omega)]} \end{aligned} \quad (1.16)$$

unde  $H_R(\omega)$  și  $H_I(\omega)$  reprezintă componenta reală, respectiv imaginara a lui  $H(\omega)$ , adică

$$\begin{aligned} H_R(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \omega k \\ H_I(\omega) &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sin \omega k \end{aligned} \quad (1.17)$$

Se observă că

$$H_R(\omega) = H_R(-\omega) \quad (1.18)$$

$$\text{și} \quad H_I(\omega) = -H_I(-\omega) \quad (1.19)$$

adică  $H_R(\omega)$  este o funcție pară, iar  $H_I(\omega)$  este impară. Drept urmare,

$|H(\omega)|$  este o funcție pară, iar  $\theta(\omega) = \arctg \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$  este o funcție impară.

Cu alte cuvinte, dacă se cunoaște  $|H(\omega)|$  și  $\theta(\omega)$  pentru  $0 \leq \omega \leq \pi$ , atunci se cunosc aceste funcții și pentru  $-\pi \leq \omega \leq 0$ .

Proprietățile de simetrie satisfăcute de modulul și faza lui  $H(\omega)$  și faptul că un semnal armonic poate fi exprimat ca suma sau diferența a două funcții exponențiale complexe scalate corespunzător determină ca răspunsul unui SDLIT la un semnal armonic să fie similar cu răspunsul sistemului la o exponențială complexă.

Într-adevăr, dacă intrarea este

$$x_1[n] = A e^{j\omega n} \quad (1.20)$$

ieșirea este

$$y_1[n] = A |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} e^{j\omega n} \quad (1.21)$$

Dacă intrarea este

$$x_2[n] = A e^{-j\omega n} \quad (1.22)$$

ieșirea este

$$y_2[n] = A |H(-\omega)| e^{j\theta(-\omega)} e^{-j\omega n} = A |H(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} e^{-j\omega n} \quad (1.23)$$

Aplicându-se proprietatea de liniaritate pentru SDLIT [63], se poate determina răspunsul sistemului la semnalul de intrare

$$x[n] = \frac{1}{2} (x_1[n] + x_2[n]) = A \cos \omega n \quad (1.24)$$

$$y[n] = \frac{1}{2} (y_1[n] + y_2[n]) = A |H(\omega)| \cos[\omega n + \theta(\omega)] \quad (1.25)$$

Similar, dacă

$$x[n] = \frac{1}{2j} (x_1[n] - x_2[n]) = A \sin \omega n \quad (1.26)$$

răspunsul sistemului este

$$y[n] = \frac{1}{2j} (y_1[n] - y_2[n]) = A |H(\omega)| \sin[\omega n + \theta(\omega)] \quad (1.27)$$

Din cele prezentate până acum se observă că  $H(\omega)$  sau, echivalent,  $|H(\omega)|$  și  $\theta(\omega)$  caracterizează complet efectul sistemului asupra semnalului de intrare armonic, de frecvență arbitrară. Dacă semnalul de intrare este compus din mai multe componente armonice, răspunsul sistemului se obține cu ajutorul proprietății de superpoziție a sistemelor liniare.

## 1.2. Răspunsul de regim permanent și tranzitoriu al sistemelor discrete, liniare, invariante în timp la semnale de intrare armonice

Pentru a evidenția răspunsurile de regim permanent și tranzitoriu, se consideră un sistem descris de o ecuație cu diferențe de ordinul întâi, de forma

$$y[n] = a y[n-1] + x[n] \quad (1.28)$$

Cunoscută fiind condiția inițială  $y[-1]$  pentru sistem, răspunsul acestuia la o intrare  $x[n]$  aplicată la  $n = 0$  se poate determina recursiv pentru  $n \geq 0$ , ca fiind

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0 \quad (1.29)$$

Se presupune că semnalul de intrare este exponențiala complexă

$$x[n] = A e^{j\omega n}, \quad n \geq 0 \quad (1.30)$$

care se aplică la momentul  $n = 0$ . Înlocuind (1.30) în (1.29) se obține

$$\begin{aligned} y[n] &= a^{n+1} y[-1] + A \sum_{k=0}^n a^k e^{j\omega(n-k)} = a^{n+1} y[-1] + A \left[ \sum_{k=0}^n (a e^{-j\omega})^k \right] e^{j\omega n} = \\ &= a^{n+1} y[-1] - \frac{A a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n} + \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Răspunsul sistemului este format din răspunsul tranzitoriu și răspunsul permanent.

Sistemul descris de (1.28) este stabil în sens MIMÉ, dacă  $|a| < 1$  [63]. Răspunsul de regim permanent este cel înregistrat la un timp suficient de mare după aplicarea semnalului de intrare și se obține ca limită din  $y[n]$ , pentru  $n$  tinzând la infinit. În acest caz, termenii care conțin pe  $a^{n+1}$  din (1.31) tind la zero și, în consecință, răspunsul de regim permanent este

$$y_{ss}[n] = \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n} = A H(\omega) e^{j\omega n} \quad (1.32)$$

Se observă că răspunsul de regim permanent este determinat de sistem, prin  $H(\omega)$  și semnalul de intrare,  $A e^{j\omega n}$ , ne-depinzând de condiția inițială.

Primii doi termeni din (1.31) reprezintă răspunsul tranzitoriu al sistemului, adică

$$y_r[n] = a^{n+1} y[-1] - \frac{A a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}, \quad n \geq 0 \quad (1.33)$$

care descrește la zero pentru  $n$  tinzând la infinit. Primul termen al răspunsului tranzitoriu este răspunsul de intrare zero al sistemului, în timp ce al doilea termen se datorează semnalului exponențial de intrare. Se observă că răspunsul de regim tranzitoriu este determinat de sistem, prin parametrul  $a$ , semnalul de intrare,  $A e^{j\omega n}$ , și condiția inițială  $y[-1]$ .

În general, toate sistemele stabile în sens MIME se comportă similar atunci când sunt excitate cu exponențiale complexe sau semnale armonice la un moment oarecare de timp finit, adică răspunsul tranzitoriu tinde la zero, rămânând numai răspunsul de regim permanent.

### 1.3. Răspunsul de regim permanent al SDLIT la semnale de intrare periodice

Se presupune că intrarea unui SDLIT stabil este un semnal periodic  $x[n]$ , de perioadă fundamentală  $N$ . Atât timp cât un astfel de semnal există pentru  $-\infty < n < \infty$ , răspunsul total al sistemului la orice moment  $n$ , finit, este răspunsul de regim permanent. Pentru determinarea răspunsului  $y[n]$  al sistemului, se reprezintă semnalul de intrare periodic în serie Fourier [35]

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.34)$$

unde  $\{c_k\}$  sunt coeficienții seriei Fourier. Răspunsul sistemului la semnalul exponențial complex

$$x_k[n] = c_k e^{j2\pi k n/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.35)$$

este

$$y_k[n] = c_k H\left(\frac{2\pi}{N} k\right) e^{j2\pi k n/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.36)$$

unde 
$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = H(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.37)$$

Folosind principiul superpoziției, se obține răspunsul sistemului la semnalul periodic  $x[n]$ ,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi k n/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.38)$$



Acest rezultat implică faptul că și răspunsul sistemului la semnalul de intrare periodic  $x[n]$  este, de asemenea, periodic, de aceeași perioadă  $N$ .

Coefficienții seriei Fourier pentru  $y[n]$  sunt

$$d_k = c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.39)$$

În concluzie, sistemul liniar poate modifica forma semnalului periodic de intrare prin scalarea amplitudinii, poate defaza componentele seriei Fourier, dar nu afectează perioada semnalului de intrare.

#### 1.4. Răspunsul SDLIT la semnale de intrare aperiodice

În continuare, se pune problema determinării răspunsului sistemelor discrete, liniare, invariante în timp la semnale aperiodice de energie finită, demers în care va fi folosită transformata Fourier pentru semnale discrete.

Răspunsul unui SDLIT relaxat (care are condiții inițiale nule) la un semnal de intrare  $x[n]$  este dat de suma de convoluție dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (1.40)$$

Aplicând transformata Fourier relației (1.40), se obține

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (1.41)$$

Relația (1.41) caracterizează sistemul în domeniul frecvență, arătând că spectrul semnalului de la ieșire este egal cu spectrul semnalului de intrare multiplicat cu răspunsul în frecvență al sistemului. Relația (1.41) poate fi scrisă în formă polară

$$Y(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_h(\omega)} |X(\omega)| e^{j\theta_x(\omega)} = |H(\omega)| |X(\omega)| e^{j[\theta_x(\omega) + \theta_h(\omega)]} \quad (1.42)$$

În consecință, modulul și faza răspunsului  $Y(\omega)$  se determină cu relațiile

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)| \quad (1.43)$$

și

$$\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \theta_h(\omega) \quad (1.44)$$

Semnalul de intrare aperiodic, de energie finită are spectrul continuu, iar sistemul discret, liniar, invariant în timp, prin răspunsul său în frecvență, atenuază sau amplifică unele componente ale semnalului de

intrare. Din alura lui  $|H(\omega)|$  se observă care componente de frecvență sunt atenuate și care amplificate. Faza lui  $H(\omega)$  indică defazajul pe care îl suferă componentele semnalului de intrare.

De asemenea, se observă că ieșirea unui SDLIT stabil nu poate conține componente de frecvență care nu sunt conținute în semnalul de intrare, adică sistemul nu poate crea componente noi de frecvență.

În figura 1.2 este reprezentat schematic un SDLIT, care este descris de suma de convoluție în domeniul timp, de funcția de sistem  $H(z)$  sau de răspunsul în frecvență  $H(\omega)$ .

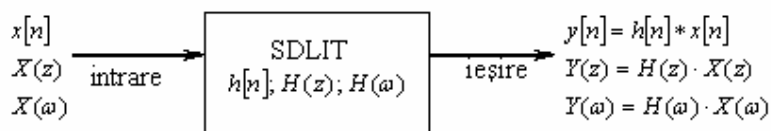


Figura 1.2. Relații intrare – ieșire pentru un SDLIT relaxat, în domeniile timp, Z și frecvență

Dacă pentru un astfel de sistem se cunoaște ieșirea  $Y(\omega)$  în domeniul frecvență, răspunsul sistemului în domeniul timp se determină cu relația [63]

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (1.45)$$

integrarea efectuându-se pe domeniul fundamental al frecvențelor unghiulare discrete.

Din (1.43) se obține

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 \quad (1.46)$$

sau, echivalent

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1.47)$$

unde  $S_{yy}(\omega)$  și  $S_{xx}(\omega)$  reprezintă densitatea spectrală de energie al semnalelor  $y[n]$ , respectiv  $x[n]$ , definite de relațiile [34].

$$S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2 \quad (1.48)$$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (1.48')$$

Integrând relația (1.47) pe domeniul fundamental de frecvență, se obține energia semnalului de ieșire, de forma

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega \quad (1.49)$$

Răspunsul la impuls a  $L$  SDLIT conectate în paralel este dat de [63]

$$h[n] = \sum_{k=1}^L h_k[n] \quad (1.50)$$

unde  $h_k[n]$ ,  $k = 1, \dots, L$ , este răspunsul la impuls al sistemelor individuale.

Folosind proprietatea de liniaritate a transformatei Fourier, se găsește răspunsul în frecvență al sistemului echivalent

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^L H_k(\omega) \quad (1.51)$$

unde  $H_k(\omega)$  este răspunsul în frecvență corespunzător sistemului cu răspunsul la impuls  $h_k[n]$ .

Dacă cele  $L$  SDLIT sunt conectate în cascadă, răspunsul la impuls al sistemului echivalent este

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \dots * h_L[n] \quad (1.52)$$

Aplicând transformata Fourier expresiei (1.52), se obține

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot \dots \cdot H_L(\omega) \quad (1.53)$$

Figura 1.3 ilustrează interconectarea în paralel și în serie a două SDLIT.

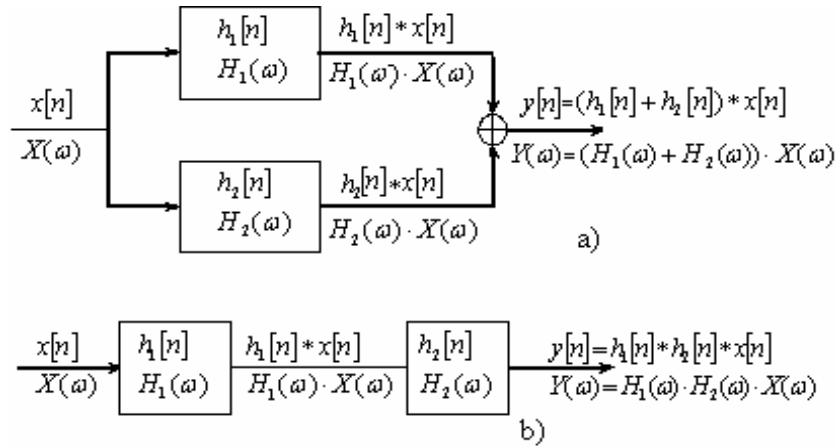


Figura 1.3. Conectarea SDLIT în (a) paralel și (b) cascadă

## 1.5. Relația între funcția de sistem și răspunsul în frecvență al sistemului

Dacă funcția de sistem  $H(z)$  converge pe cercul unitate, se poate obține răspunsul în frecvență al sistemului prin evaluarea lui  $H(z)$  pe cercul unitate [63].

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (1.54)$$

Pentru cazul în care  $H(z)$  este o funcție rațională, de forma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.54')$$

rezultă

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})} \quad (1.54'')$$

unde coeficienții  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  sunt reali, iar  $\{z_k\}$  și  $\{p_k\}$  pot fi mărimi reale și/sau complexe. Uneori este convenabil a se exprima pătratul modulului lui  $H(\omega)$  în funcție de  $H(z)$ .

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) \quad (1.55)$$

unde  $H^*(\omega)$  este mărimea complex conjugată a lui  $H(\omega)$ .

Dacă  $H(\omega)$  se exprimă prin (1.54''), rezultă

$$H^*(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* e^{j\omega})}, \quad (1.56)$$

adică  $H^*(\omega)$  se obține din evaluarea lui  $H^*(1/z^*)$

$$H^*(1/z^*) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* z)} \quad (1.56')$$

pe cercul unitate.

Dacă  $\{h[n]\}$  este real sau, echivalent, coeficienții  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  sunt reali, polii și zerourile complexe apar în perechi conjugate și  $H^*(1/z^*)=H(z^{-1})$ . În consecință,  $H^*(\omega) = H(-\omega)$  și

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.57)$$

Conform teoremei de corelație pentru transformata  $Z$  [63], produsul  $H(z)H(z^{-1})$  este transformata  $Z$  a funcției de autocorelație a secvenței  $\{r_{hh}[m]\}$  a răspunsului la impuls. Conform teoremei Wiener Hincin [34], rezultă că  $|H(\omega)|^2$  este transformata Fourier a lui  $\{r_{hh}[m]\}$ .

Similar, dacă  $H(z) = B(z)/A(z)$ , expresiile  $D(z) = B(z)B(z^{-1})$  și  $C(z) = A(z)A(z^{-1})$  sunt transformatele  $Z$  ale secvențelor de autocorelație  $\{c_l\}$  și, respectiv,  $\{d_l\}$ , unde

$$\begin{aligned} c_l &= \sum_{k=0}^{N-|l|} a_k a_{k+l}, \quad -N \leq l \leq N \\ d_l &= \sum_{k=0}^{M-|l|} b_k b_{k+l}, \quad -M \leq l \leq M \end{aligned} \quad (1.58)$$

Deoarece parametrii sistemului  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  sunt reali, secvențele de autocorelație sunt pare, adică  $c_l = c_{-l}$  și  $d_l = d_{-l}$ , ceea ce permite exprimarea expresiei  $|H(\omega)|^2$  ca o funcție polinomială în  $\cos \omega$ :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{d_0 + \sum_{k=1}^M d_k \cos k\omega}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \cos k\omega} \quad (1.59)$$

ținându-se cont că  $\cos k\omega = \sum_{m=0}^k \beta_m (\cos \omega)^m$ .

Se notează

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = b_0^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z)} \quad (1.60)$$

Dacă se cunoaște  $|H(\omega)|^2$ , înlocuind  $e^{j\omega}$  cu  $z$  se obține  $C(z)$ . Se pune problema ce informație se poate obține din  $C(z)$  despre  $H(z)$ . Se

observă că pentru fiecare pol  $p_k$  al lui  $H(z)$ , în  $C(z)$  există un pol  $p_k$  și unul  $(p_k^*)^{-1}$ . Similar, pentru fiecare zero  $z_k$  al lui  $H(z)$ , există o pereche de zerouri în  $C(z)$  la  $z_k$  și  $(z_k^*)^{-1}$ . În consecință, polii și zerourile lui  $C(z)$  apar în perechi conjugate reciproce, cu un element din fiecare pereche asociat lui  $H(z)$  și unul lui  $H^*(1/z^*)$ . Mai mult, dacă un element din fiecare pereche este în interiorul cercului unitate, atunci celălalt (conjugatul inversat) va fi în afara cercului unitate.

Singura altă posibilitate ar fi ca ambele singularități să fie pe cercul unitate, caz în care acestea au ordin de multiplicitate dublu în aceeași poziție. Dacă  $H(z)$  caracterizează un sistem stabil, atunci toți polii săi trebuie să fie în interiorul cercului unitate, restricție care permite identificarea polilor lui  $H(z)$  dintre polii lui  $C(z)$ . Numai cu această precizare, zerourile lui  $H(z)$  nu pot fi unic determinate dintre zerourile lui  $C(z)$ .

**Exemplul 1.2.**

Diagrama poli zerouri pentru  $C(z)$  este dată în figura 1.4. Să se determine polii și zerourile asociate lui  $H(z)$ .

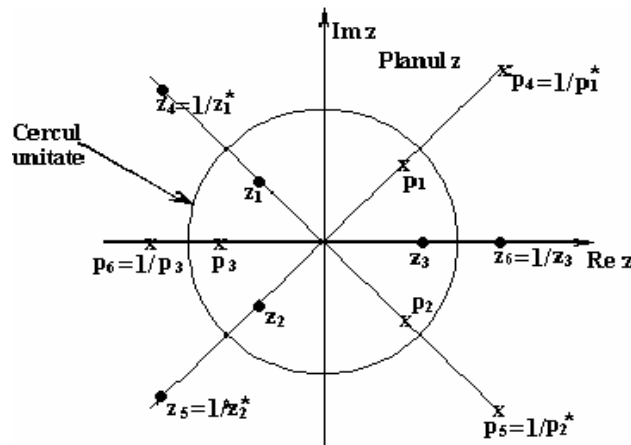


Figura 1.4. Diagrama poli - zerouri pentru un  $C(z)$  dat

*Soluție.* Perechile conjugate reciproce de poli și zerouri pentru care un element este asociat lui  $H(z)$  și unul lui  $H^*(1/z^*)$  sunt:  $(p_1, p_4)$ ,  $(p_2, p_5)$ ,  $(p_3, p_6)$  și  $(z_1, z_4)$ ,  $(z_2, z_5)$ ,  $(z_3, z_6)$ . Știind că  $H(z)$  corespunde unui sistem stabil și cauzal, polii se aleg din fiecare pereche astfel încât să fie în interiorul cercului unitate. Asupra zerourilor nu se fac astfel de

restricții. Oricum, în cazul în care coeficienții  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  sunt reali, poli și zerourile sunt reali și/sau complex conjugate. În consecință, zerourile asociate lui  $H(z)$  sunt  $z_3$  sau  $z_6$  și  $(z_1, z_2)$  sau  $(z_4, z_5)$ . Cu considerațiile de mai sus, se observă că, pentru exemplul considerat, există patru sisteme cauzale, stabile, diferite cu trei poli și trei zerouri pentru care diagrama poli - zerouri a lui  $C(z)$  este cea din figura 1.4 și, echivalent, pentru care răspunsul de amplitudine este același. Dacă  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  nu s-ar fi presupus reali, numărul de variante ar fi fost mai mare. Mai mult, dacă nu se fac restricții asupra numărului de poli și zerouri pentru  $H(z)$ , numărul de variante pentru  $H(z)$  ar putea fi nelimitat. Pentru a arăta aceasta, se presupune că  $H(z)$  are un factor de forma  $\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$ , adică

$$H(z) = H_1(z) \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}. \text{ Factorul de această formă se numește } \textit{factor trece}$$

*tot*, deoarece are răspunsul în amplitudine egal cu unitatea pe cercul unitate. În aceste condiții

$$\begin{aligned} C(z) &= H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z) \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} H_1^*(1/z^*) \frac{z - a}{1 - a^*z} = \\ &= H_1(z)H_1^*(1/z^*) \end{aligned} \quad (1.61)$$

adică factorul trece tot se anulează în  $C(z)$  și prin urmare, nu poate fi identificat din diagrama poli zerouri a lui  $C(z)$ . În concluzie, dacă numărul polilor și zerourilor lui  $H(z)$  este nespecificat, atunci pentru  $C(z)$  dat, orice alegere arbitrară a lui  $H(z)$  poate fi cascadata cu un număr arbitrar de factori trece tot, cu poli în interiorul cercului unitate ( $|a| < 1$ ).

## 1.6. Calculul răspunsului în frecvență al sistemelor discrete, liniare, invariante în timp

Răspunsul în frecvență  $H(\omega)$  al unui SDLIT poate fi calculat cu ajutorul transformatei Fourier a răspunsului la impuls al sistemului, ca în relația (1.54).

Dacă sistemul este caracterizat de o ecuație cu diferențe cu coeficienți constanți, de forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.62)$$

răspunsul în frecvență se poate obține prin evaluarea lui  $H(z)$  dat de (1.54) pe cercul unitate, dacă  $H(z)$  este convergent pe cercul unitate,

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.63)$$

Din (1.63) se observă că răspunsul în frecvență  $H(\omega)$  al sistemului caracterizat de (1.62) depinde numai de coeficienții  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$ .

Din (1.63) derivă două cazuri particulare:

a) Dacă  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , relația (1.63) se reduce la

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}, \quad (1.64)$$

sistemul fiind cu răspuns finit la impuls (FIR) [63]. Comparând (1.53) cu (1.64) rezultă că în cazul sistemelor FIR există relația

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, M \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (1.65)$$

b) Dacă  $b_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, M$ , și  $b_0 \neq 0$ , sistemul este pur recursiv, cu răspuns infinit la impuls (IIR) și relația (1.63) devine

$$H(\omega) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.66)$$

O metodă alternativă de evaluare a răspunsului în frecvență al unui SDLIT, dat de (1.63) este *metoda geometrică*. Pentru explicarea acestei metode se notează cu  $z_1, z_2, \dots, z_M$  zerourile și cu  $p_1, p_2, \dots, p_N$  polii sistemului liniar invariant în timp. Cu aceste notații, (1.63) devine

$$H(\omega) = G \cdot e^{j\omega(N-M)} \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_M)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2) \dots (e^{j\omega} - p_N)} \quad (1.67)$$

unde  $G=b_0$  este câștigul sistemului. În continuare, se exprimă fiecare factor din (1.67) în formă polară

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)} \quad (1.68)$$

$$\text{și} \quad e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \quad (1.69)$$

$$\text{unde} \quad V_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - z_k|, \quad \theta_k(\omega) \equiv \angle(e^{j\omega} - z_k) \quad (1.70)$$

$$\text{și} \quad U_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - p_k|, \quad \Phi_k(\omega) \equiv \angle(e^{j\omega} - p_k) \quad (1.71)$$

Modulul lui  $H(\omega)$  se obține atunci cu relația



$$|H(\omega)| = |G| \frac{V_1(\omega) V_2(\omega) \dots V_M(\omega)}{U_1(\omega) U_2(\omega) \dots U_N(\omega)} \quad (1.72)$$

Acesta se mai poate calcula în decibeli, cu relația

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G| + 20 \sum_{k=1}^M \log_{10} V_k(\omega) - 20 \sum_{k=1}^N \log_{10} U_k(\omega) \quad (1.73)$$

Faza lui  $H(\omega)$  este

$$\begin{aligned} \angle H(\omega) = \angle G + \omega(N - M) + \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega) + \dots + \theta_M(\omega) - \\ - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \dots + \Phi_N(\omega)] \end{aligned} \quad (1.74)$$

Faza termenului de câștig  $G$  este 0 sau  $\pi$ , după cum  $G$  este pozitiv sau negativ.

În concluzie, dacă se cunosc zerourile și poliile funcției de sistem  $H(z)$ , se poate evalua răspunsul în frecvență cu ajutorul relațiilor (1.72) și (1.74).

Interpretarea geometrică a mărimilor din relațiile (1.72) și (1.74) rezultă considerând polul  $p_k$  și zeroul  $z_k$  plasați în punctele  $A$  și  $B$  ale planului  $z$ , ca în figura 1.5a.

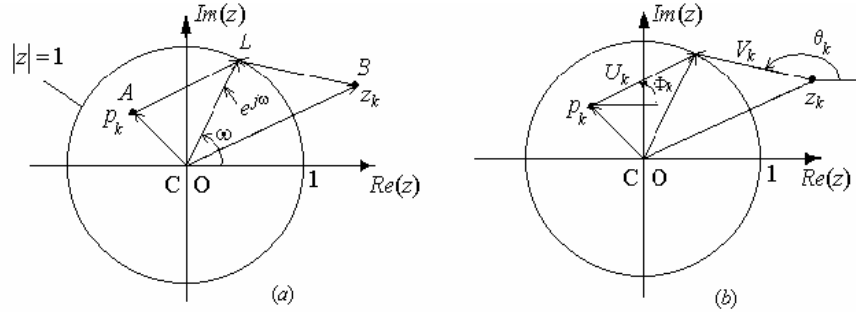


Figura 1.5. Interpretarea geometrică a contribuției unui pol și a unui zero

Fie  $L$  punctul de pe cercul unitate corespunzător frecvenței unghiulare  $\omega$ . Fie, de asemenea, vectorii  $\overline{AL}$  și  $\overline{BL}$  cu originea în pol, respectiv în zero și extremitatea în punctul  $L$ . Din figura 1.5a rezultă

$$\overline{CL} = \overline{CA} + \overline{AL} \quad (1.75)$$

$$\overline{CL} = \overline{CB} + \overline{BL} \quad (1.76)$$

Dar  $\overline{CL} = e^{j\omega}$ ,  $\overline{CA} = p_k$  și  $\overline{CB} = z_k$ , deci

$$\overline{AL} = e^{j\omega} - p_k \quad (1.77)$$

și 
$$\overline{BL} = e^{j\omega} - z_k \quad (1.78)$$

Combinând relațiile (1.77) și (1.78) cu (1.68) și (1.69), rezultă

$$\overrightarrow{AL} = e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \quad (1.79)$$

$$\overrightarrow{BL} = e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)} \quad (1.80)$$

Modulul  $U_k(\omega)$  este lungimea segmentului  $AL$ , adică distanța de la polul  $p_k$  la punctul  $L$ , corespunzător lui  $e^{j\omega}$ , în timp ce modulul  $V_k(\omega)$  este distanța de la zeroul  $z_k$  la punctul  $L$ .

Fazele  $\Phi_k(\omega)$  și  $\theta_k(\omega)$  sunt unghiurile vectorilor  $AL$  și  $BL$  cu axa reală pozitivă, așa cum este ilustrat în figura 1.5b. Această interpretarea geometrică este utilă pentru că pune în evidență influența poziției polilor și zerourilor asupra funcției de transfer a SDLIT.

Dacă, de exemplu, un zero  $z_k$  și un pol  $p_k$  sunt plasați pe cercul unitate, ca în figura 1.6, se observă că la  $\omega = \angle z_k$ ,  $V_k(\omega)$  este egal cu zero și, în consecință, și  $|H(\omega)|$  devine zero. Similar, la  $\omega = \angle p_k$ ,  $U_k(\omega)$  devine zero și  $|H(\omega)|$ , infinit. Evaluarea fazei în aceste cazuri nu are sens.

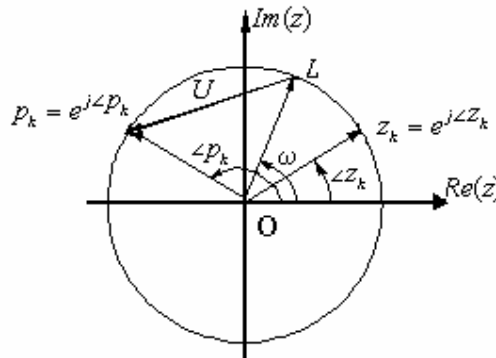


Figura 1.6. Un zero pe cercul unitate determină  $|H(\omega)| = 0$  la  $\omega = \angle z_k$  și un pol pe cercul unitate are ca rezultat  $|H(\omega)| = \infty$  la  $\omega = \angle p_k$

Din cele prezentate până acum se desprind următoarele observații:

1. Prezența unui zero în apropierea cercului unitate va determina ca mărimea modulului răspunsului în frecvență, la frecvențe corespunzătoare punctelor de pe cercul unitate apropiate de acel punct, să fie mic, în timp ce prezența unui pol în apropierea cercului unitate va avea ca efect o valoare mare a modulului răspunsului în frecvență, la frecvențe apropiate de acel punct. Polii și zerourile au efecte contrare, astfel încât plasarea unui zero în apropierea unui pol îi atenuează efectul, și invers. Prin

plasarea polilor și zerourilor se poate determina o varietate de forme pentru  $|H(\omega)|$  și  $\angle H(\omega)$ , lucru exploatat în proiectarea filtrelor digitale.

2. Singularitățile din origine nu afectează răspunsul de amplitudine, ci numai pe cel de fază.
3. Răspunsul de amplitudine este zero numai când funcția de sistem are un zero pe cercul unitate la frecvența respectivă.
4. Salturile de fază de  $\pi$  radiani se produc la fiecare trecere a frecvenței printr-un zero aflat pe cercul unitate. Pentru a arăta acest lucru, se presupune că există un zero la  $z = e^{j\omega_0}$  și fie  $\omega_0^- = \omega_0 - \varepsilon$  și  $\omega_0^+ = \omega_0 + \varepsilon$ , pentru un  $\varepsilon > 0$ , suficient de mic, situație redată în figura 1.7. Se observă că valoarea fazei la  $\omega = \omega_0^-$  este cu  $\pi$  radiani mai mică decât cea corespunzătoare lui  $\omega = \omega_0^+$ . Dacă în  $z = e^{j\omega_0}$  există un zero multiplu, de ordin  $M$ , când  $\omega$  trece de la  $\omega_0^-$  la  $\omega_0^+$  faza va avea un salt de  $M\pi$  radiani. Evident, dacă  $M$  este un număr par, saltul va fi un multiplu de  $2\pi$  radiani, caz în care, pentru valoarea principală a fazei nu se observă nici o schimbare.
5. Când  $\omega$  variază de la 0 la  $\pi$  faza generată de fiecare zero plasat strict în interiorul cercului unitate crește cu  $\pi$  radiani. Faza generată de fiecare pol plasat în interiorul cercului unitate descreește cu  $\pi$  radiani. Dacă numărul de astfel de zerouri este  $N_z$  și de poli  $N_p$ , creșterea netă de fază, când  $\omega$  variază de la 0 la  $\pi$ , este de  $(N_z - N_p)\pi$ .

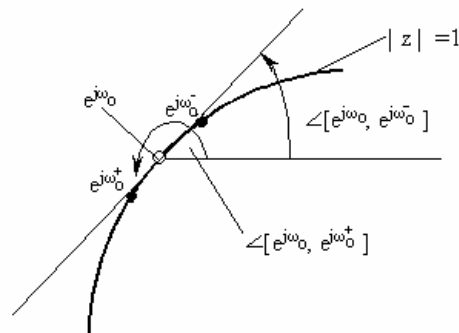


Figura 1.7. Evaluarea răspunsului de fază în jurul unui zero plasat pe cercul unitate

## 1.7. Sisteme discrete, liniare, invariante în timp văzute ca filtre selective de frecvență

Un sistem liniar invariant în timp poate realiza o discriminare sau filtrare a diferitelor componente de frecvență a semnalului aplicat la intrarea sa. Natura acțiunii de filtrare este determinată de răspunsul în frecvență al filtrului  $H(\omega)$ , care, la rândul său, depinde de alegerea parametrilor sistemului  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$ . Prin alegerea adecvată a coeficienților se pot proiecta filtre selective de frecvență care permit trecerea semnalelor cu spectrul în anumite benzi și atenuează semnale ale căror componente de frecvență sunt în alte benzi.

În general, un sistem liniar invariant în timp modifică spectrul semnalului de intrare  $X(\omega)$ , în concordanță cu răspunsul său în frecvență  $H(\omega)$ , pentru a produce ieșirea  $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ . În acest sens,  $H(\omega)$  acționează ca o *funcție de ponderare* sau de *formare spectrală* asupra diferitelor componente de frecvență ale semnalului. În acest context orice sistem liniar, invariant în timp poate fi considerat ca un filtru care modifică componentele de frecvență ale semnalului de la intrarea sa și, în consecință, cele două noțiuni sunt sinonime. În prelucrarea numerică filtrarea este folosită în multe scopuri, cum ar fi: atenuarea zgomotului, modificarea spectrului în scopul egalizării canalelor de comunicații, detecția semnalelor, analiză spectrală e.t.c.

### 1.7.1. Caracteristicile filtrelor ideale

De obicei, filtrele sunt clasificate în funcție de caracteristicile lor în domeniul frecvență. Filtrele selective de frecvență pot fi trece jos (FTJ), trece sus (FTS), trece bandă (FTB), oprește bandă (FOB), trece tot (FTT) și multibandă. Modulul răspunsului în frecvență și funcția de transfer a filtrelor ideale enumerate mai sus sunt arătate în figura 1.8. Aceste filtre ideale au câștig constant  $C$  (de obicei egal cu unitatea) în benzile de trecere și zero în benzile de oprire. Pentru FTJ și FTS,  $\omega_c$  reprezintă frecvența de tăiere, iar pentru FTB și FOB,  $\omega_1$  și  $\omega_2$  reprezintă frecvențele capetelor benzilor de trecere, respectiv de oprire [69].

O altă caracteristică a unui filtru ideal este caracteristica de fază liniară. Fie un filtru digital cu funcția de transfer

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0}, & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (1.81)$$

unde  $C$  și  $n_0$  sunt constante.

Din compararea relațiilor (1.81) cu (1.11), se pot scrie relațiile:

$$|H(\omega)| = C \quad (1.82)$$

și

$$\theta(\omega) = -\omega n_0 \quad (1.83)$$

Din (1.83) rezultă că faza este o funcție liniară de  $\omega$ . Dacă la intrarea unui astfel de filtru se aplică semnalul  $x[n]$  ale cărui componente de frecvență sunt cuprinse în domeniul  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , semnalul de ieșire are spectrul

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = CX(\omega)e^{-j\omega n_0}, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (1.84)$$

Aplicând transformata Fourier inversă relației (1.84), se obține[63]

$$y[n] = Cx[n - n_0] \quad (1.85)$$

și, în consecință, ieșirea filtrului este o versiune scalată și întârziată a intrării. Întârzierea și scalarea nu sunt considerate distorsiuni ale semnalului.

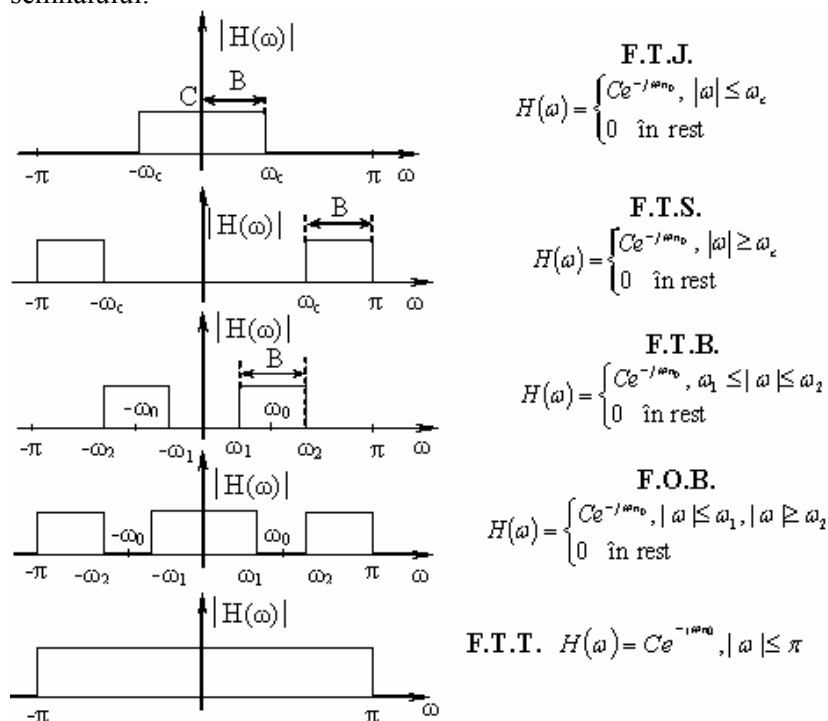


Figura 1.8. Modulul răspunsului în frecvență pentru câteva filtre selective de frecvență ideale, discrete

Derivata fazei în raport cu frecvența definește *întârzierea de grup* a filtrului

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (1.86)$$

Aceasta reprezintă întârzierea pe care o componentă de frecvență  $\omega$  a semnalului, o suferă la trecerea prin filtru. Dacă  $\theta(\omega)$  este o funcție liniară în  $\omega$ , atunci  $\tau_g(\omega) = n_0 = \text{constant}$ , adică, toate componentele de frecvență ale semnalului suferă aceeași întârziere.

Orice abatere a răspunsului în frecvență de la forma ideală dată în (1.81) are ca rezultat distorsionarea semnalului. Dacă modulul răspunsului în frecvență al sistemului variază în banda de frecvențe ocupată de semnal, atunci semnalul suferă *distorsiuni de amplitudine*. Dacă răspunsul de fază al sistemului nu este liniar în banda de frecvențe a semnalului, atunci semnalul suferă *distorsiuni de fază*.

În concluzie, filtrele ideale au caracteristica de modul constantă, iar cea de fază, liniară în banda de trecere. În toate cazurile astfel de filtre sunt nerealizabile fizic, dar servesc ca idealizare matematică pentru filtrele practice ale căror caracteristici le aproximează destul de fidel pe cele ideale.

De exemplu, filtrul ideal trece jos are răspunsul la impuls

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin \omega_c \pi n}{\pi}, \quad -\infty < n < \infty \end{aligned} \quad (1.87)$$

Acest filtru nu este cauzal și nici absolut sumabil și, prin urmare, este instabil, nefiind realizabil. Cu toate acestea, caracteristicile ideale de frecvență pot fi approximate destul de fidel de filtre reale, realizabile practic, după cum se va vedea în Capitolul 2.

## 1.8. Proiectarea filtrelor digitale prin plasarea polilor și zerourilor în planul Z

În continuare se analizează posibilitatea proiectării unor filtre digitale simple (la care forma caracteristicii de amplitudine nu este riguros specificată), prin plasarea corespunzătoare a polilor și zerourilor în planul Z. În paragraful 1.6 s-a descris modul în care poziția polilor și zerourilor față de cercul unitate afectează răspunsul în frecvență al sistemului și s-a

prezentat o metodă grafică pentru calculul răspunsului în frecvență, cunoscută fiind diagrama poli-zero-uri a sistemului.

Principiul de bază care caracterizează metoda plasării polilor și zerourilor în planul  $Z$  este de a plasa polii și zerourile în apropierea punctelor de pe cercul unitate corespunzătoare frecvențelor ce trebuie accentuate, respectiv atenuate sau suprimate. Mai mult, pentru un filtru cauzal trebuie îndeplinite următoarele condiții:

1. Toți polii trebuie să fie plasați în interiorul cercului unitate, pentru ca filtrul să fie stabil.

2. Polii și zerourile complexe trebuie să apară în perechi conjugate, asigurându-se astfel coeficienți reali pentru filtru.

Se reamintește că funcția de sistem  $H(z)$  a unui SDLIT poate fi exprimată sub forma

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.88)$$

unde  $b_0$  este un factor de câștig, astfel ales, încât să rezulte

$$|H(\omega_0)| = 1 \quad (1.89)$$

unde  $\omega_0$  este o frecvență din banda de trecere a filtrului.

În cazul sistemelor cauzale, gradul polinomului de la numitor ( $N$ ) trebuie să fie mai mare sau cel mult egal cu gradul polinomului de la numărător ( $M$ ), astfel încât filtrul să aibă mai mulți poli nebanali decât zerouri [63]. Într-adevăr, dacă filtrul este cauzal, din teorema valorii inițiale rezultă

$$h[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} H^+(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.90)$$

Dacă  $H^+(z) = H(z)$  este o fracție rațională, atunci gradul numărătorului,  $M$ , nu poate depăși gradul numitorului,  $N$ , adică  $M \leq N$ . Condiția este mai puțin severă decât în cazul sistemelor analogice, unde  $M < N$  (inegalitate strictă).

### 1.8.1. Filtre trece jos, trece sus și trece bandă

În proiectarea filtrelor trece jos digitale, polii trebuie plasați în apropierea cercului unitate corespunzător frecvențelor joase (în apropiere de  $\omega = 0$ ), iar zerourile în apropiere sau pe cercul unitate în puncte

corespunzătoare frecvențelor înalte (aproape de  $\omega = \pi$ ). Situația inversă este valabilă pentru filtrele trece sus. Figura 1.9 ilustrează diagramele poli – zerouri pentru trei FTJ și pentru trei FTS.

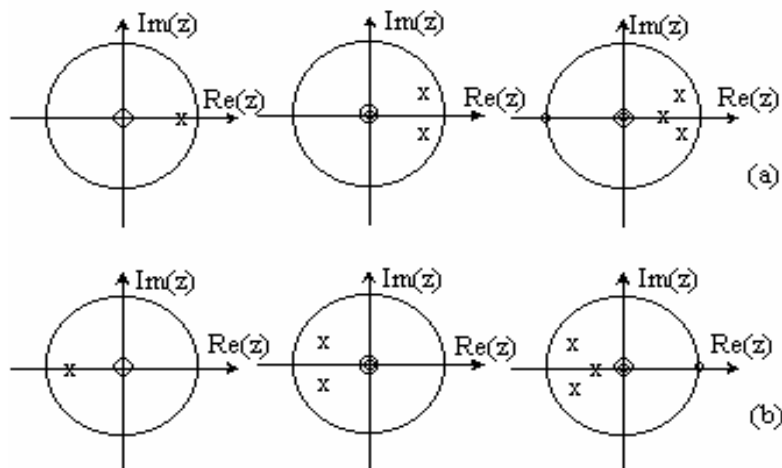


Figura 1.9. Diagrama poli – zerouri pentru trei a) FTJ și b) FTS, fiecare din acestea cu un pol real, doi poli complex conjugați și, respectiv, un pol real, doi poli complex conjugați și un zero nebanal

Modulul și faza răspunsului filtrului cu un singur pol, cu funcția de sistem

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \quad (1.91)$$

sunt ilustrate în fig. 1.10, pentru  $a = 0,9$ . Caracteristicile amplitudine – frecvență și fază – frecvență s-au obținut prin evaluarea funcției de sistem  $H_1(z)$  pe cercul unitate.

Câștigul  $G$  s-a ales  $1-a$ , astfel încât la  $\omega = 0$ ,  $|H(0)|=1$ . Un zero suplimentar la  $z = -1$  va atenua răspunsul filtrului la frecvențe înalte. Acest zero determină funcția de transfer

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad (1.92)$$

Caracteristicile de amplitudine și fază sunt date tot în figura 1.10. Se observă că  $|H_2(\omega)|$  devine egal cu zero la  $\omega = \pi$ . Similar, se obțin FTS simple prin reflectarea poziției polilor și zerourilor FTJ față de axa imaginară a planului  $Z$ , obținându-se funcția de sistem



$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}} \quad (1.93)$$

pentru un FTS cu un pol și un zero. Caracteristicile de amplitudine și fază pentru FTS sunt identice cu cele ale FTJ translate cu  $\pi$  radiani.

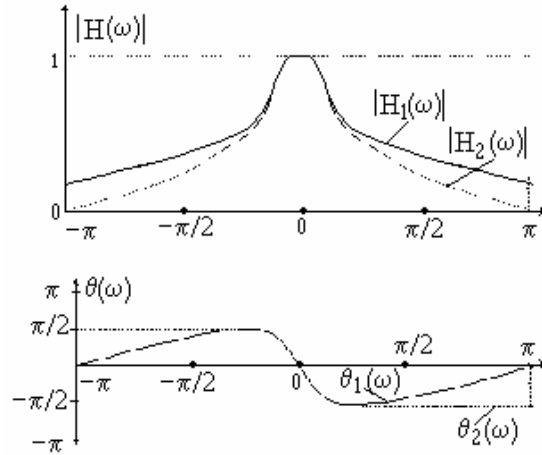


Figura 1.10. (a) Reprezentarea modulului și (b) a fazei pentru un filtru cu un singur pol,  $H_1(z)$ , și un filtru cu un pol și un zero  $H_2(z)$

### Exemplul 1.5.

Să se proiecteze un FTJ cu un pol dublu, astfel încât răspunsul în frecvență să satisfacă condiția  $H(0)=1$  și  $\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$ .

*Soluție.* Funcția de sistem a filtrului este  $H(z) = \frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$ .

Trebuie determinați parametrii  $b_0$  și  $p$ .

$$\text{La } \omega = 0 \quad H(0) = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad b_0 = (1-p)^2$$

$$\text{La } \omega = \frac{\pi}{4}$$

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1-p)^2}{\left(1 - pe^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1 - p \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + jp \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{jp}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\text{deci } \frac{(1-p)^4}{\left[ \left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{p^2}{2} \right]^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{2}(1-p)^2 = 1 + p^2 - \sqrt{2}p \rightarrow p=0,32$$

$$\text{Prin urmare } H(z) = \frac{0,46}{(1-0,32z^{-1})^2}$$

Aceleași principii pot fi aplicate pentru proiectarea filtrelor trece bandă. FTB conțin una sau mai multe perechi de poli complex conjugați plasați în apropierea cercului unitate, la frecvențe apropiate de banda de trecere a filtrului.

### **Exemplul 1.6.**

Să se proiecteze un filtru trece bandă cu doi poli, cu centrul benzii de trecere la  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , răspunsul în frecvență egal cu zero la  $\omega = 0$  și  $\omega = \pi$  și egal cu  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  la  $\omega = \frac{4\pi}{9}$ .

*Soluție.* Deoarece  $|H(\omega)|$  este maxim la  $\frac{\pi}{2}$ , rezultă că polii sistemului sunt  $p_{1,2} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}}$ .

Zerourile sunt  $z_1 = 1$  și  $z_2 = -1$ . În consecință, funcția de transfer este

$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = G \frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

Factorul de câștig se determină din evaluarea răspunsului în frecvență  $H(\omega)$  al filtrului la  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{2}{1-r^2} = 1 \rightarrow G = \frac{1-r^2}{2}$$

Valoarea lui  $r$  se determină prin evaluarea lui  $H(\omega)$  la  $\omega = \frac{4\pi}{9}$ .

$$|H(4\pi/9)|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)} = \frac{1}{2}, \text{ de unde } r^2 = 0,7 \text{ și}$$

$$H(z) = 0,15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0,7z^{-2}}$$

Modulul și faza corespunzătoare răspunsului în frecvență sunt reprezentate în figura 1.11.

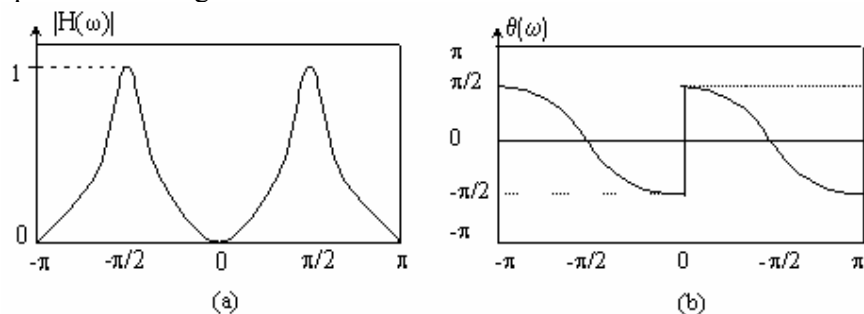


Figura 1.11. (a) Modulul și (b) faza funcției de transfer a filtrului trece bandă din exemplul 1.6.

Trebuie subliniat faptul că scopul principal al acestei metodologii de proiectare a filtrelor digitale simple prin plasarea polilor și zerourilor este de a evidenția efectul pe care îl au polii și zerourile asupra răspunsului în frecvență al sistemelor, ea nefiind o metodă potrivită pentru proiectarea filtrelor digitale cu caracteristici bine definite.

### 1.8.1.1. O transformare simplă a FTJ în FTS

Presupunând că s-a proiectat un FTJ cu răspunsul la impuls  $h_{lp}[n]$ , este posibilă conversia sa fie într-un FTB, fie FTS, cu ajutorul proprietății de translare de frecvență a transformatei Fourier [63].

În cele ce urmează, se prezintă o transformare simplă, care permite conversia unui FTJ într-un FTS, și invers. Dacă se notează cu  $h_{lp}[n]$  răspunsul la impuls al unui FTJ, care are răspunsul în frecvență  $H_{lp}(\omega)$ , se poate obține un FTS prin translarea lui  $H_{lp}(\omega)$  cu  $\pi$  radiani, (adică înlocuirea lui  $\omega$  cu  $\omega - \pi$ ).

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi) \quad (1.94)$$

unde  $H_{hp}$  este răspunsul în frecvență al FTS.

Deoarece translația de frecvență cu  $\pi$  a funcției de transfer echivalează cu multiplicarea răspunsului la impuls cu  $e^{j\pi n}$ , răspunsul la impuls al FTS rezultă de forma

$$h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n] \quad (1.95)$$

Prin urmare, răspunsul la impuls al FTS se obține din răspunsul la impuls al FTJ prin schimbarea semnului eșantioanelor impare ale lui  $h_{lp}[n]$ . Evident, dacă este cunoscut răspunsul la impuls  $h_{hp}[n]$  al FTS, răspunsul la impuls al FTJ se determină cu relația

$$h_{lp}[n] = (-1)^n h_{hp}[n] \quad (1.96)$$

Dacă FTJ este descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (1.97)$$

răspunsul său în frecvență este

$$H_{lp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.98)$$

Înlocuind  $\omega$  cu  $\omega - \pi$  în (1.98) se obține funcția de transfer a FTS

$$H_{hp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.99)$$

care corespunde ecuației cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x[n-k] \quad (1.100)$$

### 1.8.2. Rezonatoare digitale

*Rezonatorul digital* este un filtru trece bandă, cu doi poli complex conjugați plasați în apropierea cercului unitate, cum se arată în figura 1.12.a.

Numele de rezonator se referă la faptul că răspunsul de amplitudine are valoare mare în apropierea polilor. Poziția unghiulară a polilor determină frecvența de rezonanță. În proiectarea unui rezonator digital cu un maxim de rezonanță la sau în apropiere de  $\omega = \omega_0$ , se alege perechea de poli complex conjugați  $p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$ ,  $0 < r < 1$ . În plus, se selectează două zerouri. Deși există multe posibilități de alegere a poziției zerourilor, două cazuri prezintă interes mai special. Unul se referă la

plasarea zerourilor în origine și celălalt la plasarea zerourilor la  $z = 1$  și  $z = -1$ . În acest ultim caz se elimină complet răspunsul filtrului la  $\omega = 0$  și  $\omega = \pi$ .

Funcția de transfer a rezonatorului digital cu zerouri în origine este

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})} \quad (1.101)$$

sau

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1.102)$$

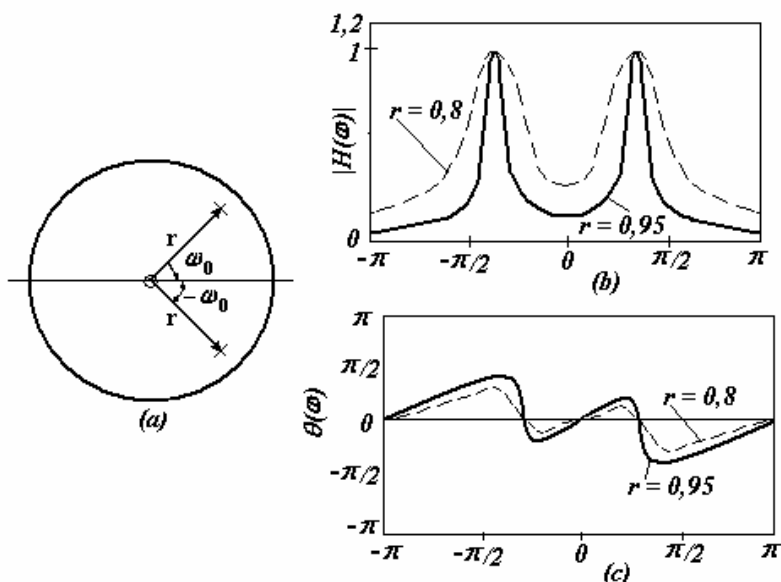


Figura 1.12 (a) Modelul poli–zerouri, (b) răspunsul de amplitudine, (c) răspunsul de fază al unui rezonator digital cu  $r=0,8$  și  $r=0,95$

Factorul de normalizare  $b_0$  se alege astfel încât  $|H(\omega_0)| = 1$ . Din (1.101) rezultă

$$H(\omega_0) = \frac{b_0}{(1-r)(1-re^{-j2\omega_0})} \quad (1.103)$$

și, deci

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}} = 1 \quad (1.104)$$

Factorul de normalizare este atunci

$$b_0 = (1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0} \quad (1.105)$$

și  $|H(\omega)|$  se poate exprima ca

$$|H(\omega)| = \frac{b_0}{u_1(\omega)u_2(\omega)} \quad (1.106)$$

iar faza

$$\phi(\omega) = 2\omega - \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega) \quad (3.107)$$

unde  $u_1(\omega)$  și  $u_2(\omega)$  reprezintă modulele vectorilor orientați de la  $p_1$  și  $p_2$  la punctul  $\omega$  pe cercul unitate, iar  $\phi_1(\omega)$  și  $\phi_2(\omega)$ , fazele lor.

$$u_1(\omega) = \sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0-\omega)} \quad (1.108)$$

$$u_2(\omega) = \sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0+\omega)}$$

Pentru o valoare oarecare a lui  $r$ ,  $u_1(\omega)$  atinge valoarea minimă  $(1-r)$  la  $\omega = \omega_0$ . Produsul  $u_1(\omega)u_2(\omega)$  atinge valoarea minimă la frecvența

$$\omega_r = \arccos\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right), \quad (1.109)$$

care reprezintă *frecvența de rezonanță a filtrului*. Pentru  $r$  foarte apropiat de unitate,  $\omega_r \approx \omega_0$ , care este poziția unghiulară a polilor. De asemenea, se observă că dacă  $r$  se apropie de unitate, maximul de la rezonanță devine mai abrupt, deoarece  $u_1(\omega)$  variază semnificativ în apropierea lui  $\omega_0$ . O măsură cantitativă a ascuțimii caracteristicii rezonatorului este dată de lățimea de bandă la 3 dB a filtrului, care, pentru valori ale lui  $r$  apropiate de unitate, este [49].

$$\Delta\omega \cong 2(1-r) \quad (1.110)$$

În figurile 1.12b și 1.12c se prezintă răspunsul de modul și de fază pentru două rezonatoare digitale, unul cu  $\omega_0 = \pi/3, r = 0,8$  și celălalt cu  $\omega_0 = \pi/3, r = 0,95$ .

Dacă zerourile sunt plasate la  $z = 1, z = -1$ , funcția de transfer a rezonatorului este

$$H(z) = G \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})} = G \frac{1-z^{-2}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad (1.111)$$

și răspunsul în frecvență

$$H(\omega) = b_0 \frac{1 - e^{-j2\omega}}{[1 - re^{j(\omega_0 - \omega)}][1 - re^{-j(\omega_0 + \omega)}]} \quad (1.112)$$

Zerourile din  $z = \pm 1$  afectează atât răspunsul de amplitudine, cât și răspunsul de fază. Răspunsul de amplitudine este

$$|H(\omega)| = b_0 \frac{N(\omega)}{u_1(\omega)u_2(\omega)} \quad (1.113)$$

unde

$$N(\omega) = \sqrt{2(1 - \cos 2\omega)} \quad (1.114)$$

În figura 1.13 sunt reprezentate răspunsurile de amplitudine și de fază pentru un rezonator digital cu zerouri în  $z=1$  și  $z=-1$  și  $r=0,8$  și  $r=0,95$ . Datorită prezenței zerourilor, frecvența de rezonanță și banda filtrului se modifică față de cele ale rezonatorului cu zerouri în origine.

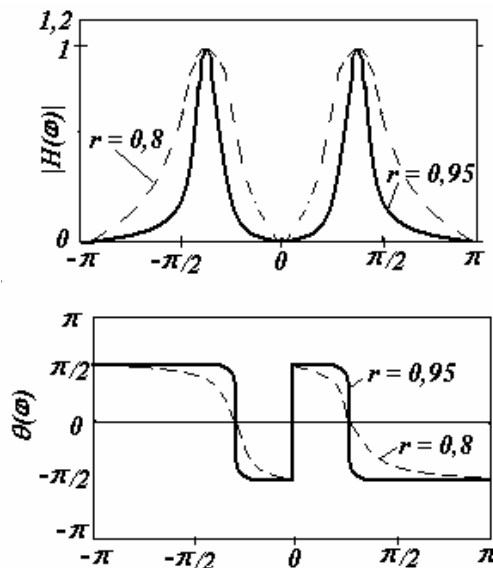


Figura 1.13. Răspunsul de amplitudine și de fază a unui rezonator digital cu zerouri în  $z=1$  și  $z=-1$  și  $r=0,8$  și  $r=0,95$

### 1.8.3. Filtre rejectoare (Notch)

Un *filtru rejector* sau *notch* este un filtru a cărui funcție de sistem conține unul sau mai multe zerouri pe cercul unitate. Caracteristica amplitudine – frecvență a unui astfel de filtru va prezenta “crestături” la

frecvențele corespunzătoare zerourilor, situație ilustrată în figura 1.14. Aceste filtre sunt utile în aplicații unde anumite componente de frecvență trebuie eliminate, cum se întâmplă de multe ori cu frecvența tensiunii de alimentare și armonicile acesteia.

Pentru a crea un nul în răspunsul în frecvență al filtrului la frecvența  $\omega_0$ , se introduce o pereche de zerouri complex conjugate pe cercul unitate la frecvența unghiulară  $\omega_0$ , adică  $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ .

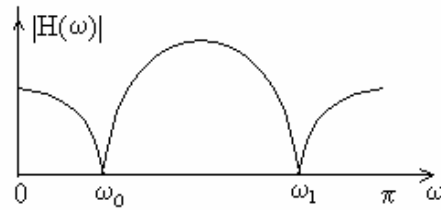


Figura 1.14 Răspunsul în frecvență al unui filtru „notch”

Funcția de sistem a unui filtru „notch” FIR este

$$H(z) = b_0 (1 - e^{j\omega_0} z^{-1}) (1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) = b_0 (1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) \quad (1.115)$$

În cazul filtrelor notch FIR, banda din zona nulului sau a creșterii este relativ întinsă și sunt atenuate și alte componente din jurul frecvenței de interes.

În figura 1.15 se prezintă răspunsul în frecvență pentru un filtru notch, care are un zero la  $\omega = \pi/4$ .

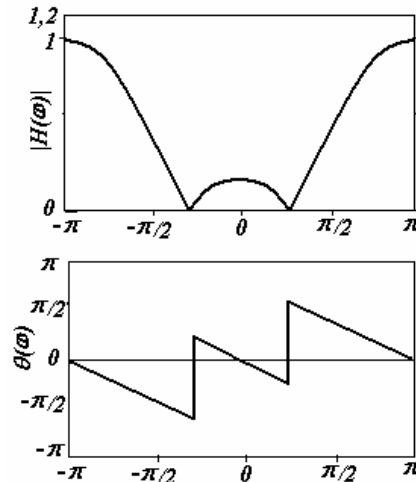


Figura 1.15. Caracteristica de modul și de fază a unui filtru notch cu un zero la  $\omega_0 = \pi/4$ ;  $H(z) = G[1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$



Pentru a micșora banda din jurul nulului, se introduc poli în funcția de transfer,  $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ , cu  $r$  apropiat de unitate, al căror efect este de rezonanță în vecinătatea nulului și astfel se reduce lățimea de bandă a creștăturii.

Funcția de transfer pentru filtrul realizat este

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1.116)$$

Caracteristicile de modul și de fază pentru două filtre notch a căror funcție de sistem este dată de (1.116), unul cu  $r = 0,85$  și celălalt cu  $r = 0,95$ , sunt prezentate în figura 1.16.

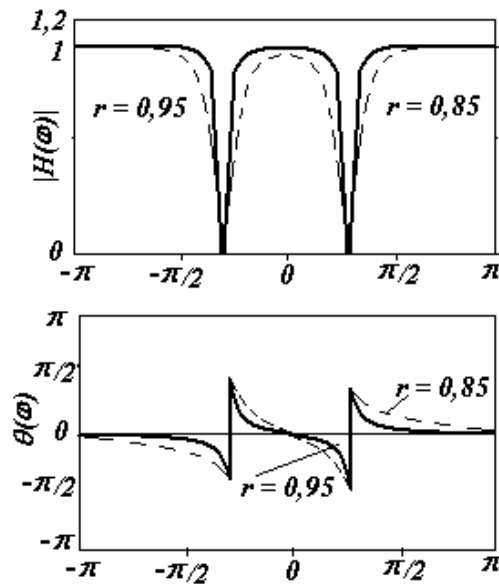


Figura 1.16. Caracteristicile de modul și de fază pentru două filtre notch cu funcția de sistem  $H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ , pentru cazurile  $r = 0,85$  și  $r = 0,95$ .

#### 1.8.4. Filtre pieptene (Comb)

Simplificat, un *filtru pieptene* sau *comb* poate fi văzut ca unul *notch*, în care nulurile se produc periodic de-a lungul benzii de frecvență.

Pentru a ilustra un filtru pieptene simplu, fie un filtru FIR care calculează media alunecătoare, descris de ecuația cu diferențe [63]

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=1}^M x[n-k] \quad (1.117)$$

cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z^{-k} = \frac{1}{M+1} \frac{[1 - z^{-(M+1)}]}{(1 - z^{-1})} \quad (1.118)$$

și răspunsul în frecvență

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\omega M/2} \sin \omega \left( \frac{M+1}{2} \right)}{M+1 \sin \omega / 2} \quad (1.119)$$

Din relația (1.118) se observă că filtrul are zerourile pe cercul unitate la

$$z_k = e^{j2\pi \frac{k}{M+1}} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (1.120)$$

Polul  $z = 1$  este anulat de zeroul de la  $z = 1$ , astfel încât filtrul nu conține poli în afara originii.

Reprezentarea caracteristicii de modul din relația (1.119) ilustrează că zerourile uniform spațiate din răspunsul în frecvență sunt la  $\omega_k = 2\pi k/(M+1)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , situație arătată în figura 1.17, pentru  $M=8$ .

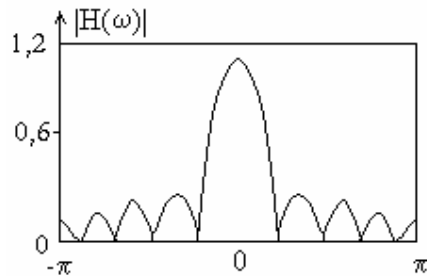


Figura 1.17. Răspunsul în amplitudine al unui filtru pieptene

Mai general, se poate obține un filtru pieptene, dintr-un filtru FIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \quad (1.121)$$

prin înlocuirea lui  $z$  cu  $z^L$ , unde  $L$  este un întreg pozitiv. Noul filtru FIR are funcția de sistem

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-kL} \quad (1.122)$$

și răspunsul în frecvență

$$H_L(\omega) = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-jkL\omega} = H(L\omega) \quad (1.123)$$

În consecință, răspunsul în frecvență  $H_L(\omega)$  este o repetare de  $L$  ori a răspunsului  $H(\omega)$  în domeniul  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ , cum este ilustrat în figura 1.18.

Dacă se consideră filtrul FIR descris de (1.118), filtrul pieptene rezultat are funcția de transfer

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}} \quad (1.124)$$

și răspunsul în frecvență

$$H_L(\omega) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin[\omega L(M+1)/2]}{\sin(\omega L/2)} e^{-j\omega LM/2} \quad (1.125)$$

cu zerourile pe cercul unitate

$$z_k = e^{j2\pi k/L(M+1)} \quad (1.126)$$

pentru toate valorile întregi pentru  $k$  cu excepția lui  $0, L, 2L, \dots, ML$ .

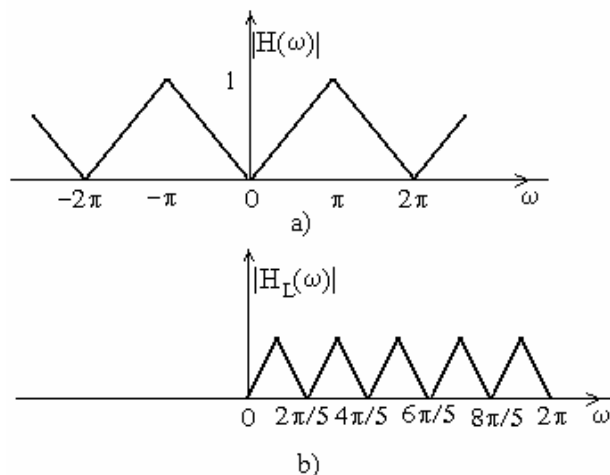


Figura 1.18. Filtru pieptene cu răspunsul în frecvență  $H_L(\omega)$  obținut din  $H(\omega)$ .

### 1.8.5. Filtre trece tot

Un *filtru trece tot* (FTT) se definește ca un sistem care are modulul funcției de transfer constant pentru toate frecvențele, adică

$$|H(\omega)| = 1 \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (1.127)$$

Cel mai simplu exemplu de filtru trece tot este un sistem de întârziere pură, descris de  $H(z) = z^{-k}$ . Un filtru trece tot, mult mai general, este caracterizat de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad a_0 = 1 \quad (1.128)$$

cu coeficienții  $\{a_k\}$  reali. Dacă se definește polinomul

$$A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}, \quad a_0 = 1 \quad (1.129)$$

relația (1.128) se mai poate scrie

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \quad (1.130)$$

Deoarece

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1 \quad (1.131)$$

sistemul descris de (1.130) este trece tot. Mai mult, dacă  $z_0$  este un pol al lui  $H(z)$ ,  $1/z_0$  este un zero al său (adică polii și zerourile sunt reciproce), cum se arată în figura 1.19.

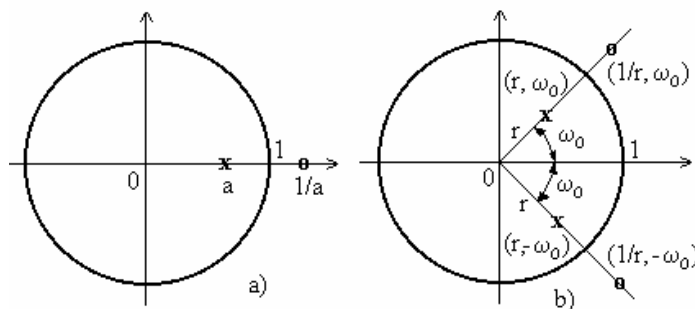


Figura 1.19. Modelul poli-zerouri al unui FTT a) de ordinul I b) de ordinul II

O formă mai generală pentru funcția de transfer a unui filtru trece tot cu coeficienți reali este

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_C} \frac{(z^{-1} - \beta_k)(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k z^{-1})(1 - \beta_k^* z^{-1})} \quad (1.132)$$

unde  $\alpha_k$  reprezintă polii reali,  $\beta_k$  și  $\beta_k^*$ , polii complex conjugați,  $N_R$ , numărul de poli și zerouri reale, iar  $N_C$ , numărul perechilor de zerouri și poli complex conjugați.

Se observă că fiecărui pol complex îi corespunde în factorul trece tot un zero care este reciprocul conjugat al polului. Pentru sistemele cauzale și stabile [63],  $-1 < \alpha_k < 1$  și  $|\beta_k| < 1$ .

Pentru un filtru trece tot cu un singur pol și un zero, complecși, caracterizat de funcția de sistem

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \text{ cu } a = re^{j\theta}$$

și funcția de transfer

$$H_{ap}(\omega) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - re^{-j\theta} e^{j\omega}}{1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}},$$

răspunsul de fază este

$$\Theta_{ap}(\omega) = -\omega - 2\arctg \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (1.133)$$

și întârzierea de grup este

$$\tau_g = -\frac{d\Theta_{ap}(\omega)}{d\omega} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (1.134)$$

Se observă că pentru un sistem cauzal și stabil,  $r < 1$  și, deci,  $\tau_g \geq 0$ . Deoarece întârzierea de grup a unui filtru trece tot de ordin superior este o sumă de termeni pozitivi, ca în relația (1.134), aceasta este întotdeauna pozitivă.

Filtrele trece tot au aplicații în egalizări de fază, pentru compensarea fazei necorespunzătoare aplicației, astfel încât răspunsul global să fie de fază liniară.

### 1.8.6. Oscilatoare digitale sinusoidale

Un *oscilator digital sinusoidal* poate fi văzut ca un rezonator cu o pereche de poli complex conjugați plasați pe cercul unitate. Un sistem de ordinul II, cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (1.135)$$

și parametrii  $a_1 = -2r \cos \omega_0$ ,  $a_2 = r^2$ , are polii complex conjugăți  $p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$  și răspunsul la impuls [63]

$$h[n] = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin(n+1)\omega_0 u[n] \quad (1.136)$$

Pentru  $r = 1$  și  $b_0 = A \sin \omega_0$ , rezultă

$$h[n] = A \sin(n+1)\omega_0 u[n], \quad (1.136')$$

adică răspunsul la impuls al unui sistem de ordin II cu poli complex conjugăți pe cercul unitate este un semnal sinusoidal, sistemul devenind un *generator sinusoidal digital*.

### 1.9. Sisteme inverse, deconvoluție și identificarea sistemelor

Răspunsul  $y[n]$  al unui SDLIT, caracterizat de răspunsul la impuls  $h[n]$ , la un semnal de intrare  $x[n]$  este dat de convoluția dintre  $h[n]$  și  $x[n]$ .

În unele probleme practice se dorește aflarea semnalului de intrare, cunoscându-se semnalul de ieșire al unui sistem cu caracteristici necunoscute. De exemplu, în transmisia datelor digitale la viteză mare pe canalele telefonice se știe că acestea distorsionează semnalul și cauzează interferență intersimboluri, ceea ce poate determina erori la refacerea datelor. În acest caz se pune problema proiectării unui sistem corector care, cascadat cu sistemul original, să furnizeze o ieșire care să corecteze distorsiunile canalului și, deci, să producă o replică a semnalului dorit. Acest sistem corector se numește *egalizor*. În contextul general al teoriei sistemelor liniare invariante în timp, sistemul corector se va numi *sistem invers*, deoarece, în principiu, răspunsul său în frecvență este invers celui al sistemului ce provoacă distorsiunile.

Mai mult, deoarece sistemul care introduce distorsiunile produce o ieșire  $y[n]$  care este convoluția dintre  $x[n]$  și  $h[n]$ , operația sistemului invers care cunoaște pe  $y[n]$  și produce pe  $x[n]$  se numește *deconvoluție*.

Dacă sistemul distorsiv este necunoscut, de obicei, este necesar, dacă este posibil, a-l excita cu un semnal cunoscut, apoi să se observe ieșirea și să se compare aceasta cu intrarea pentru a determina caracteristicile sistemului.

În problema descrisă, măsurarea răspunsului în frecvență al canalului se realizează transmițând un set de sinusoidă de amplitudine egală și frecvențe diferite, cu faze specificate în banda canalului. Canalul va atenua și defaza fiecare din sinusoidă. Din compararea semnalului recepționat cu cel transmis, receptorul obține informații despre răspunsul în frecvență al canalului, ce pot fi folosite în proiectarea sistemului invers.

Procesul de determinare a caracteristicilor unui sistem necunoscut fie  $h[n]$ , fie  $H(\omega)$ , prin măsurători efectuate asupra sistemului se numește *identificare de sistem*.

### 1.9.1. Inversarea sistemelor liniare, invariante în timp

Se spune că un sistem este *inversabil* dacă există o corespondență bijectivă între semnalele de la intrarea și ieșirea sa. Această definiție implică faptul că, dacă se cunoaște secvența de ieșire  $y[n]$ ,  $-\infty < n < \infty$ , pentru un sistem inversabil  $H$ , atunci acestuia i se poate determina în mod unic intrarea  $x[n]$ ,  $-\infty < n < \infty$ . Sistemul invers, cu intrarea  $y[n]$  și ieșirea  $x[n]$  se notează  $H^{-1}$ . Conectarea în cascadă a sistemului cu sistemul invers este echivalentă cu sistemul identitate, deoarece

$$w[n] = H^{-1}\{y[n]\} = H^{-1}\{H[x[n]]\} = x[n] \quad (1.137)$$

după cum se ilustrează în figura 1.20.

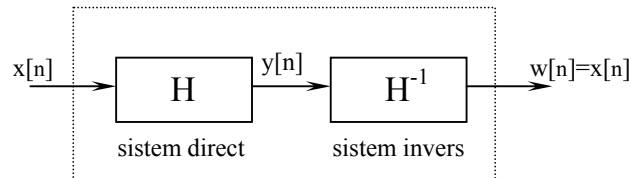


Figura 1.20 Cascada formată din sistemul direct  $H$  și sistemul invers  $H^{-1}$ .

În continuare se va urmări determinarea sistemului invers pentru clasa sistemelor discrete liniare invariante în timp. Fie un SDLIT,  $H$ , cu răspunsul la impuls  $h[n]$  și fie  $h_I[n]$  răspunsul la impuls al sistemului invers  $H^{-1}$ . Relația (1.137) este echivalentă cu ecuația

$$w[n] = h_I[n] * h[n] * x[n] = x[n] \quad (1.138)$$

care implică

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \quad (1.139)$$

Relația (1.139) poate fi folosită pentru determinarea lui  $h_I[n]$ , dacă se cunoaște  $h[n]$ . În domeniul timp, acest lucru este dificil de realizat. O soluționare mai simplă presupune transformarea lui (1.139) în domeniul  $Z$  și apoi de găsit  $H^{-1}$ , adică, aplicând transformata  $Z$  relației (1.139), rezultă

$$H(z)H_I(z) = 1 \quad (1.140)$$

de unde

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (1.141)$$

Dacă  $H(z)$  este o funcție rațională

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.142)$$

atunci

$$H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (1.143)$$

ceea ce înseamnă că zerourile lui  $H(z)$  devin poli pentru sistemul invers, și invers. Stabilitatea sistemului invers depinde de poziționarea zerourilor sistemului  $H(z)$  și va fi discutată ulterior. Mai mult, dacă  $H(z)$  este un sistem FIR, atunci  $H_I(z)$  este un sistem numai cu poli și dacă  $H(z)$  este numai cu poli,  $H_I(z)$  este FIR.

### **Exemplul 1.7.**

Să se determine inversul sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

$$\text{Soluție. } H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad RC: |z| > \frac{1}{2}.$$

Acest sistem este cauzal și stabil. Deoarece  $H(z)$  este numai cu poli, inversul său va fi un sistem FIR, cu funcția de sistem  $H_I(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$ . Răspunsul său la impuls este  $h_I[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$ .

### **Exemplul 1.8.**

Să se determine inversul sistemului care are răspunsul la impuls



$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

*Soluție.* Acesta este un filtru FIR, a cărui funcție de sistem este

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}, \quad RC: |z| > 0.$$

Sistemul invers are funcția de sistem

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}},$$

adică  $H_I(z)$  are un zero în origine și un pol în  $z = 1/2$ . În acest caz există două regiuni posibile de convergență și, deci, două sisteme inverse posibile, după cum se arată în figura 1.21.

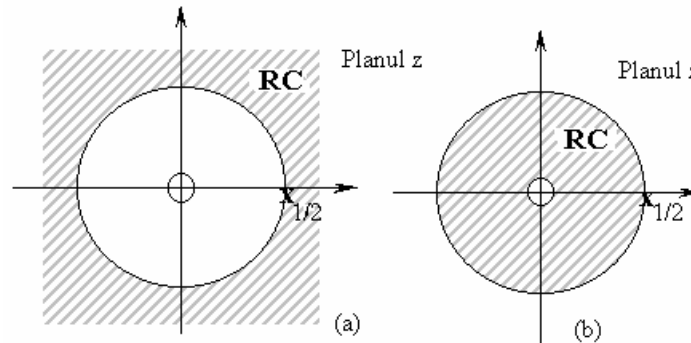


Figura 1.21. Două posibile regiuni de convergență pentru  $H_I(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$ .

Dacă regiunea de convergență pentru  $H_I(z)$  este  $|z| > \frac{1}{2}$ , transformarea inversă conduce la răspunsul la impuls

$$h_I[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

care caracterizează un sistem cauzal și stabil.

Dacă, însă, regiunea de convergență se presupune a fi  $|z| < \frac{1}{2}$ , sistemul invers are răspunsul la impuls

$$h_I[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

În acest caz sistemul invers este anticauzal și instabil. Din acest exemplu se observă că ecuația (1.139) nu poate fi rezolvată unic folosind

relația (1.143), dacă nu se specifică regiunea de convergență pentru funcția de sistem a sistemului invers.

Este posibil ca răspunsul la impuls  $h[n]$  să nu aibă transformata  $Z$  exprimată într-o formă analitică. O alternativă la această situație este rezolvarea ecuației (1.139) cu ajutorul unui calculator numeric.

Deoarece (1.139) nu are, în general, soluție unică, se presupune că atât sistemul, cât și inversul său sunt cauzale, caz în care (1.139) se poate scrie ca

$$\sum_{k=0}^n h[k]h_I[n-k] = \delta[n] \quad (1.144)$$

Prin convenție,  $h[n] = 0$  pentru  $n < 0$ . Pentru  $n = 0$  se obține

$$h_I[0] = \frac{1}{h[0]} \quad (1.145)$$

Valorile lui  $h_I[n]$  pentru  $n \geq 1$  se pot obține recursiv din relația (1.144), sub forma

$$h_I[n] = -\sum_{k=1}^n \frac{h[k]h_I[n-k]}{h[0]} \quad (1.146)$$

Această relație recursivă poate fi implementată cu ușurință cu un calculator.

Există două probleme referitoare la relația (1.146), și anume:

1. Metoda nu este funcțională dacă  $h[0] = 0$ . Acest lucru poate fi remediat prin introducerea unei întârzieri potrivite în membrul drept al relației (1.144), adică înlocuirea lui  $\delta[n]$  cu  $\delta[n-m]$ , unde  $m = 1$ , dacă  $h[0] = 0$  și  $h[1] \neq 0$  ș.a.m.d.
2. Datorită recurenței, relația (1.146) poate produce erori de rotunjire care cresc cu  $n$  și, ca urmare, precizia lui  $h_I[n]$  se deteriorează pentru  $n$  mare.

### **Exemplul 1.9.**

Să se determine sistemul cauzal invers sistemului FIR descris de  $h[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$ .

*Soluție.* Deoarece  $h[0] = 1$ ,  $h[1] = -\alpha$  și  $h[n] = 0$  pentru  $n > 1$ , se poate scrie

$$h_I[0] = \frac{1}{h[0]} = 1 \text{ și } h_I[n] = \alpha h_I[n-1], \quad n \geq 1, \text{ adică } h_I[1] = \alpha, \quad h_I[2] = \alpha^2,$$

... ,  $h_l[n] = \alpha^n$  , care corespunde unui sistem IIR cauzal, cum era de așteptat.

### 1.9.2. Sisteme de fază minimă, maximă și mixtă

În multe cazuri este util a impune restricția ca sistemul invers să fie, de asemenea, stabil și cauzal.

Inversarea SDLIT este strâns legată de caracteristicile funcției de fază a sistemului. Pentru a ilustra acest lucru, fie două sisteme FIR, caracterizate de funcțiile de sistem

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1}\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (1.147)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1}\left(\frac{1}{2}z + 1\right) \quad (1.148)$$

Sistemul descris de (1.147) are un zerou la  $z = -\frac{1}{2}$  și răspunsul la impuls  $h[0]=1$ ,  $h[1]=\frac{1}{2}$ . Sistemul din (1.148) are un zerou la  $z=-2$  și eșantioanele răspunsului la impuls  $h[0]=\frac{1}{2}$ ,  $h[1]=1$ , care sunt egale cu cele care caracterizează sistemul din (1.147), dar în ordine inversă. Acest lucru se datorează faptului că zerourile lui  $H_1(z)$  și  $H_2(z)$  sunt inverse unele altora. În domeniul frecvență cele două sisteme sunt caracterizate de răspunsurile de amplitudine

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \omega} \quad (1.149)$$

și de fază

$$\theta_1(\omega) = -\omega + \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{\frac{1}{2} + \cos \omega} \quad (1.150)$$

$$\theta_2(\omega) = -\omega + \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega} \quad (1.151)$$

Caracteristicile de modul ale celor două sisteme sunt identice datorită relației între zerourile lui  $H_1(z)$  și  $H_2(z)$ . Răspunsurile de fază  $\theta_1(\omega)$  și  $\theta_2(\omega)$  sunt reprezentate în figura 1.22 a și b.

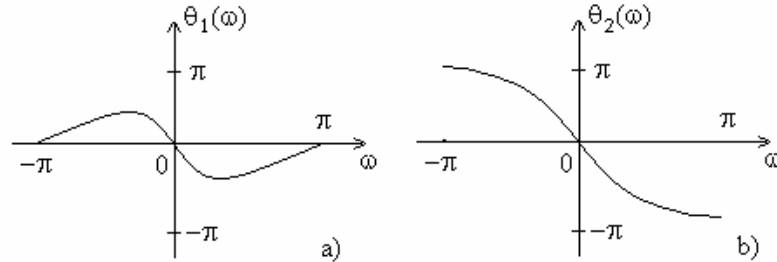


Figura 1.22. Răspunsul de fază al sistemelor descrise de a) (1.147) și b) (1.148)

Se observă cum caracteristica de fază  $\theta_1(\omega)$  a sistemului cu zeroul în interiorul cercului unitate începe la 0 pentru  $\omega = 0$  și se termină tot la 0 pentru  $\omega = \pi$ , astfel încât schimbarea netă de fază este  $\theta_1(\pi) - \theta_1(0) = 0$ . Pentru sistemul cu zeroul în afara cercului unitate schimbarea de fază este  $\theta_2(\pi) - \theta_2(0) = \pi$ . Primul sistem este de *fază minimă*, iar al doilea de *fază maximă*.

Aceste definiții pot fi extinse pentru sisteme FIR cu  $M$  zerouri. Răspunsul în frecvență al unui filtru FIR de lungime  $M+1$  este

$$H(\omega) = b_0(1 - z_1 e^{-j\omega})(1 - z_2 e^{-j\omega}) \dots (1 - z_M e^{-j\omega}) \quad (1.152)$$

unde  $b_0$  -constantă arbitrară, iar  $\{z_i\}$ ,  $i = 1, M$  - zerourile filtrului.

Dacă toate zerourile filtrului, reale și/sau complex conjugate, sunt în interiorul cercului unitate, fiecare termen real sau pereche de termeni complex conjugatăi din (1.152) va suferi o schimbare de fază egală cu 0 când  $\omega$  variază de la 0 la  $\pi$ , adică

$$\angle H(\pi) - \angle H(0) = 0 \quad (1.153)$$

motiv pentru care sistemul este de *fază minimă*.

Dacă zerourile sunt în afară cercului unitate, fiecare zero real va determina o schimbare de  $\pi$  radiani în răspunsul de fază, iar o pereche de zerouri complex conjugate o schimbare de  $2\pi$  radiani, adică

$$\angle H(\pi) - \angle H(0) = M\pi \quad (1.154)$$

sistemul fiind de *fază maximă*.

Deoarece derivata fazei este o măsură a întârzierii pe care componentele semnalului le suferă la trecerea prin filtru, un sistem de fază minimă implică o întârziere minimă.

Fie un sistem FIR cu coeficienți reali. Pătratul răspunsului de modul este

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.155)$$

Această relație implică faptul că dacă un zerou  $z_k$  al sistemului se înlocuiește cu inversul său  $\frac{1}{z_k}$ , caracteristica de modul nu se schimbă.

Aceasta înseamnă că, dacă  $|H(\omega)|^2$  este pătratul modulului răspunsului în frecvență al unui filtru FIR cu  $M$  zerouri, există  $2^M$  configurații posibile pentru cele  $M$  zerouri. O configurație corespunde zerourilor din cercul unitate, care caracterizează un sistem de fază minimă, o configurație conține toate zerourile în afara cercului unitate și corespunde unui sistem de fază maximă, iar restul de  $2^M - 2$  configurații corespund sistemelor de fază mixtă. Nu toate cele  $2^M - 2$  configurații de fază mixtă corespund neapărat unor sisteme FIR cu coeficienți reali.

Proprietatea de fază minimă a sistemelor FIR poate fi extinsă și asupra sistemelor IIR caracterizate de funcții de sistem raționale.

Un sistem IIR, stabil și cauzal, caracterizat de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.156)$$

este de fază minimă dacă toți poli și zerourile sunt în interiorul cercului unitate.

Pentru un sistem stabil și cauzal (toate rădăcinile lui  $A(z)$  în interiorul cercului unitate) sistemul este de fază maximă, dacă toate zerourile sale sunt în exteriorul cercului unitate și de fază mixtă sau neminimă, dacă unele zerouri, dar nu toate, sunt în exteriorul cercului unitate.

Din cele prezentate până acum se evidențiază faptul că unui sistem cu poli și zerouri stabil, de fază minimă, i se poate atașa are un sistem invers stabil care este, de asemenea, de fază minimă.

$$H^{-1}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \quad (1.157)$$

Aceasta înseamnă că proprietatea de fază minimă a lui  $H(z)$  asigură stabilitatea sistemului invers și stabilitatea lui  $H(z)$  implică proprietatea de fază minimă a lui  $H^{-1}(z)$ . Sistemelor stabile de fază mixtă și maximă le corespund sisteme inverse instabile.

Un alt mod de a caracteriza sistemele de fază minimă se referă la răspunsul de fază. În paragraful 1.1.1. s-a definit  $\text{Arg}[H(\omega)]$  ca fiind întregul răspuns de fază. Dacă se cunoaște valoarea principală a fazei, se poate construi funcția de fază totală prin adăugarea sau scăderea valorii de

$2\pi$  radiani în punctele de discontinuitate, după cum se arată în figura 1.1, procedură numită de *desfășurare a fazei*. În paragraful 1.6. s-a arătat că răspunsul de fază al filtrului este determinat de conținutul tuturor singularităților din planul  $Z$ . Când  $\omega$  variază de la 0 la  $\pi$ , un pol din interiorul cercului unitate scade răspunsul de fază cu  $\pi$  radiani, în timp ce un zero din interiorul cercului unitate crește fază cu  $\pi$  radiani. Dacă toate singularitățile sunt în interiorul cercului unitate, cum este cazul sistemelor cauzale și stabile de fază minimă, răspunsul de fază  $\text{Arg}[H(\omega)]$ , care este o funcție continuă de  $\omega$ , are valoarea zero atât pentru  $\omega=0$ , cât și pentru  $\omega=\pi$ .

Zerourile de pe cercul unitate determină salturi de  $\pi$  radiani în răspunsul de fază. Dacă pe cercul unitate sunt  $\mu_z$  zerouri, răspunsul de fază este  $\mu_z \cdot \pi$  la  $\omega=\pi$ .

Dacă pentru un sistem se cunoaște  $C(z) = H(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$  și acel

sistem este de fază minimă, atunci  $H(z)$  va avea polii și zerourile lui  $C(z)$  din cercul unitate. Din  $C(z)$  nu se poate determina în mod unic  $H(z)$ , deoarece orice alegere care are modulul răspunsului în frecvență dat poate fi cascadata cu o celulă trece tot arbitrară, fără a-i schimba modulul (vezi exemplul 1.2).

Aceasta se întâmplă deoarece dacă se schimbă un zero al funcției de sistem a unei celule trece tot din  $z=z_0$  în  $z=1/z_0$ , nu se schimbă răspunsul de amplitudine, ci numai cel de fază. Aceasta înseamnă că un răspuns de amplitudine dat poate avea asociate mai multe răspunsuri de fază. Din analiza de mai sus se poate da următoarea definiție pentru sistemele de fază minimă:

Pentru un răspuns de amplitudine dat, *sistemul de fază minimă* este sistemul cauzal pentru care răspunsul de fază corespunzător are valoarea cea mai mică pentru toate valorile lui  $z$  de pe cercul unitate.

În continuare sunt prezentate câteva aspecte care caracterizează sistemele de fază minimă.

### 1.9.2.1. Descompunerea sistemului cu poli și zerouri, de faza minimă

Un sistem poli zerouri de fază minimă se poate descompune sub forma

$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{ap}(z) \quad (1.158)$$

unde  $H_{min}(z)$  este un sistem de fază minimă și  $H_{ap}(z)$  este un sistem trece tot. Acest lucru rezultă ușor pentru clasa sistemelor cauzale și stabile cu funcție de transfer rațională  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ . Într-adevăr, dacă  $B(z)$  are una

sau mai multe rădăcini în afară cercului unitate, fie factorizarea  $B(z) = B_1(z)B_2(z)$ , unde  $B_1(z)$  are toate rădăcinile în interiorul cercului unitate, iar  $B_2(z)$  are toate rădăcinile în exteriorul cercului unitate. Atunci  $B_2(z^{-1})$  are rădăcinile în interiorul cercului unitate.

Cu considerațiile de mai sus, sistemul cu funcția de sistem

$$H_{min}(z) = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z^{-1})}{A(z)} \quad (1.159)$$

este de fază minimă, iar sistemul caracterizat de

$$H_{ap}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}, \quad (1.160)$$

este un sistem trece tot.

Cu (1.159) și (1.160) rezultă (1.158). Din (1.160) rezultă că  $H_{ap}(z)$  este stabil, trece tot și de fază maximă.

### 1.9.2.2. Întârzierea de grup a sistemelor de fază neminimă

Pe baza descompunerii din relația (1.158), se poate exprima întârzierea de grup pentru sistemul caracterizat de  $H(z)$ , ca fiind

$$\tau_g(\omega) = \tau_g^{min}(\omega) + \tau_g^{ap}(\omega) \quad (1.161)$$

Deoarece  $\tau_g^{ap}(\omega) \geq 0$  pentru  $0 \leq \omega \leq \pi$ , rezultă că  $\tau_g(\omega) \geq \tau_g^{min}(\omega)$ , pentru  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Din (1.161) se poate concluziona că dintre toate sistemele poli – zerouri care au același răspuns de amplitudine, sistemele de fază minimă au cea mai mică întârziere de grup.

### 1.9.2.3. Energia parțială a sistemelor de fază neminimă

Energia parțială a unui sistem cauzal, cu răspunsul la impuls  $h[n]$  se definește ca

$$E[n] = \sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \quad (1.162)$$

Se poate arăta că dintre toate sistemele poli – zerouri care au același răspuns de amplitudine și aceeași energie totală  $E(\infty)$ , sistemele de fază minimă au cea mai mare energie parțială [25].

### 1.9.3. Identificarea sistemelor și deconvoluția

Se presupune că un SDLIT necunoscut este excitat cu semnalul de intrare  $x[n]$  și se observă ieșirea  $y[n]$ . Din observarea secvenței de ieșire se dorește determinarea răspunsului la impuls al sistemului necunoscut sau funcția sa de sistem. Aceasta este o problemă de identificare de sistem, care, în funcție de natura secvențelor de intrare și ieșire, poate fi rezolvată prin următoarele metode:

#### 1.9.3.1. Determinarea funcției de sistem

Ieșirea sistemului necunoscut, liniar și invariant în timp, este egală cu convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul său la impuls. În domeniul  $Z$ , aceasta se scrie ca

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (1.163)$$

de unde

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1.164)$$

$X(z)$  și  $Y(z)$  fiind transformate  $Z$  ale semnalelor de intrare,  $x[n]$ , și respectiv, de ieșire,  $y[n]$ . Rezultă atunci că această abordare este potrivită numai când există forme analitice pentru  $X(z)$  și  $Y(z)$ .

#### *Exemplul 1.10.*

Un sistem cauzal produce secvența de ieșire  $y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 7/10, & n = 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

când este excitat de secvența de intrare  $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -7/10, & n = 1 \\ 1/10, & n = 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Să se determine răspunsul la impuls și ecuația cu diferențe a sistemului.

*Soluție.* Funcția de transfer poate fi determinată ușor prin considerarea transformatelor  $Z$  pentru  $x[n]$  și  $y[n]$ .

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{7}{10} \cdot z^{-1}}{1 - \frac{7}{10} \cdot z^{-1} + \frac{1}{10} \cdot z^{-2}} = \frac{1 + \frac{7}{10} \cdot z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \cdot z^{-1}\right)}$$



Deoarece sistemul este cauzal, regiunea sa de convergență este RC:  $|z| > \frac{1}{2}$ . Sistemul este, de asemenea stabil, deoarece polii săi sunt în interiorul cercului unitate. Ecuația cu diferențe corespunzătoare este

$$y[n] = \frac{7}{10}y[n-1] - \frac{1}{10}y[n-2] + x[n] + \frac{7}{10}x[n-1]$$

Răspunsul la impuls se obține din  $H(z)$  prin transformare Z inversă

$$h[n] = \left[ 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{5}\right)^n \right] \cdot u[n] \quad (1.165)$$

Se observă că relația (1.164) determină în mod unic sistemul necunoscut, dacă se cunoaște că acesta este cauzal. Metoda folosită în exemplul precedent este funcțională, dacă secvențele de intrare și ieșire sunt finite. Deoarece este foarte probabil ca răspunsul  $\{y[n]\}$  să fie infinit, această abordare este nepractică.

### 1.9.3.2. Aflarea răspunsului la impuls direct în domeniul timp

Pentru un sistem cauzal, caracterizat de răspunsul la impuls  $h[n]$ , răspunsul la un semnal de intrare,  $x[n]$ , este dat de suma de convoluție

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k] \cdot x[n-k] \quad n \geq 0 \quad (1.166)$$

Din aceasta rezultă

$$h[0] = \frac{y[0]}{x[0]} \quad (1.167)$$

și

$$h[n] = \frac{y[n] - \sum_{k=0}^{n-1} h[k] \cdot x[n-k]}{x[0]} \quad n \geq 1 \quad (1.168)$$

Această relație recursivă necesită ca  $x[0] \neq 0$ . Dacă  $\{h[n]\}$  este infinit în durată, această tratare nu este practică dacă nu se trunchiază  $h[n]$ . Datorită caracterului recursiv al relației (1.168), metoda poate fi ușor implementată cu ajutorul calculatorului.

#### **Exemplul 1.11.**

În condițiile exemplului 1.10, să se găsească răspunsul la impuls al sistemului, direct în domeniul timp.

*Soluție.* Cu datele din exemplul precedent, aplicând relațiile (1.167) și (1.168), se obține  $h[0] = 1$ ;  $h[1] = 7/5$ ;  $h[2] = 22/25, \dots$ , identice cu eșantioanele obținute cu relația (1.165). Într-adevăr, se observă necesitatea trunchierii lui  $h[n]$ .

### 1.9.3.3. Determinarea funcției de transfer a sistemului prin metode de corelație

O altă metodă de identificare a unui sistem necunoscut se bazează pe tehnici de corelație. Pentru aceasta, se calculează densitatea spectrală de energie,  $S_{xx}(\omega)$ , a semnalului de intrare  $x[n]$  și densitatea spectrală de energie de intercorelație,  $S_{yx}(\omega)$ , dintre semnalul de intrare  $x[n]$  și semnalul de ieșire  $y[n]$ .  $S_{xx}(\omega)$  este transformata Fourier a secvenței de autocorelație,  $r_{xx}[l]$ , a semnalului de intrare  $x[n]$ , iar  $S_{yx}(\omega)$  este transformata Fourier a secvenței de corelație  $r_{yx}[l]$ , dintre semnalul de intrare  $x[n]$  și semnalul de ieșire  $y[n]$  [34]. Pentru un SDLIT, caracterizat de răspunsul la impuls  $h[n]$ , funcția de corelație intrare-ieșire este

$$\begin{aligned} r_{yx}[m] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot x[n-m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \cdot x[n-m] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot x[n-m] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] \cdot x[p-m+k] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot r_{xx}[m-k] = h[m] * r_{xx}[m] \end{aligned} \quad (1.169)$$

În domeniul frecvență se poate scrie

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) = H(\omega) |X(\omega)|^2 \quad (1.170)$$

de unde

$$H(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yx}(\omega)}{|X(\omega)|^2} \quad (1.171)$$

Dacă se alege intrarea  $\{x[n]\}$  astfel încât densitatea sa spectrală de energie să fie constantă pentru toate valorile lui  $\omega$ , adică  $S_{xx}(\omega) = 1/K$ , atunci relația (1.171) devine

$$H(\omega) = K S_{yx}(\omega) \quad (1.172)$$

Echivalent, valorile răspunsului la impuls  $\{h[n]\}$  sunt egale cu valorile secvenței de corelație  $\{r_{yx}[l]\}$ , scalate cu valoarea  $K$ .

În unele cazuri, sistemul poate fi identificat prin calculul secvenței de autocorelație a ieșirii  $y[n]$ . Urmând un mers de calcul similar relației (1.169), rezultă

$$r_{yy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot y[n-m] = r_{hh}[m] * r_{xx}[m] \quad (1.173)$$

În domeniul frecvență se poate scrie

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{xx}(\omega) \quad (1.174)$$

Pentru un semnal de intrare cu densitatea spectrală de energie plată, se poate scrie

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot K \quad (1.175)$$

sau, echivalent, în domeniul Z, pentru  $K=1$

$$S_{yy}(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (1.176)$$

Pentru  $H(z)$  funcție rațională,  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , rezultă

$$S_{yy}(z) = \frac{D(z)}{C(z)} = \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \quad (1.177)$$

Numărătorul și numitorul relației (1.177) prezintă simetrie în oglindă a rădăcinilor. Pentru a determina  $H(z)$ , se determină rădăcinile lui  $D(z)$  și  $C(z)$ , apoi acestea se grupează pentru a forma pe  $H(z)$ . Soluția ecuației (1.176) nu este unică. Corespunzător, în domeniul frecvență, această relație are un singur răspuns de amplitudine, spre deosebire de cel de fază, care nu este unic. O soluție unică se poate obține prin impunerea unor constrângeri suplimentare asupra fazei sistemului.

### **Exemplul 1.12.**

Densitatea spectrală de energie a ieșirii unui SDLIT cauzal și stabil este  $S_{yy}(\omega) = \frac{1,04 + 0,4 \cos \omega}{1,25 - \cos \omega}$ . Sistemul este excitat cu un semnal a cărui densitate spectrală de energie este unitară. Să se determine funcția de transfer a sistemului.

*Soluție.* Cu ajutorul relațiilor trigonometrice,  $S_{yy}(\omega)$  se scrie

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1,04 + 0,2(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1,25 - 0,5(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}$$

Înlocuind  $z = e^{j\omega}$  în relația anterioară și ținând cont de (1.176), se obține

$$\begin{aligned}
 H(z)H(z^{-1}) &= \frac{1,04 + 0,2(z + z^{-1})}{1,25 - 0,5(z + z^{-1})} = -0,4 \left( \frac{z^2 + 5,2z + 1}{z^2 - 2,5z + 1} \right) = \\
 &= \frac{(z^{-1} + 0,2)(1 + 0,2z^{-1})}{(z^{-1} - 0,5)(1 - 0,5z^{-1})}
 \end{aligned}$$

În condițiile problemei, există două soluții pentru  $H(z)$ . Pentru sistemul de fază minimă, funcția de transfer este  $H(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})}$ , în timp ce, pentru sistemul de fază neminimă,  $H(z) = \frac{(z^{-1} + 0,2)}{(1 - 0,5z^{-1})}$ .